弾性解析のための適応境界要素*

川 口 健^{*1}, 神 谷 紀 生^{*2}

Adaptive boundary element for elastic analysis

Ken KAWAGUCHI and Norio KAMIYA

Adaptive boundary mesh generation based on an error analysis scheme called "sample point error analysis" developed previously for the potential problem is extended and applied to the two-dimensional static elastic analysis. The errors of each element are determined as the modification to hold the boundary integral equation on points other than the initial nodes, which are referred to as sample points. Boundary element refinement, h-version in this study, is performed with the aid of the extended error indicator defined by the above-mentioned errors multiplied by the corresponding fundamental solutions. Two-dimensional simple problems are analyzed to validate the utility of the proposed method.

Key Words: Boundary Element Method, Error Analysis, Collocation Method, Elastic Analysis

1. は じ め に

適応境界要素の構成に関する研究は, Alarcon⁽¹⁾⁽²⁾, Rencis⁽³⁾⁽⁴⁾および Rank⁽⁵⁾によるものが知られているが, それとは別の考えに基づいて代表点誤差解析と名づけた著者らの方法を前報⁽⁶⁾において提案した. 本報では, 前報のポテンシャル問題(境界節点における変数の自由度1)について考えた方法を, 節点における変数の自由度が2となる二次元弾性解析に拡張応用する. 直接法に基づく境界要素法では, 境界の変位と表面力の二つの成分に関する積分方程式が, 境界上の選点で成り立つと考えて, 境界要素による離散化を行い代数方程式を構成する. そこで代表点誤差解析は, 上記の選点以外では厳密に成り立たない積分方程式を, 代表点とよぶ別の選点上で成り立たせるように考え, 初期選点から得られた近以解に対して加えるべき修正量を各要素上での誤差とみなし, それを基にして要素の分割(要素の細分化)を行うものである.

2. 弾性解析のための代表点誤差解析

解析の対象となる弾性体の二次元領域を Ω , その境界を Γ とする. このとき, 物体力が作用しない二次元弾性解析における境界積分方程式は次のように与えられる.

$$c_{kl}(p_i)u_l(p_i) = \int_{\Gamma} [u_{kl}^*(p_i, p_j)t_l(p_j) - t_{kl}^*(p_i, p_j)u_l(p_j)]d\Gamma(p_j) \cdots \cdots (1)$$

(l について 1, 2 の範囲で総和をとる)

ここで, u_l, t_l は変位および表面力の成分, $c_{kl}(p_i)$ はソース点 p_i の位置により定まる定数であり

$$c_{kl} = \begin{cases} \delta_{kl} & (p_i \in \Omega) \\ \frac{\delta_{kl}}{2} & (p_i \in \Gamma \text{ 滑らかな境界において}) \\ 0 & (p_i \in \Omega) \end{cases}$$

さらに, u_{kl}^* および t_{kl}^* は基本解であり, いわゆる Kelvin 解として知られている.

境界上にとったソース点 p_i について式(1)を境界要素によって離散化する. 境界要素上で変位と表面力を低次の内挿関数によって近以し, 境界節点について(1)を考えると, 連立代数方程式が構成される. このように, 境界要素法は境界上の特定の選点で境界積分方

* 原稿受付 平成2年3月22日.

*¹ 学生員, 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464 名古屋市千種区不老町1).

*² 正員, 名古屋大学工学部.

