光弾性画像による任意直角座標系上の応力自動解析算法*

馬 渡 鎮 夫*¹, 隆 雅 久*¹, 豊 田 吉 顯*¹Automatic Stress Analysis with Two-Dimensional Photoelastic Image
on a Cartesian Coordinate System

Shizuo MAWATARI, Masahisa TAKASHI and Yoshiaki TOYODA

In spite of a number of attempts to develop an automatic system of photoelastic stress analysis with a microcomputer, there still exist several difficulties in accurate treatment of digital image data. In this paper, the authors describe a new theory and its application regarding the automatic calculation of stress components on an appropriate Cartesian coordinate from several photoelastic images, using a microcomputer. Two new concepts, namely, 1) the local polynomial expression of Airy's stress function, and 2) the relativity of boundary values, are proposed here, in addition to the well-known equations of the light intensity in photoelasticity and the coordinate transformation of stress components. Based on the above concepts, the expression of each stress component using spline functions on a Cartesian coordinate is easily calculated by the least squares method. An application of this method shows much better accuracy of analysis which is unaffected by generation and propagation of errors, in comparison with the former methods published to date.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Photoelasticity, Separation of Stress Components, Airy's Stress Function, Noise, Error in Calculation

1. は じ め に

二次元光弾性実験において試験片に直角座標系を導入し、主応力差および主応力方向を求めた後、座標軸方向の応力 σ_x, σ_y を分離する従来の方法は、せん断応力差積分法が中心であった。しかし、コンピュータを用いる現代の光弾性法においては、この積分法は一般には極度のけた落ちまたは打ち切り誤差が発生する上に、誤差伝播が著しい算法であることは周知である。そこでせん断応力差積分法に代わる方法がいくつか提案されている。それらは等傾線を使う方法⁽¹⁾と使わない方法⁽²⁾⁽³⁾とに大別される。最近では等傾線データを用いて主応力方向を計算することが可能となった⁽⁴⁾⁽⁵⁾ので、純実験的な見地からは前者が望ましいことは明らかである。最近梅崎ら⁽¹⁾は、応力の釣合い方程式から応力差についての新しい近似関係式を導き、最小二乗法を用いて応力分離を行う興味ある応力解析法を提案した。この方法はせん断応力差積分法を含む諸問題点のうち誤差の伝播は大きく軽減している。しかし、その他の問題はやはり含んだままである上に、試験片

の要素分割について有限要素法の場合と同様の問題点を新たに含むことになった。

本研究では、二次元光弾性実験法に焦点を当て、エアリーの応力関数の局所的多項式表現、光弾性実験データと $\sigma_x - \sigma_y, \tau_{xy}$ についての周知の関係式、最小二乗法、相対境界値という新しい概念等を用いて、 σ_x, σ_y のスプライン表現関数を構成する。言い替えると、本研究は光弾性実験中に発生する雑音やデータ誤差等の影響、離散化の際に発生する打ち切り誤差および誤差伝播等の少ない効率的な新しい純実験的応力解析法を確立する。またこの解析法を実際の光弾性実験データに適用して、その有効性を検証する。

2. 問 題 設 定

光弾性実験における試験片 S に (x, y) -直角座標系を導入する。そして等色線データから主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ を⁽⁶⁾、等傾線データから主応力方向 θ を求める⁽⁴⁾⁽⁵⁾。次に座標軸方向の応力 σ_x, σ_y 、せん断応力 τ_{xy} についての釣合い方程式：

$$\left. \begin{aligned} \partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y &= 0 \\ \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

および境界条件について考える。

* 原稿受付 平成元年 10 月 5 日。

*¹ 青山学院大学理工学部 (〒157 東京都世田谷区千歳台 6-16-1)。

ただし、 S に物体力 f_x, f_y が働くときは、ポテンシャル関数 $\Omega(x, y)$ が存在して、 f_x, f_y が関係式：

$$f_x = \partial\Omega/\partial x, f_y = \partial\Omega/\partial y \cdots \cdots (2)$$

