弾性長方形平板の大たわみ問題の境界帯板法による解析*

堀 辺 忠 志^{*1}Boundary Strip Method for Large Deflection Analysis
of Elastic Rectangular Plates

Tadashi HORIBE

A new iterative solution of the nonlinear Berger equation for plate bending problems is proposed. The solution is derived by utilizing both the idea of the Kantrovich method and the boundary integral equation method. The present method, named the boundary strip method, could reduce the degrees of freedom of the problem to be solved and input data, although the plate configuration and the boundary conditions of the problems are limited to some extent. In order to show the validity of the proposed method, several examples under various boundary conditions are computed. The numerical results are in good agreement with the results obtained by other authors.

Key Words: Plate Bending, Large Deflection, Berger Equation, Boundary Strip Method, Numerical Analysis

1. 緒 言

弾性平板の有限変形曲げ問題に対する BEM 解法は、von Kármán 形の支配方程式⁽¹⁾と Berger の近似支配方程式⁽²⁾に基づくものの 2 種類に大別される⁽³⁾。前者の解法⁽⁴⁾⁽⁵⁾では、大変形の効果を比較的厳密に考慮しているが、面内変形と面外変形とが連成したかなり複雑な非線形方程式を解かなければならない。後者の解法は、大変形の効果を近似的に考慮しているにすぎないが、非連成の非線形方程式を解けばよい。そして、この Berger 方程式の簡便さに注目した BEM 解析が、主として神谷らを中心にしてなされてきた^{(6)~(9)}。その結果、境界での面内変位を拘束した場合には、Berger 方程式が von Kármán 形の支配方程式に対する十分な近似となっていることが明らかにされた。

さて、著者は、前報⁽¹⁰⁾において Kantrovich の方法⁽¹¹⁾とはりの曲げ問題に関する BEM 解法とを組合せることによって、長方形弾性板の曲げ問題を簡便に解析する手法を提案した。この手法は、有限帯板法⁽¹²⁾

が基本としているアイディアを援用したもので、解析形状に制約があるものの、極めて少ない入力データで高精度な結果が得られるという特長をもっている。

本研究では、上に述べた著者の解析法⁽¹⁰⁾(有限帯板法に対応して境界帯板法-Boundary Strip Method-と名づける)を、Berger 方程式で記述された長方形弾性板の有限変形曲げ問題に適用した場合について述べる。さらに、境界の面内変位が拘束されたいくつかの問題についての数値解析例を示す。最後に、境界帯板法が、長方形板の有限変形曲げ問題に対しても十分に有効であることを明らかにする。

2. 理 論

2・1 支配方程式の変形⁽¹⁰⁾ $w(x, y)$ を板中央面のたわみ、 $q(x, y)$ を単位面積当たりの荷重とすると、平板の大たわみを記述する Berger 方程式は

$$\left. \begin{aligned} D^4 w(x, y) - x^2 D^2 w(x, y) &= \frac{q(x, y)}{D} \\ D^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

で表される⁽²⁾。ここで、 D は板の曲げ剛性である。また、 x^2 は Berger 定数と呼ばれ、 h を板の厚さ、 S を領域の面積として境界の面内変位が拘束された場合には、

* 原稿受付、平成元年 9 月 27 日。

*¹ 正員、茨城工業高等専門学校 (〒312 勝田市大字中根字深谷津 866)。

$$\chi^2 = \frac{6}{Sh^2} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \dots \dots \dots (2)$$

で表される。式(1)は、たわみ w に関して非線形ではあるが、反復法により解を求めることは容易である。

いま、図1に示すように、板の中央を原点とした座標軸を定め、縦と横の長さがそれぞれ b および a である長方形平板を考える。そして、たわみ $w(x, y)$ と分布荷重 $q(x, y)$ が

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) \psi_m(y), \quad q(x, y) = q_0 f(x) g(y) \dots \dots \dots (3)$$