程式が成り立つとみなして解析を行う方であり、この点に注目して以下のように誤差の推定および評価法を考える。

2・1 基礎理論 式(1)を基にして、初期選点列 p_i から次の積分方程式を満たすような近以関数 $\bar{u}_k$, $\bar{t}_k$ を得たとする。

$$c_{ki}(p_i)\bar{u}_i(p_i) = \int_{\Gamma} [u_{ki}^* \bar{t}_i - t_{ki}^* \bar{u}_i] d\Gamma(p_j) \cdots (2)$$

ここで、ソース点を初期選点 p_i 以外の代表点 p'_i にとれば上式の等号は成立せず、

$$c_{ki}\bar{u}_i(p'_i) \neq \int_{\Gamma} [u_{ki}^* \bar{t}_i - t_{ki}^* \bar{u}_i] d\Gamma \cdots (3)$$

となる。そこでこの等号を成立させるために、変位および表面力の修正量として e_{uk}, e_{tk} を加えて等式を成り立たせることを考える。この時、境界条件として与えられている変数については修正を加えず、未知数となっているもののみに修正を加えるものとする。すなわち、

$$\begin{aligned} e_{uk} &= 0 \quad (\in \Gamma_{uk}: \text{変位成分 } u_k \text{ 指定}) \\ e_{tk} &= 0 \quad (\in \Gamma_{tk}: \text{表面力成分 } t_k \text{ 指定}) \end{aligned} \cdots (4)$$

とする。代表点が Γ_{tk} に存在する時について式(4)に修正量を加え等式を成立させると、

$$c_{ki}(p'_i)\{\bar{u}_i(p'_i) + e_{ui}(p_i)\} = \int_{\Gamma} [u_{ki}^* (\bar{t}_i + e_{ti}) - t_{ki}^* (\bar{u}_i + e_{ui})] d\Gamma \cdots (5)$$

となる。近以解から得られる $c_{ki}u'_k(p'_i)$ を次のように定義する。

$$c_{ki}(p'_i)u'_i(p'_i) \equiv \int_{\Gamma} [u_{ki}^* \bar{t}_i - t_{ki}^* \bar{u}_i] d\Gamma \cdots (6)$$

さらに p'_i における解の k 方向の不整合量を示す $r_k(p'_i)$ を定義すれば、 p'_i が k 方向の表面力指定境界上にある場合次式のようになる。

$$\begin{aligned} \underline{p'_i \in \Gamma_{tk}} \\ r_k(p'_i) &\equiv c_{ki}(p'_i)\{\bar{u}_i(p'_i) - u'_i(p'_i)\} \\ &= \int_{\Gamma} u_{ki}^* e_{ui} d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ki}^* e_{ui} d\Gamma - c_{ki}e_{ui}(p'_i) \end{aligned} \cdots (7)$$

また、 p'_i が k 方向の変位指定境界上にある場合も同様に、

$$\begin{aligned} \underline{p'_i \in \Gamma_{uk}} \\ r_k(p'_i) &\equiv c_{ki}(p'_i)\{\bar{u}_i(p'_i) - u'_i(p'_i)\} \\ &= \int_{\Gamma} u_{ki}^* e_{ui} d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ki}^* e_{ui} d\Gamma \end{aligned} \cdots (8)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ は境界条件によって指定された値である。

2・2 離散定式化 式(7)、(8)で得られた関係式を基に誤差解析を行う。各要素上において、 k 方向の変位および表面力の誤差を要素座標 ξ によって次

のようにモデル化する。要素 j について

$$\begin{aligned} e_{uk} &= e_{uk[j]} \Psi(\xi) \\ e_{tk} &= e_{tk[j]} \Psi(\xi) \end{aligned} \cdots (9)$$

$$\Psi = \begin{cases} 1 + \xi & (-1 \leq \xi \leq 0) \\ 1 - \xi & (0 < \xi \leq 1) \end{cases} \cdots (10)$$

