コンプレックス法 を用いた空域欠陥推定の逆解析手法*

李銀生*¹, 古口日出男*², 矢田敏夫*²

A Method Identifying Defects by Inverse Analysis using Boundary Element Method

Yin-sheng LI, Hideo KOGUCHI and Toshio YADA

In this paper, the defect with noncircular shape in a two-dimensional structural component is identified by using the complex method incorporated into the two-dimensional elastic boundary element method. The method for searching for the defect is that the norm of boundary displacement, defined as the sum of the square of the difference between experimental values and numerical solutions, becomes minimum when the assumed defect coincides with the real one. The complex method is used to find the defect shape and position with minimal norm by iteratively modifying the fictitious defect boundary within some constraint conditions without calculating derivatives. The procedure of defect identification is discussed under several numerical examples, and it is shown that the present method is efficient and accurate in searching for the real defect.

Key Words: Structural Analysis, Elasticity, Boundary Element Method, Inverse Problem, Defect Identification, Complex Method.

1. 緒 言

構造物内部のき裂、欠陥の形状、寸法および位置を非破壊的に精度よく推定することは、構造部材の安全性および余寿命を評価する上で極めて重要である。従来、これらを非破壊的に測定する方法としては超音波探傷法、磁気探傷法、電気抵抗法などがある。しかし、どのような状況でも探査可能な方法はまだ確立されていないと考える⁽¹⁾。このため、き裂、欠陥の形状・位置を定量的に精度よく推定する非破壊検査法に関する研究は重要な課題となっている⁽²⁾。

近年、境界要素法の高精度化と高効率化に関する研究が行われるに伴い、構造物境界の実験計測データから構造物の内部情報を求める、いわゆる逆問題解析に境界要素法を適用することが極めて有望となり、いろいろな分野でこの問題に関する研究が行われている⁽³⁾。これまでも構造物の内部き裂や欠陥に関する逆

問題解析が研究され、幾つか報告されている⁽²⁾⁻⁽⁶⁾。

き裂、欠陥の推定を定量的に行うということは、すなわち欠陥の存在位置、寸法および形状を明確にするということであり、決定すべき未知数が多く、複雑な問題である。ところで、現在、境界要素法による逆解析でき裂、欠陥を推定する研究において用いられている推定方法は二種類ある。その内、電気ポテンシャルCT法⁽²⁾⁻⁽³⁾はさまざまなき裂を仮定して、境界のポテンシャル残差を最小にするき裂位置、形状および寸法を探していく方法で、原理的には簡単である。しかし、これを組織的に行うには多くの経験と手間が必要である。また、境界要素法の積分方程式を微分する推定方式も提案されている⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾。しかし、基本解の特異性が強くなり、高次要素の適用が困難であるので、一般的問題の高精度な解析は難しい。

本研究は非線形計画法のコンプレックス法を境界要素法逆解析に組み込み、境界変位残差を最小にすることによって欠陥を推定する方法について検討を行っている。この方法は境界積分方程式に関する微分の必要がないので、数値処理の複雑さを増加することなく、これまでのプログラムを改良することで容易に作るこ

* 原稿受付 平成2年1月22日。

¹ 准員、長岡技術科学大学大学院 (〒942-21 長岡市上富岡町1603-1)。

² 正員、長岡技術科学大学工学部。

とができる一般的、汎用的な方法である。また、この方法はコンプレックス法により欠陥を計画的に推定していくので、ほとんど人手にたよらなくてすみ、解析精度も向上できる。応用例として、二次元構造物にある楕円または凹角形状の欠陥について形状、位置と寸法の探査を行い、本手法の精度と有効性を確認する。

2. 境界要素法

2.1 境界要素法の基礎式 物体力が作用しない、均質、等方、二次元弾性体の境界要素積分方程式は次のように表せる。

$$c_{ij}u_j = \int_{\Gamma} (u^*_{ij}p_j - p^*_{ij}u_j) d\Gamma \quad (1)$$

ただし、 u は変位、 p は表面力、 Γ は物体の境界表面、 c_{ij} は定数である。また、 u^* と p^* は二次元のKelvinの基本解で、ソース点と場の点の距離の関数である。式(1)を境界要素について離散化して、連立方程式をマトリックスで表すと、式(2)が得られる。

$$BU=GP \quad (2)$$

ここで、 H 、 G は影響係数マトリックスを表し、 U 、 P は変位および表面力ベクトルを表す。

既知境界条件に基づいて、方程式(2)を解くことによって、全ての境界未知数が得られる。

影響係数マトリックス H 、 G を計算するとき、ソース点が場の点の近傍にある場合、基本解に関する積分は特異積分となる。この特異積分を高精度に数値積分するために、本研究ではBi-cubic Transformation法⁽⁷⁾を用いている。この方法は変数変換により、積分点を特異点の近傍に集中させ、少ないガウス積分点で高精度に積分できる方法である。