のように変数分離形で表されると仮定する。式(3)を式(1)に代入すると

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\varphi_m \psi_m'''' - (\chi^2 \varphi_m - 2\varphi_m''') \psi_m'' + (\varphi_m'''' - \chi^2 \varphi_m'') \psi_m] = \frac{q_0}{D} f(x) g(y) \dots \dots \dots (4)$$

となる。ここで、肩添字は $\varphi_m''(x) = d^2 \varphi_m / dx^2$, $\psi_m''(y) = d^2 \psi_m / dy^2$ のように引数に関する微分を表すものとする。

次に、 x 軸方向の関数 $\varphi_n(x)$ として、次のはりの自由振動の方程式

$$\varphi_n''''(x) - \left(\frac{k_n}{a} \right)^4 \varphi_n(x) = 0 \dots \dots \dots (5)$$

を満たす関数を選び（ここで k_n は固有値とする）、この方向に Kantrovich の方法⁽¹¹⁾を適用すると、 $\psi_n(y)$ についての連立常微分方程式群が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \psi_n'''' - 2\delta_n^2 \psi_n'' + \varepsilon_n^4 \psi_n + 2 \sum_{(m \neq n)} \frac{(\varphi_m'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \psi_m'' \\ - \chi^2 \sum_{(m \neq n)} \frac{(\varphi_m'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \psi_m = q_n g(y), \quad n=1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \dots \dots \dots (6)$$

図1 長方形平板の座標

ただし、

$$\begin{aligned} (\varphi_n, \varphi_n) &= \int_{-a/2}^{+a/2} \varphi_n \cdot \varphi_n dx \\ (\varphi_n'', \varphi_n) &= \int_{-a/2}^{+a/2} \left(\frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} \right) \cdot \varphi_n dx \\ (\varphi_n''', \varphi_n) &= \int_{-a/2}^{+a/2} \left(\frac{d^3 \varphi_n}{dx^3} \right) \cdot \varphi_n dx \\ q_n &= \frac{q_0(f, \varphi_n)}{D(\varphi_n, \varphi_n)} \dots \dots \dots (7) \\ \delta_n^2 &= \frac{\chi^2}{2} - \frac{(\varphi_n, \varphi_n'')}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \quad \varepsilon_n^4 = \left(\frac{k_n}{a} \right)^4 - \chi^2 \frac{(\varphi_n, \varphi_n'')}{(\varphi_n, \varphi_n)} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

なお、式(6)を導くにあたっては、式(5)を満たす関数 $\varphi_n(x)$ の直交性

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_m, \varphi_n) &= 0, \\ (\varphi_m''', \varphi_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (m \neq n) \dots \dots \dots (9)$$

を用いている。

式(6)中の関数 $\varphi_n(x)$ は、式(5)および $x = \pm a/2$ の位置で与えられた境界条件を満足する必要がある。次式(10)～(12)は、種々の境界条件下での $\varphi_n(x)$ の具体的な関数形をまとめたものである。

①支持 ($x = -a/2$)-支持 ($x = a/2$) の場合

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sin \left\{ k_n \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ \frac{(\varphi_n'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= - \left(\frac{k_n}{a} \right)^2 \\ \frac{(\varphi_n''', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= \left(\frac{k_n}{a} \right)^4 \\ \frac{(\varphi_n'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= 0 \\ k_n &= \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

②支持 ($x = -a/2$)-固定 ($x = a/2$) の場合

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{\sinh \left\{ k_n \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) \right\}}{\sinh k_n} - \frac{\sin \left\{ k_n \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2} \right) \right\}}{\sin k_n} \\ \frac{(\varphi_n'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= - \left(\frac{k_n}{a} \right)^2 \coth k_n \left(\coth k_n - \frac{1}{k_n} \right) \\ \frac{(\varphi_n''', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= \left(\frac{k_n}{a} \right)^4 \\ \frac{(\varphi_n'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= 4 \left(\frac{k_n}{a} \right)^2 \frac{k_n^2}{(k_n^4 - k_n^2)} (k_n \cot k_n - k_n \coth k_n) \\ k_n &= 3.926\,602, 7.068\,583, 10.210\,176, \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