ここで、 $e_{uk[j]}, e_{tk[j]}$ は定数であることに注意する。

代表点を $\xi=0$ となる点(線形要素の場合の要素中点)にとり、式(9)を式(7)、(8)に代入して積分方程式の離散化を行えば(図1)、

$$\begin{aligned} \underline{p'_i \in \Gamma_{tk}} \\ r_k(p'_i) &= \sum_j^{n_{ul}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* \Psi e_{ul[j]} d\Gamma - \sum_j^{n_{ul}} \delta_{ij} c_{ki} e_{ul[j]} \\ &\quad - \sum_j^{n_{ul}} \int_{\Gamma} t_{ki}^* \Psi e_{ul[j]} d\Gamma \end{aligned} \cdots (11)$$

$$r_k(p'_i) \equiv c_{ki}(p'_i)\{\bar{u}_i(p'_i) - u'_i(p'_i)\} \cdots (12)$$

$$\begin{aligned} \underline{p'_i \in \Gamma_{uk}} \\ r_k(p'_i) &= \sum_j^{n_{ul}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* \Psi e_{ul[j]} d\Gamma - \sum_j^{n_{ul}} \int_{\Gamma} t_{ki}^* \Psi e_{ul[j]} d\Gamma \end{aligned} \cdots (13)$$

$$r_k(p'_i) \equiv c_{ki}(p'_i)\{\bar{u}_i(p'_i) - u'_i(p'_i)\} \cdots (14)$$

ただし、 l 方向の変位、表面力指定境界の個数を n_{ul} , n_{tl} を用いて表し、 j はそれぞれの境界条件上にある

図1 各要素上における誤差と不整合量

要素の番号を示すものである。すなわち、 $j \in i (i=1, \dots, n)$ であり、 $n=n_{ul}+n_{ll}$ となる。

式(11)、(13)をマトリックスの形式で書くと次のようになる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式に現れるマトリックスの部分マトリックスは、 i 要素上で定義されて次のような形になる。左辺の $\mathbf{r}$ は $n \times 2$ 個の成分を持つ列ベクトルで、

$$\mathbf{r}_i = \begin{Bmatrix} r_{x[i]} \\ r_{y[i]} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。右辺の $\mathbf{e}$ は境界条件が指定されている変位、表面力成分については修正量が零とみなしているの

$$\mathbf{e}_i = \begin{Bmatrix} e_{ux[i]} \text{ OR } e_{tx[i]} \\ e_{uy[i]} \text{ OR } e_{ty[i]} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$\mathbf{A}_{ij}$ の成分は、誤差の成分に対応する基本解と、内そう関数 Ψ を掛け合わせたものを各要素上で積分したものである。

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{xx[i,j]} & a_{xy[i,j]} \\ a_{yx[i,j]} & a_{yy[i,j]} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

例えば、 x 方向が表面力指定で y 方向が変位指定である j 要素上では、 e_{ux}, e_{ty} が存在することになり、部分マトリックス $\mathbf{A}_{ij}$ は次のようになる。

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} -\int_{\Gamma_j} t_{xx}^* \Psi d\Gamma + \delta_{ij} c_{11} \int_{\Gamma_j} u_{xx}^* \Psi d\Gamma \\ -\int_{\Gamma_j} t_{yx}^* \Psi d\Gamma + \delta_{ij} c_{21} \int_{\Gamma_j} u_{yx}^* \Psi d\Gamma \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

このマトリックスを構成するのは一見複雑に見えるが、境界要素解析において係数マトリックスを構成した時、境界条件によって未知数と既知数を振り分け、連立方程式を構成したのと同様の操作をすればよい。

こうしてマトリックスを構成し、各代表点で計算される $\mathbf{r}$ を用いて次の連立方程式を解くことによって未知数となっている修正量 $\mathbf{e}$ が求められる**1。

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \quad \dots\dots\dots (20)$$

3. 誤差評価とメッシュ細分割

代表点誤差解析によって得られた誤差は各要素上では2種類、また、全体としては4種類の成分を持ち、さらに変位あるいは表面力の次元であることに注意する。これらを統一して扱うために、 r_k を計算した点をソース点とし、各要素上における対応する基本解と誤差を掛け合わせたもの(拡張誤差表示式)により誤差を

表現する。この結果、誤差は x, y 方向の変位の次元を持つことになり、二乗ノルムをとって各要素上での誤差表示式とする。各要素上の誤差表示式と要素全体の誤差と比較することにより、再分割する要素を決定する。