によって導かれ、式(1)における σ_x, σ_y はそれぞれ $\sigma_x - \Omega, \sigma_y - \Omega$ で置換されるものとする⁽⁷⁾。

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は試験片(二次元有界閉領域) S 上の関数であり、理論解析の際は2変数関数として扱うが、数値計算上は次のように1変数のパラメータ族に分割したほうが便利であることが多い。すなわち、

$I_x \times I_y$: 画像領域(く形領域)

ただし、

I_x : x 軸方向の線分

I_y : y 軸方向の線分

$$S_x = \{(x, y) \in S | y \in I_y\}$$

$$S_y = \{(x, y) \in S | x \in I_x\}$$

において、 S を次のように分割する。

$$\left. \begin{aligned} S &= \{S_x | x \in I_x\} \\ S &= \{S_y | y \in I_y\} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (3)$$

そして、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を各々の S_x, S_y 上の関数に分割したものを、それぞれ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ の1変数パラメータ族という。

さて、光弾性実験データの解析から、次の値：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= (1/2)(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (4)$$

および自由境界上の σ_1, σ_2 の値が求まる。これらの値および式(1)を用いて式(3)の各 S_x, S_y の上で、 σ_x, σ_y を求める問題を考える。この問題に関する従来の算法は次のせん断応力差積分法が中心であった。すなわち、 S_y 上の2点 $x_i, x_j = x_i + \Delta x$ において、式(1)を次のように変形し、離散化する。

$$(\sigma_x)_j = (\sigma_x)_i - \int_{x_i}^{x_j} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx \cdots \cdots (5)$$

$$(\sigma_x)_j = (\sigma_x)_i - (\Delta \tau_{xy} / \Delta y) \Delta x \cdots \cdots (6)$$

そして、 σ_x の境界値 $(\sigma_x)_0$ から式(6)の計算を反復実行する。ところが、式(6)の離散化では、 $\Delta \tau_{xy}$ の計算精度が実験データの精度に強く影響され、しかも2段階の打ち切り誤差を含み、さらに σ_x の境界値が常に高精度に求まるとは限らないので、式(6)の反復実行は、一般には誤差の発生および誤差伝ばの著しい算法である。

一方梅崎ら⁽¹⁾の算法では、式(6)を用いて新しい関係式：

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \sigma_y)_j &= (\sigma_x + \sigma_y)_i \\ &+ \{(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta\}_i - \{(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta\}_j \\ &- 2(\Delta \tau_{xy} / \Delta y) \Delta x \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

を導き、試験片 S を有限要素に分割し、応力和 $\sigma_x + \sigma_y$ を最小二乗法で求める。この場合も、式(6)を導く離散化の過程にせん断応力差積分法と同様の難点を含んでいる。しかし、最小二乗法を使用した分だけ誤差の伝ばが軽減されているが、その代償として有限要素への分割の仕方に新たな難点を含むことになった。

以上のように、式(5)を式(6)のように離散化する算法は、実験データの解析法としては適切でない。問題の核心は、一般には種々な雑音を含む式(4)の右辺の計測値から式(5)第2項の数値微分および数値積分を求める点にある。すなわち、数値微分はけた落ちの影響が甚大であること、数値微分および数値積分において打ち切り誤差が小さいのは $|\Delta x|$ が十分小さい場合であること、数値計算の反復実行には誤差の累積や伝ばがあることなどは、数値解析において周知である^{(8)~(10)}。しかし、光弾性実験データへの適用においては、計測値には雑音を含むのでけた落ちの影響はさらに深刻であるうえに、観測点が離散的なので $|\Delta x|$ は必要なだけ小さくできない。これらの事情を考慮せず、式(5)を式(6)のように安易に離散化した点にせん断応力差積分法の最大の難点がある。

本研究では、3章～5章で必要な概念および関係を準備した後、6章でそれらの難点を根本的に解消する新しい応力分離法を提案する。

3. エアリーの応力関数

試験片 S 上で4回連続的に微分可能な実数値関数 $\chi : S \rightarrow R$ で次の条件を満たすものをエアリーの応力関数という⁽⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \partial^2 \chi / \partial y^2, \\ \sigma_y &= \partial^2 \chi / \partial x^2, \\ \tau_{xy} &= -\partial^2 \chi / \partial x \partial y \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (8)$$