③固定 ($x = -a/2$)-固定 ($x = a/2$) の場合

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{\cosh\left(k_n \frac{x}{a}\right)}{\sinh \frac{k_n}{2}} - \frac{\cos\left(k_n \frac{x}{a}\right)}{\sin \frac{k_n}{2}} \\ \frac{(\varphi_n'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= -\left(\frac{k_n}{a}\right)^2 \tanh^2 \frac{k_n}{2} \left(1 - \frac{2}{k_n} \coth \frac{k_n}{2}\right) \\ \frac{(\varphi_n''', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= \left(\frac{k_n}{a}\right)^4 \\ \frac{(\varphi_m'', \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} &= 8\left(\frac{k_n}{a}\right)^2 \frac{k_m^2}{(k_m^4 - k_n^4)} \tanh^2 \frac{k_n}{2} \\ &\quad \times \left(k_n \cot \frac{k_m}{2} - k_m \cot \frac{k_n}{2}\right) \\ k_n &= 4.730\,040\,7, 10.995\,608, 17.278\,760, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

また、同式中には、式(7)で定義した $\varphi_n(x)$, $\varphi_m(x)$ とそれらの微分量の積に関する定積分の値も示している。なお、これらの定積分の導出には REDUCE3 [Ver. 3.3, (株)BUG] を利用した。

式(6)においては、未知関数である ψ_m と ψ_n が連成しているが、この式の左辺の第4項と第5項とを省略する近似⁽¹³⁾を行うと、次のような ψ_n に関する独立

な常微分方程式群が得られる。

$$\psi_n'''' - 2\delta_n^2 \psi_n'' + \varepsilon_n^4 \psi_n = q_n g(y), \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (13)$$

$m=n$ の場合の主要な項の係数に対する省略項の係数の大きさ $(a/k_n)^2 |(\varphi_m'', \varphi_n)/(\varphi_n, \varphi_n)|$ を、式(10)～(12)に基づいて計算した結果を図2(a), (b)に示す。図2(a)は支持-固定、(b)は固定-固定の場合である。これらの図は、省略項の係数の大きさが主要な項よりかなり小さいことを示している。したがって、以上の連成項の省略という近似が大きな誤差を導くものではないことがわかる。

3. 境界積分方程式

3.1 ψ_n に関する境界積分方程式

2章では、 x 方向の両端で指定された境界条件を満たす $\varphi_n(x)$ を選んだのちに、 $\psi_n(y)$ についての独立な常微分方程式群が得られる経過を示した。ここでは、前報⁽¹⁰⁾によって得られた $\psi_n(y)$ に関する積分方程式を以下に示す。

