境界要素法による軸対称熱弾性解析について*
(間接法による定式化と時間積分に関する考察)石田 良平^{*1}, 落合 芳博^{*2}

BEM Analysis of the Transient Axisymmetric Thermoelastic Problem

Ryohei ISHIDA and Yoshihiro OCHIAI

In this paper, we deal with the boundary element formulation of the transient axisymmetric thermoelastic problem. For the formulation of the problem, we introduce the thermoelastic displacement potential function. Using this function, we indirectly obtain Green's functions of the thermal displacement and thermal stress components and their boundary integral representations. Performing the time integration analytically, the resultant function is separated into two parts: the steady and the transient parts. We observe singularity at the boundary integration only in the steady part.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Computational Mechanics, Thermoelastic Problem, Axisymmetric Problem

1. 緒 言

軸対称非定常熱弾性問題の境界要素法定式化に関連して、著者らは熱弾性変位ポテンシャル関数を導入することによって、領域積分を行うためのセルを用いない定式化を行った⁽¹⁾⁽²⁾。この定式化では、熱弾性変位ポテンシャル関数の基本解を求める際非定常熱伝導問題の基本解を時間積分することによって求めているため、基本解が級数形で表されている。一方、この級数は不完全ガンマ関数を含むため軸対称非定常熱伝導（拡散）問題に対する Wrobel らの定式化^{(3)~(5)}における時間依存の基本解の扱いと同様、その数値計算においては特異点の扱いに注意が必要である。

著者らは軸対称非定常熱伝導問題に関する Wrobel らの方法を検討し時間に関する離散化の際の時間積分を工夫することによって定常項と非定常項とが分離されることを示した。さらに、定常項が従来の軸対称定常ポテンシャル問題の基本解に一致することを明らかにした。そして、比較的簡単にかつ高精度が期待される計算法を提案した⁽⁶⁾。

本報は上に述べた計算法をさらに発展させ軸対称非定常熱弾性問題に適用し、数値計算の上で簡便かつ高精度が期待できる計算法を提案するものである。定式化においては著者らが従来より行ってきた熱弾性変位ポテンシャル関数を導入し、Sharp ら⁽⁷⁾によって行われた定式化を適用する。

著者らの提案する方法によると、基本解の時間に関する積分は熱伝導問題と同様定常項と非定常項が分離された形式で表現され、しかも境界に沿って積分を行う際に経験する特異性を有する項は定常項に限られるため、数値計算上非常に有利であると思われる。

著者らの提案する方法によると、基本解の時間に関する積分は熱伝導問題と同様定常項と非定常項が分離された形式で表現され、しかも境界に沿って積分を行う際に経験する特異性を有する項は定常項に限られるため、数値計算上非常に有利であると思われる。

2. 解 析

2・1 熱弾性変位ポテンシャル いま、領域 Ω 内で温度分布 $\theta(x, t)$ が与えられているとする。初期温度分布が一様であり、温度分布として一様温度分布からの変化を考えることにし、内部熱発生はないものとする。温度関数 $\theta(x, t)$ は次式のように書き表すことができる。

$$\theta(x, t) = \int_0^t \frac{\partial \theta(x, t')}{\partial t'} dt' \dots\dots\dots (1)$$

* 平成元年9月29日 日立地方講演会において講演、原稿受付 平成2年1月16日。

*¹ 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町4丁804)。

*² 正員、大阪府立産業技術総合研究所 (〒550 大阪市西区江之島2-1-53)。

初期条件は

$$t=0 \text{ で } \theta(x, t)=0 \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

温度分布 $\theta(x, t)$ の直接法境界積分表示は次式で与えられる。

$$C(x)\theta(x, t) + x \int_0^t \int_{\Gamma} \theta(\xi, t') q^*(x, t; \xi, t') d\Gamma(\xi) dt' = -x \int_0^t \int_{\Gamma} q(\xi, t') \theta^*(x, t; \xi, t') d\Gamma(\xi) dt' \quad \cdots (3)$$