2.2 逆解析 一般に、逆解析とは結果のデータからその原因を求めようとするもので、本研究の場合は外部境界計測データから未知の内部境界、すなわち、欠陥の位置、形状および寸法を求める。具体的な解析手法は境界変位残差最小化法⁽²⁾を採用している。すなわち、外部境界における境界変位の測定値を u とする。そして、内部欠陥の形状と位置を仮定して連立方程式(2)を解いた場合の外部境界における変位の計算値を $\bar{u}$ とすると、境界変位残差平方和 R は次のように与えられる⁽²⁾。

$$R = \left\{ \int_S W(u - \bar{u})^2 ds \right\}^{1/2} \quad (3)$$

ただし、 W は重みで、境界値の測定点 i におけるDiracのデルタ関数を用いると、 R は次のようになる。

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^M (u_i - \bar{u}_i)^2 \right\}^{1/2} \quad (4)$$

ここで、 i は境界変位測定点の節点番号、 M は測定点の総数を示す。

仮定した欠陥が真の欠陥であるとき、境界変位残差 R は最小値となる。従って、仮定した欠陥の境界を修正することによって、境界変位残差 R を最小にする欠陥は真の欠陥であると考えられる。

3. 欠陥推定法

前述のように、境界変位の残差を最小にする仮定欠陥は最も確からしいものと考えられる。従来、この仮定欠陥境界に関する修正方法としては試行錯誤法⁽²⁾と係数マトリックスの微分により修正方向を決める手法^{(4),(5)}がよく用いられてきた。しかし、試行錯誤法は実際経験を必要とし、多くの時間と労力がかかる。また、微分法は基本解の特異性のさらに強い特異積分が生じ、高次要素の適用と数値処理が難しくなり、精度にも問題が生じてくる。

そこで、本研究では欠陥推定を省力化し、かつ高精度に行うために、非線形計画法のコンプレックス法を境界要素法に組み込み、境界変位残差の最小値の推定、すなわち、真の欠陥に関する推定を自動的に行う。一般制約条件下の最小値推定法としては、コンプレックス法のほかに、Rosenbrock法やCarroll法等があるが、本研究は効率と精度の面からコンプレックス法を採用する。

3.1 コンプレックス法^{(2),(3),(10)} いま、次のような関数を考察する。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5)$$

この関数には m 個の制約条件がある。

$$g_l \leq x_l \leq h_l \quad (l=1, \dots, m) \quad (6)$$

ここで、変数 $x_{n+1}, \dots, x_n$ は独立変数 $x_1, \dots, x_n$ の関数、 g_l と h_l は定数または $x_1, \dots, x_n$ の関数である。 n は独立変数の数である。

コンプレックス法では次の手順で関数(5)の最小値を求める。

1) $k \geq n+1$ 個の初期点を設定する。まず、一つの点 x_{k-1} ($i=1, \dots, n$)を与えて、ほかの $k-1$ の点は次式により作成する。

$$x_{kj} = x_{k-1j} + r_{kj}(h_j - g_j) \quad (j=1, \dots, n, j=2, \dots, k) \quad (7)$$

ただし、 r_{kj} は区間 $[-0.5, 0.5]$ 上の一様乱数である。このように得られた k 個の初期点はすべての制約条件(6)を満足しなければならない。陽的な制約条件を満足しない場合、その変数の値を対応している制約のすぐ内側にする。

2) この k 個の点について関数(5)の値を求める。

そして、これらの関数値の最大値 f_n 、最小値 f_n と最大値を持つ点以外の点の重心 $x_{i,c}$ を求める。

3) 関数の最大値を持つ点 $x_{i,n}$ と重心 $x_{i,c}$ を結ぶ直線上で、次の方式で改良点を探索する。

$$x_{i,n}(\text{new}) = x_{i,c} + \alpha [x_{i,c} - x_{i,n}(\text{old})] \quad (i=1, \dots, n) \quad (8)$$