$$\begin{aligned} \psi_n(\eta) &+ \left[\left(\frac{d^3 \psi_n(y)}{dy^3} - (2-\nu) \delta_n^2 \frac{d\psi_n(y)}{dy} \right) \psi_n^*(y, \eta) \right]_{-b/2}^{+b/2} - \left[\left(\frac{d^2 \psi_n(y)}{dy^2} - \nu \delta_n^2 \psi_n(y) \right) \frac{d\psi_n^*(y, \eta)}{dy} \right]_{-b/2}^{+b/2} \\ &+ \left[\frac{d\psi_n(y)}{dy} \left(\frac{d^2 \psi_n^*(y, \eta)}{dy^2} - \nu \delta_n^2 \psi_n^*(y, \eta) \right) \right]_{-b/2}^{+b/2} - \left[\psi_n(y) \left(\frac{d^3 \psi_n^*(y, \eta)}{dy^3} - (2-\nu) \delta_n^2 \frac{d\psi_n^*(y, \eta)}{dy} \right) \right]_{-b/2}^{+b/2} \\ &= q_n \int_{-b/2}^{+b/2} g(y) \psi_n^*(y, \eta) dy, \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n(\eta) &+ \left[\left(\frac{d^3 \tilde{\psi}_n(y)}{dy^3} - (2-\nu) \delta_n^2 \frac{d\tilde{\psi}_n(y)}{dy} \right) \tilde{\psi}_n^*(y, \eta) \right]_{-b/2}^{+b/2} - \left[\left(\frac{d^2 \tilde{\psi}_n(y)}{dy^2} - \nu \delta_n^2 \tilde{\psi}_n(y) \right) \frac{d\tilde{\psi}_n^*(y, \eta)}{dy} \right]_{-b/2}^{+b/2} \\ &+ \left[\frac{d\tilde{\psi}_n(y)}{dy} \left(\frac{d^2 \tilde{\psi}_n^*(y, \eta)}{dy^2} - \nu \delta_n^2 \tilde{\psi}_n^*(y, \eta) \right) \right]_{-b/2}^{+b/2} - \left[\tilde{\psi}_n(y) \left(\frac{d^3 \tilde{\psi}_n^*(y, \eta)}{dy^3} - (2-\nu) \delta_n^2 \frac{d\tilde{\psi}_n^*(y, \eta)}{dy} \right) \right]_{-b/2}^{+b/2} \\ &= q_n \int_{-b/2}^{+b/2} g(y) \tilde{\psi}_n^*(y, \eta) dy, \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

(a) 支持-固定

(b) 固定-固定

図2 省略項の係数の大きさ $[(a/k_n)^2 |(\varphi_m'', \varphi_n)/(\varphi_n, \varphi_n)|]$

ここで, ν はポアソン比, $\tilde{\phi}_n^*(y, \eta)$ などは η に関する微分を示し, $\phi_n^*(y, \eta)$ は, 以下の式を満たす基本解である.

$$\frac{d^4 \phi_n^*(y, \eta)}{dy^4} - 2\delta_n^2 \frac{d^2 \phi_n^*(y, \eta)}{dy^2} + \varepsilon_n^4 \phi_n^*(y, \eta) = \delta(y, \eta) \dots\dots\dots (16)$$

ただし, $\delta(y, \eta)$ はディラックのデルタ関数である.

式(14), (15)においてそれぞれ $\eta \rightarrow -b/2 + \varepsilon$, $\eta \rightarrow b/2 - \varepsilon$ (ε は微小な正の定数) と極限操作を行うと境界値のすべてが定められる. そして, 平板の内点のたわみおよびたわみ角[式(2)の右辺を用いた Berger 定数の計算の際に必要な]などは, 式(3)の第1式またはそれを微分した式を利用して計算することができる.

3・2 基本解 式(16)を満たす基本解 $\phi_n^*(y, \eta)$ は, δ_n と ε_n の大小に応じて次のように表される⁽¹⁰⁾⁽¹⁴⁾.

① $\delta_n = \varepsilon_n$ のとき

$$\phi_n^*(y, \eta) = \frac{1}{4\delta_n^3} \left\{ [1 + (\delta_n b) \tanh(\delta_n b)] \frac{\sinh[\delta_n(b - \rho_y)]}{\cosh(\delta_n b)} - \delta_n(b - \rho_y) \frac{\cosh[\delta_n(b - \rho_y)]}{\cosh(\delta_n b)} \right\}, \quad \rho_y = |y - \eta| \dots\dots\dots (17)$$

② $\delta_n > \varepsilon_n$ のとき

$$\phi_n^*(y, \eta) = \frac{1}{2(m_\delta^2 - n_\delta^2)} \left\{ \frac{\sinh[n_\delta(b - \rho_y)]}{n_\delta \cosh(n_\delta b)} - \frac{\sinh[m_\delta(b - \rho_y)]}{m_\delta \cosh(m_\delta b)} \right\}, \quad \rho_y = |y - \eta| \dots\dots\dots (18)$$

$$m_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\delta_n^2 + \varepsilon_n^2} + \sqrt{\delta_n^2 - \varepsilon_n^2}), \quad n_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\delta_n^2 + \varepsilon_n^2} - \sqrt{\delta_n^2 - \varepsilon_n^2}) \dots\dots\dots (18)'$$