この関数 χ は重調和関数であり、次の関係式を満足する。

$$\partial^4 \chi / \partial x^4 + 2\partial^4 \chi / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 \chi / \partial y^4 = 0 \cdots \cdots (9)$$

試験片 S が有界閉領域であるとき、Stone-Weierstrassの定理⁽¹¹⁾から、 χ は S の上で n 次の多項式 $P_n(x, y)$ で一様に近似できる。ここで n は、その近似に要求される精度に依存する。 χ を試験片の全体で一つの多項式 $P_n(x, y)$ で近似するとき、 n は一般には大きくなる。

しかし、 χ を試験片の各点の近傍で近似するとき、 n は小さい自然数であるものと期待される。

いま、 χ の n 次の近似多項式 $P(x, y)$ を点 $(0, 0)$ の近傍で次のように表現する。

$$P(x, y) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m,k} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (10)$$

ここで $a_{m,k}$ を式(10)の本質的な係数と呼ぶことにする。この多項式 $P(x, y)$ は式(8), (9)の条件を近似的に満足すると考えてもよい。そこで式(10)における各係数 $a_{m,k}$ についての関係を調べるために、 $P(x, y)$ の各偏微分を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m,k} k x^{k-1} y^{m-k} / m! \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m m \left[\begin{matrix} m-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] a_{m,k} x^{k-1} y^{m-k} / m! \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m+1,k+1} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m,k} (m-k) x^k y^{m-k-1} / m! \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} m \left[\begin{matrix} m-1 \\ k \end{matrix} \right] a_{m,k} x^k y^{m-k-1} / m! \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m+1,k} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (12) \end{aligned}$$

以下同様に計算して次の関係式を得る。

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m+2,k} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (13)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m+2,k} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (14)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m+2,k+1} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (15)$$

$$\frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = \sum_{m=0}^{n-4} \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m+4,k} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (16)$$

$$\frac{\partial^4 P}{\partial y^4} = \sum_{m=0}^{n-4} \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m+4,k} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (17)$$

$$\frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=0}^{n-4} \sum_{k=0}^m \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right] a_{m+4,k+2} x^k y^{m-k} / m! \quad \cdots (18)$$

式(16)～(18)を用いて式(9)を書き換えると、

$$a_{m+4,k+4} + 2a_{m+4,k+2} + a_{m+4,k} = 0 \quad \cdots (19)$$

$$(m=0 \sim n-4; k=0 \sim m)$$

次に式(13), (14), (15)の各係数の関係を調べる。そのために、単項式 $x^k y^{m-k}$ の次元図式(図1)を使う。この図式に基づくと、式(13), (14), (15)の本質的な係数 $a_{m,k}$ は、図2～4のように図示される。

図1～4を参照すると次の命題が成り立つ。

[命題1]

$m=1, 2, \dots, n-2$ について次の等式が成り立つ。

- (1) ‘式(13)の y^m の係数’
= ‘式(15)の xy^{m-1} の係数’/ m
- (2) ‘式(14)の x^m の係数’
= ‘式(15)の $x^{m-1}y$ の係数’/ m

ところで式(10)は点(0,0)の近傍における表現であった。試験片 S 上の任意の点 (x_1, y_1) の近傍における表現は

$$X = x - x_1, Y = y - y_1 \quad \cdots (20)$$

とおき、この X, Y を式(10)の x, y に代入した多項式 $P(X, Y)$ である。以下において式(10)～(15)をしばしば使うが、このときは常に次の原則が適用されているものとする。

[原点近傍表現の原則]

試験片 S の点 (x_1, y_1) の近傍におけるエアリーの応力関数の多項式表現は、式(20)を用いて原点を点 $(x_1,$

図1 単項式次元図式

図3 式(14)の係数の次元図式

図2 式(13)の係数の次元図式

図4 式(15)の係数の次元図式

y_1) に平行移動した後、式(10)の表現を $P(X, Y)$ と読み替えたものとする。

さらに次の命題が成り立つ。

[命題 2]