ここで、 α は経験的なパラメータで、1.3がよいとされている。

4) 新しく作成した点 $x_{i,n}(\text{new})$ の関数値を求める。この関数値が関数の最大値 f_n より小さければ、 $x_{i,n}(\text{old})$ を $x_{i,n}(\text{new})$ で置き換えて、2)を実行する。この関数値が関数の最大値 f_n より小さくなくなれば、 α を $\alpha \cdot \beta$ で置き換えて、3)を実行する。

ここで、 β は0.5がよいとされている。

5) 以上の計算を反復して、関数の最小値 f_n が許容値 ε より小さくなると、関数の最小化を終了する。

$$\text{収束判断式: } |f_n| \leq \varepsilon \quad (9)$$

3.2 コンプレックス法による欠陥推定

2章からわかるように、欠陥推定というのは式(4)に示された境界変位残差 R を最小にすることである。従って、コンプレックス法による最小化の目的関数は式(4)で、独立変数は離散化された仮定欠陥の節点座標である。コンプレックス法によって、仮定欠陥の節点座標を移動させ、式(4)を最小にする欠陥が真の欠陥である。

この方法の精度と有効性を検討するために、本研究ではまず次の問題を解析する。問題のモデルは図1に示すような楕円欠陥を持つ正方形板である。材料定数は $G=8077\text{MPa}$ 、 $\nu=0.3$ である。板の長さは 0.2m 、楕円の長径は 0.05m 、短径は 0.02m とする。表面力 $P=10\text{MPa}$ 、ほかの境界条件は図1に示す通りである。

本研究の境界要素解析には二次要素を、表面力の不連続の記述には二重節点を用いる。板の外境界を図1

の丸印で示されるように、8要素20節点に分割し、欠陥の境界を4要素8節点に分割する。

コンプレックス法により欠陥を探索するときの独立変数は欠陥境界の8節点の座標とする。これらの節点座標を極座標 (ρ_i, θ_i) ($i=1, \dots, 8$)で表し、問題を簡単にするために、 θ_i を固定して、独立変数を ρ_i だけにする。欠陥形状の動径 ρ を適宜修正することによって、真の欠陥形状を探索する。

いま、欠陥のおおよその位置は分かっているとして、変数 ρ の制約条件について、下限は楕円欠陥の中にある場合を想定し、上限は予想される欠陥形状を含むように、なるべく大きく取る。上限制約と下限制約は図1の破線で示す。

コンプレックス法の各パラメータを $n=8$ 、 $k=16$ として、計算をMV/20000-IIで行い、時間は約16minがかかった。解析結果を表1に示す。

表1には異なる境界残差に対する内部欠陥の各節点の極座標 ρ_i が示されている。この表から分かるように、コンプレックス法の欠陥形状の下限制約が実際の欠陥形状の中にあるように設定できれば、内部欠陥の形状、位置および寸法は比較的容易に高精度に推定できる。また、コンプレックス法の過剰鏡像(式(8))により、各独立変数 ρ_i は制約領域をスキャンすることができるので、制約領域内で θ_i に対して ρ_i が一意に決まるような欠陥境界であれば推定することができる。

4. 数値解析手順

前述のように、コンプレックス法により高精度に欠陥位置・形状を推定するためには、 ρ の下限制約を真の欠陥の内部に設定する必要がある。これを行う方法として、ブロック分割法およびRosenbrock法¹⁴⁾が考えられる。本研究ではコンプレックス法により推定する前に、まず欠陥位置の予備走査を行い、欠陥の概ねの位置を推定し、その結果を参考にしてコンプレックス

図1 楕円欠陥を持つ正方形板

表1 コンプレックス法による解析結果

Node Number	Exact Solution ρ_i	Numerical Solution ρ		
		$\varepsilon=1.0^{-6}$	$\varepsilon=1.0^{-5}$	$\varepsilon=1.0^{-7}$
1	0.5000	0.4988	0.4994	0.5002
2	0.2626	0.2655	0.2639	0.2626
3	0.2000	0.1919	0.1968	0.1999
4	0.2626	0.2648	0.2638	0.2624
5	0.5000	0.5001	0.4993	0.5003
6	0.2626	0.2591	0.2630	0.2623
7	0.2000	0.2057	0.2009	0.2008
8	0.2626	0.2620	0.2622	0.2621