3・1 誤差表示式と誤差評価式

式(20)から得られる j 要素上の誤差は、次の4成分のうち2成分である。

$$e_{ux[j]}, e_{uy[j]}, e_{tx[j]}, e_{ty[j]} \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(15)に現れる、第 i 行の部分マトリックスの k 方向成分について、次式が成り立っている。

$$r_{k[i]} = \sum_{j=1}^n (a_{kx[i,j]} e_{x[j]} + a_{ky[i,j]} e_{y[j]}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $e_{x[j]}, e_{y[j]}$ はそれぞれ、 j 要素における x, y 方向の誤差成分を表す定数である。右辺の括弧内の成分を

$$\eta_{k[i,j]} \equiv a_{kx[i,j]} e_{x[j]} + a_{ky[i,j]} e_{y[j]} \quad \dots\dots\dots (23)$$

と表示することにすれば、式(22)は次のように記述できる。

$$r_{k[i]} = \sum_{j=1}^n \eta_{k[i,j]} \quad \dots\dots\dots (24)$$

さらに η_k に対して絶対値を用いたノルム、

$$\|\eta_{k[i,j]}\| \equiv |a_{kx[i,j]} e_{x[j]}| + |a_{ky[i,j]} e_{y[j]}| \quad \dots\dots\dots (25)$$

を定義し、 x, y 成分を評価するために、 $\|\eta_{k[i,j]}\|$ の二乗ノルム

$$\|\eta_{[i,j]}\|^2 = \|\eta_{x[i,j]}\|^2 + \|\eta_{y[i,j]}\|^2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

を定義して拡張された誤差表示式(Extended error indicator)とする。また、不整合量 $r_{k[i]}$ についても二乗ノルムをとり、

$$\|\mathbf{r}_{[i]}\|^2 = r_{x[i]}^2 + r_{y[i]}^2 \quad \dots\dots\dots (27)$$

のように表現する。 $\|\eta_{[i,j]}\|^2$ の大きさを知るために、平

図 2 解析例題 1

**1 前報では、 e_u の決定に簡易法を用いた。

図3 解析例題1

均値を調べて、

$$\|\eta_{(i,j)}\|^2_{\text{ave}} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \|\eta_{(i,j)}\|^2 \quad (28)$$

これにより、現在の要素上における誤差の大きさの程度を知ることができる。

3.2 メッシュ細分割手法 式(26), (28)を基にしてメッシュ分割を行うことを考える。拡張誤差表示式で示される誤差の大きな要素を分割する目的で、

$$\|\eta_{(i,j)}\|^2 \geq \|\eta_{(i,j)}\|^2_{\text{ave}} \quad (29)$$

となる j 要素を分割する方法が考えられるが、解の収束が遅い場合がある。そこで、 k ステップの誤差から $k+1$ ステップの $\|\eta_{(i,j)}^{k+1}\|^2$ を予測しながら分割を行う方法も考えられる。式(29)により要素分割を行い、指標の m で示される要素が分割されないで残ったならば、

$$\|\eta_{(i,j)}^{k+1}\|^2 \leq \sum_m \|\eta_{(i,m)}^k\|^2 \quad (30)$$

という推定不整合量が求められる。この予測式から、

$$\|\eta_{(i,j)}^{k+1}\|^2 \leq \|\eta_{(i,j)}^k\|^2 \quad (31)$$

となることかが期待できるが、次のステップの推定不整合量が明らかに大きな場合は、さらに分割を進めるべきである。すなわち、十分小さな正数 ε について次の不等式

$$\|\eta_{(i,j)}^{k+1}\|^2 \leq \varepsilon, (i=1, \dots, n) \quad (32)$$

を成立させるためにさらに分割を進める。このとき、どの要素を分割すれば最も効率よく不整合量を減少させることができるのか、という問題がでてくる。例えば、式(32)を達成するために、分割基準(添字 ref)を平均値(添字 ave)より小さな値をとり、

$$\|\eta\|^2_{\text{ref}} < \|\eta_{(i,j)}\|^2_{\text{ave}}$$

これに基づいて

図 4 均等分割の結果

$$\|\eta_{(i,j)}\|^2 \geq \|\eta\|^2_{\text{ref}} \quad (33)$$

となるように分割する要素を決定することができる。この分割基準は得られた数値解の代表的な値から決定してもよいし、 $\|\eta\|^2$ の予測値を求めながら基準値を徐々に下げていくのも良いであろう。後者を用いたほうが、分割数がむやみに増えたりする現象は起こりにくい。