$-\tau_{xy}$ の近似式(15)が決定されると、各々の S_y 上で σ_x の近似式(14)が 1 変数 x の多項式として、また各々の S_x 上で σ_y の近似式(13)が 1 変数 y の多項式として、定数項を除いて決定される。

[証明]

σ_x について示す(σ_y についても同様である)。点 (x_1, y_1) は、 S_y 上の点とし、この点の近傍で式(10)を考える。原点近傍表現の原則を用いると、 S_y 上で式(10)の y は零となる。命題 1 より、 σ_x の近似式(14)が 1 変数 x の $n-2$ 次の多項式として、定数項を除いて決定される。

Q. E. D.

4. 境界条件と相対境界値

命題 2 で定数項が決定できないという事象は、式(1)のみを使って応力分離を行う場合にも発生する。すなわち次の命題が成り立つ。

[命題 3]

σ_x および σ_y が式(1)を満たすとき、任意の定数 c を用いた $\sigma_x + c$ および $\sigma_y + c$ も式(1)および式(4)をみたす。

実は、 σ_x, σ_y の定数項を決定するのが境界条件である。一般に境界条件は次の 3 種類に大別される⁽⁷⁾。

(1) 物体表面での表面力が与えられる場合 (第 1 種境界値問題)

(2) 物体表面での変位が与えられる場合 (第 2 種境界値問題)

(3) 物体表面のある部分では表面力が、残る部分では変位が与えられる場合 (混合形境界値問題)

光弾性実験においては、変位、ひずみ、応力についての周知の関係式を用いて、変位境界を応力境界に変換することができる。したがって光弾性実験における境界条件は応力の値に変換可能である。しかし試験片 S を式(3)のように分割するとき、それぞれの S_x, S_y の境界で常に σ_x, σ_y の値が決定されるとは限らない。そこで次の仮定 [A1] を考える。

[A1] 試験片 S の境界上の一点 (x_0, y_0) で次の条件①および②を満たすものが存在する。

① σ_x および σ_y の値が既知である。

② S の任意の点 (x, y) と点 (x_0, y_0) とを結ぶ S に含まれる折れ線 Π が存在する。

光弾性実験においては一般性を失うことなく、上記の仮定 [A1] が成り立つと考えることができる。

この仮定と命題 3 とを用いて、次の境界条件処理手順を定める。

[境界条件の処理手順]

(i) 誤差の伝ばを軽減するため、式(3)の各 S_x, S_y の上で、任意の定数(例えば 0)を境界値として、 σ_x および σ_y を求める。

(ii) S_x, S_y の一点 (x, y) と点 (x_0, y_0) とを [A1] の折れ線 Π で結び、点 (x_0, y_0) において既知の σ_x および σ_y の値を用いてこの折れ線に沿って求めた点 (x, y) における σ_x の値と (i) で求めた σ_x との差 c を求める。

(iii) 上記 (i) で求めた σ_x, σ_y の値にこの c を加えて、本来の境界条件を満たす σ_x, σ_y の値を求める。

上記 (i) で定めた境界値を相対境界値、これに対して本来の境界値を絶対境界値と呼ぶことにする。

5. 3 次スプライン関数の構成

各 S_y の任意の一点の近傍において、命題 2 を用いて定まる σ_x の近似多項式 Q の定数項は、 S_y 上にいくつかが分点を取り、各分点において連続であるように定めれば良く見える。しかし、この決定法では誤差の伝ばが大きくなる可能性があり、適切ではない。ここでは Greville の the smoothest interpolating cubic spline⁽¹²⁾ を変形して、本研究の目的に適した 3 次スプライン関数の構成法について述べる。 S_y は線分であるので、いま閉区間 $[a, b]$ 上で考える。閉区間 $[a, b]$ を n 等分して分点：

$$x_k = a + kh \quad (k=0, 1, \dots, n) \dots\dots\dots (21)$$

$$\text{ただし } h = (b - a)/n$$

をとる。これらの分点を節点とする閉区間 $[a, b]$ 上の『最も滑らかな』3 次スプライン関数 $f(x)$ は次のように表現される⁽¹¹⁾。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} x_i < x_j < x_k \\ f(x_i, x_j) &= \{f(x_j) - f(x_i)\} / (x_j - x_i) \\ f(x_i, x_j, x_k) &= \{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)\} / (x_k - x_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