ス法の制約条件を決めることにする。

真の欠陥形状と同じ形状で、欠陥の位置を構造物内点に対して走査するとき、仮定した欠陥の中心と真の欠陥中心が一致した場合に式(3)の境界残差は最も小さくなる。実際の数値実験から真の欠陥形状を近似している欠陥形状で走査しても同じであることがわかる。

どのような欠陥を仮定して予備走査を行うかを検討するために、次の問題を考える。

問題のモデルは図2に示されている長さが8m×8mの正方形板である。真の欠陥形状は長径0.03m、短径0.025mの楕円で、その位置が図2の6箇所の黒印にある場合に対して、板の中心にある円で欠陥形状を仮定して、境界変位残差を求め比較した。

各位置の真の欠陥に対して、仮定した円形欠陥の半径を変えて、境界変位残差を求めた結果を図3に示す。

図3から分かるように、この解析では、真の欠陥位置と仮定した欠陥位置は全く異なっているにも関わらず、各真の欠陥位置に対して、仮定円形欠陥の半径の変化による境界変位残差の変化傾向はほとんど同じである。また、仮定欠陥の境界が真の欠陥の境界と最も

図2 欠陥位置説明図

図3 仮定欠陥の半径と境界残留誤差の関係

近いとき、変位残差が最も小さい。このように、仮定した欠陥位置が真の欠陥の中心位置と一致しなくても、およそ欠陥の大きさに関する情報を得ることができると考えられる。

以上の考察にしたがって、欠陥形状・位置を推定する手順は次のようにまとめることができる。

① 構造物の中心位置においてある欠陥形状を仮定し、その欠陥の大きさを変えて境界変位残差を求める。そして、境界変位残差を最小にする仮定した欠陥の大きさを求める。予備走査においては、欠陥の大体の位置がわかればよく、仮定欠陥と真の欠陥形状が一致する必要はない。細長くない欠陥に対して、ここでは簡単のため、円と仮定する。

② ①より得られた仮定した欠陥の大きさのデータを用いて、仮定している欠陥の位置を構造物内で移動して、その時の境界変位残差をそれぞれ求める。この境界変位残差の最小点が真の欠陥の中心近傍の点と考えられる。これは欠陥からある程度離れると、欠陥の形状の違いよりも、欠陥の代表寸法と観測点までの距離の比といった量に変位や応力により影響を与えるためと考えられる（いわゆる、サンブナンの定理）。

図4に示すように、内部走査点を選択するには、まず構造物を粗く分割し、少ない分点（黒丸）について

図4 内部走査点の説明図

図5 解析手順説明図

走査した後、境界変位残差の低い部分を細かく分割して(白丸)走査を行う方が効率が良い。

③ ①と②の結果を参考にしてコンプレックス法の上限制約条件と下限制約条件を決め、欠陥形状の推定を行う。

複雑な問題に対してこの方法を適用する際には、③を行う前に、一度②の走査結果から①に戻した方がさらに有効になることが考えられる。また、①と②による走査は欠陥に対する概略の推定であり、欠陥の大体の位置が分かれば良いことを注意されたい。

この解析手順は図5のように示される。

5. 数値解析例

前述の推定方法の有効性を説明するために、以下のいくつかの問題を解析する。ただし、ここでは①による予備走査の際に、仮定欠陥形状は円形としている。

1) 楕円欠陥を持つ正方形板

問題のモデルは図6に示されるような、 $0.2\text{m} \times 0.2\text{m}$ の正方形板の座標 $(0.12\text{m}, 0.12\text{m})$ にある長径 0.03m 、短径 0.025m の楕円欠陥に関する推定である。材料定数および境界要素の分割は図1の問題と同じである。

手順①の走査から図7が得られる。この図から半径

図6 楕円を持つ正方形板

図7 仮定欠陥半径と境界残留誤差の関係

0.03m の円は実際の欠陥形状にもっとも近いことが推定される。次に、この円の半径を用いて②の走査を行う。仮定している欠陥の中心座標を (x, y) とすると、 y を一定として、 x を変えた場合の結果を図8(a)に、 x を一定として、 y を変えた場合の結果を図8(b)に示す。図8から欠陥の中心は点 $(0.12\text{m}, 0.12\text{m})$ にあることが推定できる。つぎに、①と②を参考にして図6に破線で示されるような ρ に関する上限制約と下限制約を決め、コンプレックス法で欠陥形状の精密な推定を行う。計算結果を表2に示す。表2には収束判定で用いている ε が異なる場合の結果が示されているが、この表から、本方法により欠陥形状が精度よく推定されていることがわかる。