この研究では、解の収束判定に $\|\eta\|^2$ を用いているが、例えば x, y 方向それぞれについて、数値解から力の釣合いを計算した、

$$\int_r \hat{i}_k d\Gamma \quad (34)$$

を収束判定に用いている例も多い⁽⁷⁾。

4. 数値解析例

これまでで示した、応力解析における代表点誤差解析法を適用した例を示す。なお、ここで検討している離散化誤差以外の誤差は極力避けることが必要であり、前報と同様に、二重節点の利用などに十分な配慮を施した。BEMの要素は直線形状を持つ線形要素を用いて、特異積分は解析的に評価し、数値積分はガウスの10点積分によった。解析対象は、平面応力状態にあるものとみなし、形状と境界条件を表すのに必要な初期分割から、分割基準となる式(29)に基づいて拡張誤差表示式の値が大きいと判定された要素を二等分する h 法を用いる。

解析例題1 一辺を固定した平板の引張り 図2に示す、一辺 AB を固定した平板 (AB 上で変位成分 $u_x=0, u_y=0$) の引張解析を行う。

図3(a)~(f)に、この解析に対して代表点誤差解析による適応境界要素を用いた場合について、また図4には均等分割を用いたものについて、各計算ステップの後の要素分割と境界に沿った関数分布、および数値データを示す。図には、境界に沿った変位: U , お

図 5 解析例題 2

```

-----< Elements >-----
No. of Elem.      14
No. of S.P.E.A.   8
Loop              0
-----< Absolute Err. >-----
max. at ave.
Ux 7.72e-07 ( 3) 1.98e-07
Uy 4.29e-07 ( 9) 1.45e-07
Tx 1.10e-01 ( 7) 5.52e-02
Ty 1.47e-01 (11) 7.36e-02
rx 9.31e-08 ( 3) 2.52e-08
ry 4.50e-08 ( 5) 2.25e-08
-< Equilibrium of Forces >-
x -3.98e-02 y -1.16e-02

```

(a) 初期解析の分割

```

-----< Elements >-----
No. of Elem.      20
No. of S.P.E.A.   14
Loop              1
-----< Absolute Err. >-----
max. at ave.
Ux 4.25e-07 (19) 1.40e-07
Uy 2.01e-07 (13) 9.51e-08
Tx 8.84e-02 (11) 3.86e-02
Ty 1.90e-01 ( 2) 6.96e-02
rx 4.48e-08 ( 5) 1.12e-08
ry 2.58e-08 ( 5) 1.13e-08
-< Equilibrium of Forces >-
x -1.12e-02 y -1.40e-02

```

(b) 1回の反復後

```

-----< Elements >-----
No. of Elem.      61
No. of S.P.E.A.   55
Loop              4
-----< Absolute Err. >-----
max. at ave.
Ux 7.21e-08 (12) 3.58e-08
Uy 6.08e-08 (19) 1.56e-08
Tx 3.58e-02 (30) 1.10e-02
Ty 1.17e-01 ( 2) 5.62e-02
rx 1.31e-08 (19) 1.15e-09
ry 9.39e-09 (19) 9.88e-10
-< Equilibrium of Forces >-
x 1.98e-03 y -2.17e-03