ただし、 x および ξ で観測点および積分のための変数を代表させる。なお、 $C(x)$ は境界形状に依存する定数、 Γ は領域 Ω の境界、 $\theta^*(x, t; \xi, t')$ は熱伝導 (拡散) 問題の時間依存の基本解、 $q = \partial\theta/\partial n$ 、 $q^* = \partial\theta^*/\partial n$ 、 n は境界上の外向き法線、 x は温度伝導率である。

熱弾性変位ポテンシャル $\phi(x, t)$ の基礎方程式は次式で与えられる⁽⁸⁾。

$$\nabla^2 \phi(x, t) = m\theta(x, t) \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

ここで、 $m = (1+\nu)\alpha/(1-\nu)$ 、 α は線膨張係数、 ν はポアソン比、 ∇^2 はラプラス演算子である。

式(4)の解は関数 $\theta(x, t)$ を領域 Ω 内での体密度と考えると、ポテンシャル論⁽⁹⁾より次式のように得られる。

$$\phi(x, t) = -m \int_{\Omega} \eta(x; \xi) \theta(\xi, t) d\Omega(\xi) \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

ここで、関数 $\eta(x; \xi)$ は定常ポテンシャル問題の基本解である。

式(5)に式(1)および熱伝導方程式

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = x \nabla^2 \theta(x, t) \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

を代入してガウスの発散定理を用いると、次のような関数 $\phi(x, t)$ に関する直接法による境界積分表示が得られる⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & -mx \int_{\Gamma} \eta(x; \xi) \int_0^t q(\xi, t') dt' d\Gamma(\xi) + mx \int_{\Gamma} \frac{\partial \eta(x; \xi)}{\partial n(\xi)} \int_0^t \theta(\xi, t') dt' d\Gamma(\xi) \\ & - mx \int_{\Omega} \int_0^t \theta(\xi, t') dt' \nabla^2 \eta(x; \xi) d\Omega(\xi) \quad \cdots \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

さらに、境界上での関係⁽¹⁰⁾および基本解 $\eta(x; \xi)$ の性質を考慮すると、次のような $\theta(x, t)$ および $\phi(x, t)$ に関する間接法表現が得られる。

$$\theta(x, t) = x \int_{\Gamma} Q(\xi, t') \theta^*(x, t; \xi, t') dt' d\Gamma(\xi) \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

$$\phi(x, t) = -mx \int_{\Gamma} \eta(x; \xi) \int_0^t Q(\xi, t') dt' d\Gamma(\xi) + mx \int_0^t \theta(x, t') dt' \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

ここで、 Q はソースの分布密度関数と呼ばれる。

式(8)および(9)は境界 Γ 上で面密度が $Q(\xi, t)$ およびその時間積分で与えられた場合の一重層分布によるポテンシャルを表している。

式(9)に式(8)を代入し、

$$\phi^*(x, t; \xi, \tau) = x \int_{\Gamma} \theta^*(x, t'; \xi, \tau) dt' - \eta(x; \xi) \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

とおくと、関数 $\phi(x, t)$ の境界積分表現は次のように得られる。

$$\phi(x, t) = mx \int_0^t \int_{\Gamma} Q(\xi, \tau) \phi^*(x, t; \xi, \tau) d\Gamma(\xi) d\tau \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

式(11)で関数 $\phi^*(x, t; \xi, \tau)$ は熱弾性変位ポテンシャル関数の自由空間グリーン関数 (基本解) であると考えることができる。なお、以上の定式化は軸対称問題に限定されない。

軸対称問題の場合の関数 $\phi^*(x, t; \xi, \tau)$ は具体的に次のようにして求めることができる。熱伝導 (拡散) 問題の時間依存の基本解 $\theta^*(x, t'; \xi, \tau)$ および定常ポテンシャル問題の基本解 $\eta(x; \xi)$ はそれぞれ次式で与えられる⁽³⁾⁻⁽⁵⁾。

$$\theta^* = \frac{2\pi}{(4\pi x \tau')^{3/2}} \exp\left(-\frac{s}{4x\tau'}\right) I_0\left(\frac{e}{2x\tau'}\right) \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

$$\eta = \frac{1}{\pi(s+2e)^{1/2}} K(k), \quad k = [4c/(1+2c)]^{1/2} \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