③ $\delta_n < \varepsilon_n$ のとき

$$\begin{aligned} \phi_n^*(y, \eta) = & \frac{1}{4\varepsilon_n^2 [\cosh^2(m_\varepsilon b) - \sin^2(n_\varepsilon b)]} \\ & \times \left\{ \left(\frac{\sinh(m_\varepsilon b) \sin(n_\varepsilon b)}{m_\varepsilon} - \frac{\cosh(m_\varepsilon b) \cos(n_\varepsilon b)}{n_\varepsilon} \right) \cosh[m_\varepsilon(b - \rho_y)] \sin[n_\varepsilon(b - \rho_y)] \right. \\ & \left. + \left(\frac{\cosh(m_\varepsilon b) \cos(n_\varepsilon b)}{m_\varepsilon} + \frac{\sinh(m_\varepsilon b) \sin(n_\varepsilon b)}{n_\varepsilon} \right) \sinh[m_\varepsilon(b - \rho_y)] \cos[n_\varepsilon(b - \rho_y)] \right\}, \quad \rho_y = |y - \eta| \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$m_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_n^2 + \delta_n^2}{2}}, \quad n_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_n^2 - \delta_n^2}{2}} \dots\dots\dots (19)'$$

紙面の都合上, $\phi_n^*(y, \eta) \sim \phi_n^{*'''}(y, \eta)$ の表現式については省略するが, 式(15)中の基本解の η に関する微分

量については, 式(17)~(19)のいずれについても

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}_n^*(y, \eta) &= -\phi_n^{*'}(y, \eta) \\ \tilde{\phi}_n^{*'}(y, \eta) &= -\phi_n^{*''}(y, \eta) \\ \tilde{\phi}_n^{*''}(y, \eta) &= -\phi_n^{*'''}(y, \eta) \\ \tilde{\phi}_n^{*'''}(y, \eta) &= -2\delta_n^2 \phi_n^{*''}(y, \eta) + \varepsilon_n^4 \phi_n^*(y, \eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

が成立している.

3・3 反復法による Berger 定数の決定 Berger 定数 x^2 は式(2)によって表されるが, 現在のところ未知であるので以下の反復法によって決定する.

- (1) 初めに任意の Berger 定数 B_0 を仮定する.
- (2) 式(14), (15)より解を決定する.
- (3) 次に, 式(2)の右辺を Gauss の数値積分により評価し, これを新しい Berger 定数 B_1 とする.
- (4) $(B_0 - B_1)/B_0 < \text{EPS}$ (EPS は微量) を判定し, これが満たされたときには, $x^2 \leftarrow B_0$ として計算結果を出力して終了する. そうでないときには, (5)へ移る.
- (5) $B_0 \leftarrow (B_0 + B_1)/2$ と Berger 定数を更新して(2)に戻る. この手順を流れ図に示すと図3のようになる.

4. 数値解析結果および考察

前章までに与えた解析手法に従った計算プログラム

図3 Berger 定数 x^2 決定の流れ図

を作成し、以下にその計算結果について述べる。

なお、荷重の分布状態を示す関数 $f(x)$ と $g(y)$ を含む式(14)、(15)の右辺の積分項

$$q_n \int_{-b/2}^{+b/2} g(y) \left\{ \frac{\psi_n^*(y, \eta)}{\tilde{\psi}_n^*(y, \eta)} \right\} dy = \frac{q_0}{D} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \times \int_{-b/2}^{+b/2} g(y) \left\{ \frac{\psi_n^*(y, \eta)}{\tilde{\psi}_n^*(y, \eta)} \right\} dy \quad (21)$$