```

(c) 4回の反復後

(d) 初期解析の解と予測誤差

(e) 1回の反復後

(f) 4回の反復後

図 6 解析例題 2

よび表面力: T の分布状態が実線で示されている。 U, T はそれぞれに x, y 成分を持ち, ●が x 成分(左スケール), ▲が y 成分(右スケール)を示している。 x, y の描画倍率は同じになるようにグラフが描かれているが, 零となる位置(オフセット)が x, y で異なっている。代表点誤差解析によって得られた推定誤差は, 図の点線で示されており, これが次のステップの予測解を示している。図中に Loop と記述してあるのが, 誤差解析を行った繰返し数を表し, そのときの二重節点を含めた全要素数, 誤差解析を行った要素数(それぞれ No. of Elem. および No. of S.P.E.A. で表す。なお, 二重接点では誤差解析を行わない)が示されている。また, 各図の下辺には解析対象に対応する辺の位置が, 上辺には 'A' を始点として, 二重節点も一つの要素とした要素番号が示されている。これらとあわせて, それぞれの成分に対する誤差の最大値とその要素の番号, および x, y 方向の力の釣合い状態を示しておく(図中 e-09 などとは 10^{-9} の意味である)。

本研究による適応境界要素を用いた場合, 予測解が次のステップの解をよく表していることがわかる。収束判定は, 不整合量 r と釣合い条件式から判断するのが適当である。6 回の繰返し後において誤差が十分小さくなり, 力の釣合い条件も満たされているといえる。均等分割の結果と本研究の適応境界要素分割の結果とを比較すると, この方法では, 表面力の変化が激しい部分で適切な分割がなされており, 同時に, 上の収束判定基準から精度よい解が得られているといえる。

解析例題2 四角形の穴を持つ平板の引張り 四角形の穴を持つ平板の解析を行う⁽⁷⁾。対称性を考慮して解析は 1/4 領域で行えばよく, 図 5 に実際に解析を行った対象を示す。図 6 (a)~(f) に各ステップの解の様子を示す。この解析では変位の値がステップごとに大きく変化するが, 例題 1 と同様に, 未知関数をよく予測できていることがわかる。なお, この例ではまだ分割の余地があると考えられる。

5. ま と め

二次元弾性応力解析問題に代表点誤差解析法を適用し, その有効性が確認できた。ここで, 得られた結果から次のように結論できる。

(1) 誤差解析に関して, 代表点で境界積分方程式を成立させることにより, 各ステップにおいて次のステップの解をよく予測できることがわかった。

(2) 不整合量と各要素上の誤差とを関連づけた, 拡張誤差表示式の妥当性が確認できた。

(3) これらの問題に関しては, 誤差の平均値と比較し分割を行うような単純なものでも, 十分早く解が収束した。さらに分割数を制御して, 収束を速めることも考えられる。

(4) この考え方は, 三次元の問題の解析にも応用できる。さらに, 曲線境界を持つ問題への応用法を検討中である。

文 献

- (1) Alarcon, E. and Reverter, A. p-adaptive boundary elements. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, **23** (1986), 801-829.
- (2) Cerrolaza, M., Gomez-Lera, M.S. and Alarcon, E., Elastostatics p-adaptive boundary elements for micros. *Software for E.W.S.*, **4** (1988), 18-24.
- (3) Mullen, R.L. and Rencis, J.J., Adaptive mesh refinement techniques for boundary element methods. *Advanced Topics in Boundary Element Analysis*, (1985), 235-255.
- (4) Rencis, J.J. and Jong, K.Y., A self-adaptive h-refinement technique for the boundary element method. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, **73** (1989), 295-316.
- (5) Rank, E., Adaptive h, p and hp versions for boundary integral element methods. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, **28**: (1989), 1335-1349.
- (6) 川口・神谷, 代表点誤差解析によるアダプティブ BEM, 機論, **56**-529, A (1989), 2032-2039.
- (7) Urekew, T.J. and Rencis, J.J., Absolute p-refinement of boundary elements for two-dimensional elasticity problems. *Advances in Boundary Elements*, **1** (1989), 77-93.