ここで、 $I_0(\quad)$ は零次の第一種変形ベッセル関数、 $K(\quad)$ は第一種完全だ円積分であり、 $\tau' = t' - \tau$ 、 $s = r^2(x) + r_0^2(\xi) + \{z(x) - z_0(\xi)\}^2$ 、 $e = r(x)r_0(\xi)$ 、 $c = e/s$ である。

式(10)に式(12)および式(13)を代入して演算を行うと、関数 $\phi^*(x, t; \xi, \tau)$ は次式のように得られる。

$$\phi^* = -\frac{1}{2[4\pi\chi(t-\tau)]^{1/2}} \int_0^1 w^{-1/2} \exp(-pw) I_0(qw) dw \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで, $p=s/[4\chi(t-\tau)]$, $q=2cp$ である。

以上で熱弾性変位ポテンシャルの境界積分表現およびそのグリーン関数が得られた。なお、軸対称問題の場合、式(11)の境界積分は母線の長さを S とすると、 $d\Gamma(\xi)=r_0(\xi)dS(\xi)$ で表される。

2・2 変位および応力成分 さて、前節において熱弾性変位ポテンシャル関数 $\phi(x, t)$ の間接法による境界積分表現が得られた。このとき関数 $\phi(x, t)$ による変位成分および応力成分は次式から求めることができる。

$$u_r = \partial\phi/\partial r, u_z = \partial\phi/\partial z \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$\sigma_{rr} = 2G(\partial^2\phi/\partial r^2 - \nabla^2\phi), \sigma_{\theta\theta} = 2G(r^{-1}\partial\phi/\partial r - \nabla^2\phi), \sigma_{zz} = 2G(\partial^2\phi/\partial z^2 - \nabla^2\phi), \sigma_{rz} = 2G\partial^2\phi/\partial r\partial z \quad \cdots \cdots (16)$$

ここで、 G は横弾性係数である。式(10)を式(15)および(16)に代入すれば変位および応力成分が得られる。これらをまとめて表示すると、次式が得られる。

$$u_i(x, t) = m\chi \int_0^t \int_r Q(\xi, \tau) u_i^*(x, t; \xi, \tau) d\Gamma(\xi) d\tau, i=r, z \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

$$\sigma_{ij}(x, t) = m\chi \int_0^t \int_r Q(\xi, \tau) \sigma_{ij}^*(x, t; \xi, \tau) d\Gamma(\xi) d\tau, ij=rr, \theta\theta, zz, rz \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

ここで、 u_i^* および σ_{ij}^* は式(15)および(16)で ϕ を ϕ^* で置き換えたものであり、これらは熱変位および熱応力成分のグリーン関数に相当する。これらのうち、熱変位に関するグリーン関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^* &= \frac{1}{\pi^{1/2}[4\chi(t-\tau)]^{3/2}} \int_0^1 w^{1/2} \exp(-pw) [rI_0(qw) - r_0I_1(qw)] dw \\ u_z^* &= \frac{(z-z_0)}{\pi^{1/2}[4\chi(t-\tau)]^{3/2}} \int_0^1 w^{1/2} \exp(-pw) I_0(qw) dw \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

熱応力成分に関するグリーン関数も同様に求めることができるが、詳細は省略する。

2・3 時間に関する離散化 ここでは、前節までで得られた変位成分などの境界積分表示式(11)、(17)および(18)の時間積分を解析的に行い時間に関して離散化された表現を得る。ただし、変位および応力成分のグリーン関数による表現[式(17)および(18)]を時間に関して離散化するのは計算が少し複雑になるため、ここでは熱弾性変位ポテンシャル関数の境界積分表示式(11)を時間に関して離散化した後、微分演算を行って変位および応力成分の離散化された表示式を得ることにする。

さて、式(11)を時間に関して離散化する。時間間隔 $(0, t)$ を F 個のステップに分割する。ステップ幅はすべて等しいとしてこれを Δt とする。いま第 F ステップ $t=F\Delta t$ での関数 $\phi(x, t)$ の値が未知であるとする。煩雑さを避けるために $F\Delta t=t_F$, $f\Delta t=t_f$ などと表す。