と定義すると、

$$x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

において、

$$\left. \begin{aligned} f(x_i, x, x_{i+1}) &= (1/6)\{f''(x_i) + f''(x) \\ &\quad + f''(x_{i+1})\} \\ f(x) &= f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i, x, x_{i+1}) \\ &\quad + (x - x_i)(x - x_{i+1})f''(x_i, x, x_{i+1}) \\ f'(x) &= f'(x_i, x_{i+1}) + (2x - x_i - x_{i+1})f''(x_i, x, x_{i+1}) \\ &\quad + (1/6)(x - x_i)(x - x_{i+1})f'''(x_i, x_{i+1}) \\ f''(x) &= f''(x_i) + (x - x_i)f'''(x_i, x_{i+1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

と表現される。このスプライン関数は補間式として構成され、Grevilleの議論はここで終わる⁽¹¹⁾。しかし、この表現式は、次に示すように、 $f'(x_i)$ 、 $f''(x_i)$ の値から $f(x_i)$ の値を求める場合にも適している。

式(23)の第3式の x に x_i を代入する。

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= f'(x_i, x_{i+1}) \\ &\quad + (x_i - x_{i+1})f''(x_i, x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

式(21)、(22)、(23)を用いてこの式を変形すると、

$$\begin{aligned} hf''(x_i) &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ &\quad - h^2\{2f''(x_i) + f''(x_{i+1})\}/6 \\ \therefore f(x_{i+1}) &= f(x_i) + hf'(x_i) \dots\dots\dots (24) \\ &\quad + h^2\{2f''(x_i) + f''(x_{i+1})\}/6 \\ (i &= 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

したがって、境界値 $f(x_0)$ および各々の $f'(x_i)$ 、 $f''(x_i)$ をあらかじめ計算しておけば、式(24)および式(23)を用いて閉区間 $[a, b]$ の全域で、スプライン関数 $f(x)$ の値を計算することができる。

6. 応力分離の算法

本章では、5章までの知見を用いて、式(3)の各 S_x または S_y の上で σ_x および σ_y の近似値を求める算法を構成する。以下では S_y 上の σ_x に関する算法について述べる。 S_x 上の σ_y に関する算法も同様である。

一般には S_y は複数個の連結成分に分離される。以下の説明はどの連結成分に対しても同様であるので、以下において S_y が連結である場合について考察する。

S_y の境界点を (x_0, y) 、 (x_m, y) とし、 S_y を等分割して式(21)と同様の分点 $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ をとる。

6.1 非定数項の局所決定法 まず、式(10)～(15)を用いて、各点 (x_k, y) における σ_x の近似多項式を次のようにして求める。

(1) 種々好都合な性質を持っている『最も滑らかな』3次スプライン関数で σ_x を表現するため、エアリーの応力関数 χ を局所的に多項式(10)で近似する。このとき式(10)の n の最小値は5となる。

(2) $n=5$ のとき、式(15)の未知係数は10個あ

る。現在考察中の点 (x_k, y) の二次元近傍において11個以上(例えば49個)の S の点を取り、式(15)が $-\tau_{xy}$ の近似多項式となるように、式(4)の右辺の計測値および最小二乗法を用いて、式(15)の各本質的係数 $a_{m,k}$ を求める。ここで最小二乗法を用いる理由は、雑音による悪影響を軽減するためである。

(3) 命題1を用いて、式(14)の x^1, x^2, x^3 の係数を求め、 σ_x の近似1変数3次多項式 $Q_k(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ を定数項を除いて定める。

(4) さらに、 $Q_k(x)$ を解析的に微分して、 $Q'_k(x_k)$ 、 $Q''_k(x_k)$ ($k=0, 1, \dots, m-1$)を求める。