に関しては、

(1) (x_i, y_j) の位置に 1 個の集中荷重 P_0 を受ける場合 $[q(x, y) = P_0 \delta(x_i) \delta(y_j)]$ は

$$\begin{aligned} \text{ANS} = & -((\text{MB} \cdot \text{NB}) \cdot (\text{NB} \cdot \text{NB}) \cdot \text{SINH}(\text{B} \cdot \text{MB}) \cdot \text{SIN}(\text{B} \cdot \text{NB}) \cdot 2 \cdot \text{COSH}(\text{B} \cdot \text{MB}) \\ & \cdot \text{COS}(\text{B} \cdot \text{NB}) \cdot \text{MB} \cdot \text{NB}) \cdot (\text{COSH}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{MB}) / 2) \cdot \text{COS}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{NB}) \\ & \cdot (\text{SINH}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{NB}) / 2) \cdot \text{SIN}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{NB}) / 2) \cdot \text{SINH}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{MB}) / 2) \\ & \cdot \text{SIN}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{NB}) / 2) \cdot (\text{MB} \cdot \text{NB}) \cdot (\text{MB} \cdot \text{NB}) \cdot \text{COSH}(\text{B} \cdot \text{MB}) \cdot \text{COS}(\text{B} \cdot \text{NB}) \\ & \cdot \text{NB} \cdot 4 \cdot (\text{SINH}(\text{B} \cdot \text{MB}) \cdot 2 \cdot 1) \cdot (\text{SIN}(\text{B} \cdot \text{NB}) \cdot 1) \cdot (\text{SIN}(\text{B} \cdot \text{NB}) - 1) \cdot \\ & \text{MB} \cdot \text{NB} \cdot 2 \cdot \text{SINH}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{MB}) / 2) \cdot \text{SINH}(\text{B} \cdot \text{MB}) \cdot \text{SIN}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{NB}) \\ & \cdot \text{NB} / 2) \cdot \text{SIN}(\text{B} \cdot \text{NB}) \cdot \text{MB} \cdot \text{NB} \cdot 2 \cdot \text{SINH}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{NB}) / 2) \cdot \text{SINH}(\text{B} \cdot \text{MB}) \cdot \text{SIN}(\text{B} \cdot \text{NB}) \\ & \cdot \text{NB} / 2) \cdot \text{SIN}((\text{B} \cdot 2 \cdot \text{ET}) \cdot \text{NB}) / 2) \cdot \text{SIN}(\text{B} \cdot \text{NB}) \cdot \text{MB} \cdot \text{NB} \cdot 4 \cdot \text{SINH}(\text{B} \cdot \text{MB}) \cdot 2 \cdot \\ & \text{SIN}(\text{B} \cdot \text{NB}) \cdot 2 \cdot \text{NB} \cdot \text{NB}) / (4 \cdot (\text{SINH}(\text{B} \cdot \text{MB}) \cdot 2 \cdot 1) \cdot \text{SIN}(\text{B} \cdot \text{NB}) \cdot 2 \cdot \\ & (\text{MB} \cdot 2 \cdot \text{NB} \cdot 2) \cdot \text{BT} \cdot 2 \cdot \text{MB} \cdot \text{NB}) \end{aligned}$$

図 4 REDUCE 3 による出力結果

図 5 等分布荷重をうける四辺単純支持長方形平板の中央のたわみの比較

図 6 等分布荷重をうける四辺固定正方形平板の中央のたわみの比較

$$\frac{P_0}{D} \frac{\varphi_n(x_i)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \left\{ \frac{\psi_n^*(y_j, \eta)}{\tilde{\psi}_n^*(y_j, \eta)} \right\} \quad (22)$$

(2) 等分布荷重 q_0 を受ける場合 $[q(x, y) = q_0]$ は

$$\frac{q_0}{D} \frac{(1, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \int_{-b/2}^{+b/2} \left\{ \frac{\psi_n^*(y, \eta)}{\tilde{\psi}_n^*(y, \eta)} \right\} dy \quad (23)$$

として計算できる。また、式(23)の特異積分は、数式処理システム REDUCE 3 を利用して評価した。その積分結果を FORTRAN スタイルで出力したものの一部を図 4 に示す。