すでに温度分布が得られているものとする。 $t=t_F$ までのソースの分布密度 $Q(x, t)$ はすべて既知であるから $\phi(x, t_F)$ を計算することができる。簡単のために、温度分布が一定時間内挿(時間ステップ内で関数値が一定)によって求められているものとする。各時間ステップ内で面密度 Q も一定であるから、次式のような時間に関して離散化された表示が得られる。

$$\phi(x, t_F) = m\chi \sum_{f=1}^F \int_r Q(\xi, t_f) \Delta\phi^*(x, t_F; \xi, t_f) d\Gamma(\xi) \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

ここで、

$$\Delta\phi^*(x, t_F; \xi, t_f) = \int_{t_{f-1}}^{t_f} \phi^*(x, t_F; \xi, \tau) d\tau \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

式(21)の時間に関する積分は次のように評価できる。 $f=F$ として、

$$\begin{aligned} \Delta\phi^*(x, t_F; \xi, t_F) &= \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi^*(x, t_F; \xi, \tau) d\tau = -\frac{(t_F - t_{F-1})^{1/2}}{4(\chi\pi)^{1/2}} \int_0^1 w^{-1/2} \exp(-pw) I_0(qw) dw \\ &\quad + \frac{(t_F - t_{F-1})^{1/2}}{4(\chi\pi)^{1/2}} \int_0^1 w^{-3/2} \exp(-pw) I_0(qw) dw - \frac{S^{1/2}}{8\chi\pi^{1/2}} \int_0^\infty y^{-3/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy \quad \cdots \cdots \cdots (22) \end{aligned}$$

ここで、 $p=s/[4\chi(t_F - t_{F-1})]$, $y=s/[4\chi(t_F - \tau)]$ である。

式(22)の最後の積分は時間に依存しないことがわかる。この最後の積分を定常項と呼び、そのほかの積分を非定常項と呼ぶことにする。

式(22)の定常項は変形ベッセル関数 $I_0(\quad)$ を Kummer の合流形超幾何級数⁽¹¹⁾で展開して項別積分を行い少し演算(付録参照)すると次式のような形に変形できる。

$$\int_0^\infty y^{-3/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy = -4\pi^{-1/2} (1+2c)^{1/2} E(k) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $E(\quad)$ は第二種完全だ円積分である。

以上のことから、

$$\begin{aligned} \Delta\phi^*(x, t_F; \xi, t_F) = & \frac{(s+2e)^{1/2}}{2\pi} E(k) - \frac{(t_F - t_{F-1})^{1/2}}{4(\pi\epsilon)^{1/2}} \int_0^1 w^{-1/2} \exp(-pw) I_0(qw) dw \\ & + \frac{(t_F - t_{F-1})^{1/2}}{4(\pi\epsilon)^{1/2}} \int_0^1 w^{-3/2} \exp(-pw) I_0(qw) dw \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

が得られる。式(24)で第1項は重調和関数であり、内部熱発生のない定常温度場に対する熱弾性変位ポテンシャル関数の基本解に相当する。

$f \neq F$ の場合、式(21)の積分は次のように評価することができる。

$$\int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi^* dt = \int_{t_{F-1}}^{t_F} \phi^* dt - \int_{t_F}^{t_F} \phi^* dt = \text{式(24)} \Big|_{t_{F-1} \rightarrow t_{F-1}} - \text{式(24)} \Big|_{t_{F-1} \rightarrow t_F} \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(25)から $f \neq F$ の場合は定常項が相殺し、非定常項のみが残ることがわかる。

式(24)の非定常項は定常項と同様に合流形超幾何級数を用いて展開することによって級数表示も可能であるが、定積分形で表しておくほうが微分演算などの際に便利である。

式(17)および(18)も時間について離散化すると次式のように表すことができる。

$$u_i(x, t_F) = mx \sum_{j=1}^F \int_{\Gamma} Q(\xi, t_j) \Delta u_i^*(x, t_F; \xi, t_j) d\Gamma(\xi), \quad i=r, z \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\sigma_{ij}(x, t_F) = mx \sum_{j=1}^F \int_{\Gamma} Q(\xi, t_j) \Delta \sigma_{ij}^*(x, t_F; \xi, t_j) d\Gamma(\xi), \quad ij=rr, \theta\theta, zz, rz \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 Δu_i^* および $\Delta \sigma_{ij}^*$ は式(15)および(16)で ϕ を $\Delta\phi^*$ で置き換えることによって得られるが、詳細は省略する。