6.2 σ_x の近似スプライン関数の構成 S_y 上で、 σ_x の近似3次スプライン関数 $f(x)$ を次のように構成する。

(1) 境界点 (x_0, y) における相対境界値を0、すなわち $f(x_0)=0$ とする。

(2) 6.1節の多項式 Q_k を用いて、

$$\left. \begin{aligned} f'(x_k) &= Q'_k(x_k) \\ f''(x_k) &= Q''_k(x_k) \quad (k=0, 1, \dots, m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

とおき、式(24)を用いて、 $f(x_k)$ ($k=1, 2, \dots, m$)を求める。

(3) 式(23)の第2式を用いて、相対境界値が0である S_y 上の σ_x の近似スプライン関数 $f(x)$ を構成する。

6.3 定数項の補正

(1) S_y の境界点 (x_0, y) における絶対境界値 c が既知である場合には、 S_y の全体で前述の $f(x)$ を $f(x)+c$ に修正する。

(2) そうでない場合は、

①まず、4章で述べた[境界条件の処理手順]における折れ線 Π に沿って、上の(1)を用いて σ_x の近似値を計算する。

②その際、折れ線 Π の中にある小線分のうち、 y 軸に平行な線分上では σ_y を先に求め、両座標軸に平行でない線分については、座標軸を適当に回転した後に、 σ_x または σ_y を求める。

③そして、[境界条件の処理手順]に従って、6.2節で求めた S_y 上のスプライン関数 $f(x)$ の定数項を補正する。

6.4 算法のまとめ 以上に述べた算法をまとめると次のとおりである。

(1) 光弾性実験における試験片 S に、 (x, y) -直角座標系を導入し、 S 上で主応力差 $\sigma_1 - \sigma_2$ および主応力方向 θ を求める。さらに、仮定[A1]における点 (x_0, y_0) およびその点における σ_x または σ_y を求める。

(2) 試験片 S を式(3)のように分割する。

(3) 各 S_y の連結成分をとり、その境界点を $(x_0, y), (x_m, y)$ とし、その連結成分を等分割して式(21)のように分点をとる。

以下、各 S_y の各々連結成分について、

(4) 6・1節の手順を実行して、各点 (x_k, y) における S_y 上での σ_x の近似微分 $Q'_k(x_k), Q''_k(x_k)$ を求める。

(5) 6・2節の手順を実行して、 S_y 上でのスプライン関数 $f(x)$ を求める。

(6) 6・3節の手順を実行して、 $f(x)$ の定数項を修正し、 S_y 上での σ_x の近似スプライン関数 $f(x)+c$ を求める。

(7) 式(4)を用いて、 S_y 上で σ_y を求める。

6・5 算法の特徴 本研究における算法の特徴は次のとおりである。

(1) エアリーの応力関数および1変数パラメータ族への分解という手法を用いて、従来の数値微分を全く用いることなく、各 S_y 上で

$$\partial\sigma_x/\partial x, \partial^2\sigma_x/\partial x^2$$

図 5 主応力差の計算結果

図 6 主応力方向の計算結果

(a) $y/r=0.0$

(b) $y/r=0.2$

(c) $y/r=0.4$

(d) $y/r=0.6$

(e) $y/r=0.8$

図 7 主応力成分の分離結果

(—: S_x, S_y , $\diamond$: σ_x , $\circ$: σ_y)

の近似値を計算する。このとき、けた落ちの心配はほとんどないし、分割のサイズ $|\Delta x|$ を特に小さくする必要もない。

(2) 式(23)および式(24)を用いて最も滑らかな3次スプライン関数を構成することにより、従来の数値積分を全く用いることなく、各 S_y 上で σ_x の近似関数値 $f(x)$ を計算する。このときも、分割のサイズ $|\Delta x|$ を特に小さくする必要はない。さらに、式(24)に見られるように、点 x_{i+1} における値 $f(x_{i+1})$ の計算に、点 x_i の情報ばかりでなく、点 x_{i+1} の情報も使っているため、誤差の伝ばは少ない。