数値計算においては、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、式(3)の第一式の級数の項数 $n = 6$ 、式(2)には 64 点 Gauss 積分公式を用いた。

境界の面内変位を拘束した場合のいくつかの数値計算例を、以下に示す。図 5 は、縦横比 b/a をパラメータにとり、等分布荷重 q_0 をうける四辺支持長方形板の中央のたわみについて、本解法による結果と Berger の結果⁽²⁾を比較したものである。図には線形解も併せて記してある。両者は読み取り誤差の範囲内でほとんど一致しており、本解法が極めて高精度な手法であることを示している。図 6 は、縦横比 $b/a = 1$ のときの等分布荷重をうける四辺固定長方形板の中央のたわみに

図 7 集中荷重をうける四辺支持長方形平板の中央のたわみ

図 8 集中荷重をうける二辺支持二辺固定長方形平板の中央のたわみ

ついて、本解法による結果と Way⁽¹⁵⁾の結果の比較である。この場合には2・1節で述べたような連成項の省略を行っているにもかかわらず、両者は満足すべき一致を示している。

図7は、中央集中荷重 P_0 をうける四辺支持長方形板の中央のたわみと荷重の関係について、 b/a をパラメータとして示したものである。また、図8は、中央集中荷重 P_0 をうける二辺支持-二辺固定長方形板の中央のたわみについて、図7と同様に b/a をパラメータとして示したものである。

5. 結 言

本論文では、Kantrovichの方法とほりの曲げ問題のBEM解法とを組合せて簡便に板曲げ問題を解析する手法(境界帯板法)を、Berger方程式で記述された平板の大たわみ問題に適用した。まず、たわみと荷重とを変数分離形で表現したのち、支配方程式をKantrovichの方法で次元問題に還元した。そして、この次元問題をBEM解法により解析する手順を示すとともにそこで必要となる基本解を明らかにした。この解析手順に基づき、支配方程式を反復法を用いて数値解析し、いくつかの計算例を示した。そこでは、わずか四元の連立一次方程式を繰返し解いているにすぎない。以上の結果、境界帯板法は解析対象の形状に制約があるものの、平板の非線形曲げ問題に対しても十分に有効な手法であることを明らかにした。

終わりに、本研究の一部は、昭和63年度文部省科学研究費[奨励研究(A)]に負っている。また、茨城高専上野 誠教授には、本研究の遂行中、終始暖かい励ましをいただいた。ここに、深甚なる謝意を表す。

文 献

- (1) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd. ed., (1959), 415 McGraw-Hill.
- (2) Berger, H. M., *J. Appl. Mech.*, **22** (1955), 465.
- (3) 神谷, 日本機械学会関西支部第110回講演会教材, (1983), 63.
- (4) Tanaka, M. (Banerjee, P. K. and Mukherjee, S. 編) *Developments in Boundary Element Methods-3*, (1984), 115 Elsevier Applied Science Publishers.
- (5) 田中・ほか2名, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, **10** (1986-7), 395.
- (6) Kamiya, N. and Sawaki, Y., *Int. J. Non-linear Mech.*, **17-3** (1982), 187.
- (7) Kamiya, N., ほか3名, *Appl. Math. Modelling*, **6** (1982), 23.
- (8) 佐脇・ほか2名, 境界要素法論文集, **5** (1988), 161.
- (9) Sladek, J. and Sladek, V., *Ing. Arch.*, **53** (1982), 385.
- (10) 堀辺, 機論, **55-515, A** (1989), 1548.
- (11) Kantrovich, L. V. and Klylov, V. I., *Approximate Methods of Higher Analysis*, (1958), 322, Interscience.
- (12) Cheung, Y. K., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Eng. Mech. Div.*, **94** (1968), 1365.
- (13) Marguerre, K. and Woernle, H. T. (玉手訳), 弾性平板, (1974), 109, 培風館.
- (14) 堀辺, 機論, **53-487, A** (1987), 622.
- (15) Way, S., *Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech.*, (1938), 123, John Wiley.