2.4 境界積分 さて、境界積分について簡単に考察しておくことにする。熱弾性変位ポテンシャル関数の数値は直接必要としないのでこの関数の境界積分表示式(11)を離散化する必要はない。そこで、式(26)および(27)に含まれる関数 Δu_i^* および $\Delta \sigma_{ij}^*$ の境界積分の離散化について考える。すでに述べたように関数 $\Delta\phi^*(x, t_F; \xi, t_F)$ には定常項を含む。その関数の空間変数による微分で与えられる関数 $\Delta u_i^*(x, t_F; \xi, t_F)$ などには定常項を含む。例えば、 $\Delta u_r^*(x, t_F; \xi, t_F)$ に含まれる定常項は次のような形である。

$$2\pi\epsilon \Delta u_r^*(x, t_F; \xi, t_F) = \frac{r+r_0}{(s+2e)^{1/2}} K(k) - \frac{1}{2r}(s+2e)^{1/2} [K(k) - E(k)] + (\text{Transient Term}) \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 $K(k)$ は第一種完全だ円積分である。

式(28)に含まれる完全だ円積分の引数 k は $(r_0, z_0) \rightarrow (r, z)$ のとき $k \rightarrow 1$ となり、 $K(\quad)$ は対数発散する。したがって、一般に境界積分の際には特異積分になるため関数 $K(\quad)$ の対数項を孤立させて解析的に積分を行うか、対数ガウス積分を用いてこの積分を評価する。しかし、式(28)で関数 $K(\quad)$ の項について考

えると次のことがわかる。いま、図1に示すような要素上での境界積分を考える。このとき、 $\xi=0$ 近傍で

$$\begin{aligned} & \left[\frac{r+r_0}{(s+2e)^{1/2}} - \frac{1}{2r}(s+2e)^{1/2} \right] K(k) \\ & = -\frac{4rL\xi \sin(\alpha) - L^2\xi^2}{8r(s+2e)^{1/2}} \ln \left[\frac{L\xi}{2(s+2e)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

となる。 $\xi \rightarrow 0$ のとき、 $\xi \ln \xi \rightarrow 0$ であるから上式の値は零になる。したがって、特異積分にはならないことがわかる。このことは $\Delta u_z^*(x, t_F; \xi, t_F)$ についても同様である。

一方、 $\Delta \sigma_{ij}^*(x, t_F; \xi, t_F)$ に含まれる定常項には特異性が存在するが、このときの積分はすでに述べたような方法で評価することができる。

非定常項にはこのような特異性はなく境界積分においては通常の高ス積分を用いることができる。また、非定常項には式(24)の第2および第3項のような積分が含まれるが、これらの積分は容易に数値計算できるが、応用に便利のように計算の際に必要な積分関係式

図1 境界積分

についてまとめておく。 $i=0, 1$ として、 $q \neq 0$ の場合、

$$F_{1i} = \int_0^1 w^{3/2} \exp(-pw) I_i(qw) dw \quad \cdots \cdots (29)$$

とすると、

$$\begin{aligned} F_{20} &= \int_0^1 w^{1/2} \exp(-pw) I_0(qw) dw \\ &= (2/3) [\exp(-p) I_0(q) + p F_{10} - q F_{11}] \\ F_{21} &= \int_0^1 w^{1/2} \exp(-pw) I_1(qw) dw \\ &= 2 [\exp(-p) I_0(q) + p F_{11} - q F_{20}] \\ F_{30} &= \int_0^1 w^{-1/2} \exp(-pw) I_0(qw) dw \\ &= 2 [\exp(-p) I_0(q) + p F_{20} - q F_{21}] \\ F_{31} &= \int_0^1 w^{-1/2} \exp(-pw) I_1(qw) dw \\ &= 2 [\exp(-p) I_1(q) + p F_{21} - q F_{30}] \quad \cdots \cdots (30) \end{aligned}$$