(3) 誤差のない相対境界値を用いて計算の主要部分を実行しているので、境界値の誤差が増幅されることはない。

(4) 光弾性実験データに対して最小二乗法を適用して必要なパラメータを計算しているので、雑音から受ける悪影響は少ない。

(5) 試験片 S を式(3)のように分割しているが、その際有限要素法におけるような問題は発生しない。

7. 実験データへの適用

前章で述べた算法の有効性を検証するため、光弾性実験データへの適用を試みた。理論値との比較が必要であるため、試験片は、半径 $r=40$ mm、厚さ $d=6$ mm、対向圧縮集中荷重 $P=324$ Nを受けている円板とする。応力の理論値 σ_x, σ_y に対するそれぞれの計算値を s_x, s_y とし、試験片の切断線 $y/r=0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 上での σ_x, s_x および σ_y, s_y の分布をプロットする。誤差尺度は、 $\|\cdot\|$ を L_2 -ノルムとして、各切断線上における相対 L_2 -ノルム誤差 $\|s_x - \sigma_x\|/\|\sigma_x\|, \|s_y - \sigma_y\|/\|\sigma_y\|$ とする。なお、実験データに基づく一組の解析結果を他のデータ（例えば理論値）と比較するときには、それに先立って、境界、対称軸、輝度値等について調整しておく必要があり、本研究においてもそれを実施している。

実際の光弾性実験において、等色線データおよび等傾線データを求め、参考文献(5)、(6)の方法で主応力差(図5)および主応力方向(図6)を求め、これらを入力データとして前述の算法を適用し、 σ_x, σ_y の近似値 s_x, s_y を計算し、平均応力 $P/2rd$ で無次元化して図7(a)~(e)に示す。さらに、その際の誤差を表1に示す。本研究の誤差尺度は相対 L_2 -ノルム誤差という厳密なものであるが、この尺度を用いても、従来の

表 1 応力成分の分離結果の誤差

y/r	L_2 -Norm Relative Errors (%)	
	σ_x	σ_y
0.0	0.025	1.761
0.2	0.019	1.298
0.4	1.942	1.369
0.6	0.835	1.216
0.8	1.590	2.377

算法および梅崎らの算法⁽¹⁾よりも結果は良好である。

なお、この解析結果の詳細については、別の機会に述べることにする。

8. おわりに

直角座標系上で得られた光弾性実験データから応力 σ_x, σ_y を分離する従来の方法では、式(5)の右辺を離散化する際に発生する種々な誤差に煩わされた。本研究ではエアリーの応力関数を使い、式(6)を使わない新しい効率的で高精度な算法を構成し、実際の光弾性実験データへ適用してその有効性を検証した。結果として本研究の手法は、文献(5)、(6)に述べた主応力差および主応力方向を計算する算法と合わせて、平面光弾性実験における一連の応力解析に関する純実験的方法を確立するものである。

文 献

- (1) 梅崎・ほか2名, 機論, 53-492, A(1987), 1658.
- (2) 渋谷・ほか3名, 機論, 51-466, A(1985), 1604.
- (3) 西田・ほか1名, 光弾性学論文集, 8-2(1988), 19.
- (4) 梅崎・ほか2名, 機論, 52-474, A(1986), 561.
- (5) 馬渡・ほか2名, 機論, 55-514, A(1989), 1423.
- (6) 馬渡・ほか2名, 機論, 55-511, A(1989), 598.
- (7) 例えば, 国尾, 固体力学の基礎, (1977), 培風館, 116.
- (8) 一松, 数値解析(1971), 税務経理協会, 221.
- (9) 森, FORTRAN 77 数値計算プログラミング, 増補版, (1989), 岩波書店, 236.
- (10) 森11, 数値計算工学, (1989), 岩波書店, 183.
- (11) Dieudonne, J., *Foundations of Modern Analysis*, (1969), Academic Press, New York, 131.
- (12) Greville, T. N. E. 編, *Theory and Applications of Spline Functions* (1969), Academic Press, New York, 31.