(a)

(b)

図8 異なる位置に置ける境界残差

表2 コンプレックス法による解析結果

Node Number	Exact Solution ρ	Numerical Solution ρ		
		$\varepsilon = 1.0^{-6}$	$\varepsilon = 1.0^{-6.5}$	$\varepsilon = 1.0^{-7}$
1	0.3000	0.3029	0.3011	0.3000
2	0.2716	0.2664	0.2697	0.2717
3	0.2500	0.2464	0.2509	0.2504
4	0.2716	0.2697	0.2712	0.2724
5	0.3000	0.3028	0.3004	0.2994
6	0.2716	0.2690	0.2715	0.2723
7	0.2500	0.2520	0.2494	0.2496
8	0.2716	0.2670	0.2694	0.2715

図9 凹角形状欠陥を持つ正方形板

図10 仮定欠陥半径と境界残留誤差の関係

2) 凹角形状の欠陥を持つ正方形板

つぎの問題のモデルは、図9に示されるような0.2m × 0.2mの正方形板にa=0.04m, b=0.017mの凹角形状の欠陥があるものである。

前と同様に、手順①により図10が得られ、この図から半径0.035mの円は実際の欠陥形状と最も近いことが推察される。そして、この円を用いて②の走査を行う。ここで、異なる位置における境界残差の分布傾向は図8(a), (b)と同じで、欠陥の中心は点(0.1m, 0.1m)にあることが推定される。①と②を参考にして図9に破線で示すような円をρの上限制約および下限制約と決め、コンプレックス法で欠陥形状の精密な推定を行う。計算結果を表3に示す。

表3から、本手法によって、凹角形状の欠陥についても高精度に推定できたことが分かる。

以上の推定はMV/20000-IIで行い、すべての計算は15min以内で完了できる。これらのモデルに対する解析結果より本研究で提案した欠陥位置、形状および寸法の推定法は細長くない欠陥（本研究の場合、長軸と

表3 コンプレックス法による解析結果

Node Number	Exact Solution ρ	Numerical Solution ρ		
		$\epsilon = 1.0^{-2}$	$\epsilon = 1.0^{-3}$	$\epsilon = 1.0^{-4}$
1	0.4000	0.4021	0.4033	0.4001
2	0.2998	0.2990	0.2953	0.2992
3	0.1700	0.1662	0.1694	0.1696
4	0.2998	0.2907	0.3024	0.3019
5	0.4000	0.4078	0.3986	0.3985
6	0.2998	0.2887	0.3019	0.3020
7	0.1700	0.1809	0.1719	0.1694
8	0.2998	0.2967	0.2951	0.2993

短軸の比: $1.0 \leq a/b \leq 2.5$) に対して有効であることがわかった。

6. 結 言

本研究ではコンプレックス法を境界要素逆解析に導入することにより、構造物内部にある欠陥の位置と形状の推定方法について検討を行った。本論文に提案した方法では、境界要素法の積分方程式の基礎式を微分する必要がなく、容易に数値的な処理を行え、汎用性のある高次要素を使用することもでき、解析精度は高い。また、コンプレックス法を取り入れることによって、欠陥に対する推定を自動的に行うことができる。いくつかの二次元の細長くない欠陥に関する推定問題の数値解析結果から、本論文に提案されている欠陥推定法の有効性が確認できた。

文 献

- (1) 岡崎・橋本・矢田, 機論, 55-516, A(1989), 1900.
- (2) 大路・ほか4名, 逆問題のコンピュータ手法とその応用シンポジウム論文集, (1989), 19.
- (3) 境界要素法研究会編, 境界要素法の応用, (1987), 183, コロナ社.
- (4) 田中・ほか3名, 機論, 55-514, A(1989), 1445.
- (5) 田中・山際, 機論, 54-501, A(1988), 1054.
- (6) Tanaka, M. and Masuda, Y., (Yagawa, G. and Atluri, S.N. ed.), Proc. Int. Conf. on Comput. Mech., (1986), Springer-Verlag.
- (7) Cerrolaza, M. and Alarcon, E., Int. J. Numer. Methods. Eng., 28(1989), 987.
- (8) 富島・矢田, 逆問題のコンピュータ手法とその応用シンポジウム論文集, (1989), 101.
- (9) Box, M. J., Computer Journal, 8(1965), 42.
- (10) 須永, 機械の研究, 41-8(1989), 867.