これらの関係式からわかるように $F_{1i} (i=0, 1)$ のみ数値積分を行えばそのほかの積分については容易に計算できる。 F_{1i} の計算は次のようにして行うことができる。式(29)を書き直すと、

$$F_{1i} = q^{-1/2} \int_0^1 \exp[-(p-q)w] \times [(qw)^{1/2} \exp(-qw) I_i(qw)] w dw \quad \cdots \cdots (29)'$$

上式の [] 内の関数の計算には漸近展開⁽¹¹⁾を用いることができる。

2.5 境界条件の取扱い 最後に、力学的境界条件の取扱いについて簡単に述べる。一般に熱弾性変位ポテンシャル関数によって求められた変位成分や応力成分などの諸量は力学的境界条件に無関係に得られるため、等温弾性問題の解を重ね合わせることによって規定された境界条件を満足するようにする。

例えば、熱弾性変位ポテンシャル関数によって求められた諸量に添字 t を、境界上で規定された諸量に添字 0 を、等温弾性問題によって得られる諸量に添字 e をそれぞれつけて表すことにすると、重ね合わせによって、変位および表面力は

$$u_i = u_{it} + u_{ie}, \quad p_i = p_{it} + p_{ie}, \quad i = r, z \quad \cdots \cdots (31)$$

境界上で、

$$u_i = u_{i0} \text{ または } p_i = p_{i0} \quad \cdots \cdots (32)$$

であるから、等温弾性問題に対する境界条件式は

$$u_{ie} = u_{i0} - u_{it} \text{ または } p_{ie} = p_{i0} - p_{it} \quad \cdots \cdots (33)$$

となる。最終的な解は式(33)によって決められた u_{ie} および p_{ie} と u_{it} および p_{it} を用いて式(31)によって得られる。

3. 数値計算例

以上の定式化によって得られた結果に基づいて簡単な数値計算を実行した。計算例として局部加熱をうけるだ円形断面を持つ円環体の非定常熱応力を計算した。円環体は最初一様な基準温度に保たれていたものとし、初期応力もないものとする。だ円の長径および短径を 20 mm および 10 mm とし、だ円の中心と回転中心との距離を 15 mm とした。幾何学的形状および要素分割例を図 2 に示す。なお、計算に用いた物性値は次のとおりである。

$$\alpha = 94.44 [\text{mm}^2/\text{s}], \quad \alpha = 2.3 \times 10^{-5} [^\circ\text{C}^{-1}]$$

$$\nu = 0.33, \quad G = 25.94 [\text{GPa}]$$

境界条件は次のように設定した。

熱的条件

$$\text{境界上で } \partial\theta/\partial n + H(\theta - \theta_0) = 0$$

力学的条件

$$\text{境界上で } p_r = 0, \quad p_z = 0$$

ここで、 θ_0 は基準温度からの温度変化、 H は熱伝達率と熱伝導率との比を表す。なお、加熱される要素は図 2 で●を用いて表し、 $\theta_0 = 50^\circ\text{C}$ とする。そのほかの要素(○で表す)は基準温度の周囲媒体に放熱されるものとする。また、 $H = 0.1$ とした。

計算に際しては、時間分割数を 5 として等分割した。境界要素として一定要素を用いた。また、式(29)の計算には二重指数関数形積分公式を用い、境界積分は特異積分においては対数ガウス積分公式(8点)、それ以外の積分ではガウスの積分公式(8点)を用いた。

図 3 に境界上での温度変化を、図 4 および図 5 に変位を、図 6 および図 7 に境界上の周応力の変化を示す。

図 2 だ円断面をもつ円環体

図 3 円環体表面の温度分布

図 4 円環体の変形 ($t=0.1, 0.25$ s) 図 6 円環体の周応力分布 ($t=0.1, 0.25$ s) 図 5 円環体の変形 ($t=0.5$ s, $t=\infty$) 図 7 円環体の周応力分布 ($t=0.5$ s, $t=\infty$)

4. 結 言

本論文では、軸対称熱伝導問題で著者らが提案した方法を軸対称熱弾性問題の境界要素法解析において従来から著者らが行ってきた熱弾性変位ポテンシャルを用いる解析法に拡張した。その結果、

(1) 軸対称熱弾性変位ポテンシャルのグリーン関数が得られた。同時に熱変位および熱応力成分に関するグリーン関数による表示が得られた。

(2) 時間に関する積分を一定時間内挿を用いて行った結果、熱伝導問題同様定常項と非定常項が分離された形で表すことができた。

(3) 定常項は重調和関数であり、この項は内部熱発生のない定常温度分布（ラプラスの方程式を満足する）に対する熱弾性変位ポテンシャル関数になっている。

(4) 定常項から得られる変位および応力成分において境界積分が特異積分になるのは応力成分に関する積分のみであるが、この積分は容易に評価できる。

(5) 非定常項の境界積分においては熱伝導問題同様特異積分にはならず、通常のガウスの積分公式で計算できる。

付録 式(23)の導出について

第一種変形ベッセル関数の合流形超幾何級数 $M(,,)$ による表現

$$I_0(x) = \exp(-x) M(1/2, 1, 2x) \dots\dots\dots (34)$$

ただし、 $M(,,)$ は

$$M(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)x^n}{\Gamma(b+n)n!} \dots\dots\dots (35)$$

式(22)の最後の積分は式(34)および(35)を用いて展開し、項別積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} y^{-3/2} \exp(-y) I_0(2cy) dy \\ &= \frac{(1+2c)^{1/2}}{\pi^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1+n)n!} \left(\frac{4c}{1+2c} \right)^n \\ & \times \int_0^{\infty} y^{n-3/2} \exp(-y) dy \\ &= \frac{(1+2c)^{1/2}}{\pi^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(1+n)n!} \\ & \times \left(\frac{4c}{1+2c} \right)^n = -2\pi^{1/2}(1+2c)^{1/2} \\ & \times {}_2F_1(1/2, -1/2; 1; 4c/(1+2c)) \\ &= -4\pi^{-1/2}(1+2c)^{1/2} E(k) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

式(23)が得られた。

以上の導出で用いた関係式

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} y^{n-3/2} \exp(-y) dy = \Gamma(n-1/2) \\ & {}_2F_1(a, b; c; x) : \text{ガウスの超幾何級数} \\ & E(k) = \int_0^{\pi/2} (1-k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \\ &= (\pi/2) {}_2F_1(1/2, -1/2; 1; k^2) \\ & : \text{第二種完全だ円積分} \end{aligned}$$

文 献

- (1) 石田・落合, 境界要素法による軸対称体の非定常熱応力,

- 境界要素法論文集, 5(1988), 57-62.
- (2) 落合・石田, 軸対称非定常熱応力問題の数値解析のための定式化, 機論, 55-517, A(1988), 2009-2013.
- (3) Wrobel, L. C., Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method, *Ph. D. Thesis*, (1981), 198-209, Southampton University.
- (4) Wrobel, L. C. and Brebbia, C. A., A Formulation of The Boundary Element Method for Axisymmetric Transient Heat Conduction, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 25-5(1981), 843-850.
- (5) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., *Boundary Element Techniques*, (1984), 165-171, Springer; 田中訳, 境界要素解析—理論と応用, (1984), 168-174, 丸善.
- (6) 石田・落合, 軸対称非定常熱伝導問題の境界要素法定式化について, 機論, 55-519, B(1989), 3493-3498.
- (7) Sharp, S. and Crouch, S. L., Boundary Integral Methods for Thermoelasticity Problems, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 53-2(1986), 298-302.
- (8) 例えば, 竹内, 熱応力, (1971), 42-45, 日新出版.
- (9) Kellogg, O. D., *Foundation of Potential Theory*, (1967), 150-156 Springer.
- (10) 結城・木須, 境界要素法による弾性解析, (1986), 1-16, 培風館.
- (11) Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 編, *Handbook of Mathematical Functions*, (1972), 355-433, Dover.
-