温度こう配を有する円柱内を伝ばする 弾性波の解析*

海 津 浩 一^{*1}, 鈴 木 庸 介^{*2}, 谷 村 眞 治^{*1}

Numerical Analysis of Elastic Wave Propagation in a Circular Cylinder with a Thermal Gradient

Koichi KAIZU, Yousuke SUZUKI and Shinji TANIMURA

Two-dimensional stress waves in an elastic circular cylinder with a thermal gradient were analyzed numerically when an axisymmetric impulsive load was applied to the end face of the cylinder heated (or cooled) to produce a thermal distribution. For numerical analysis, the finite difference method based on integration along bicharacteristics was employed. By obtaining the numerical results for the cases of various temperature profiles and impact loading conditions, it is clearly demonstrated that stress wave propagation is affected by the thermal gradient, and that when the thermal gradient in the pressure bars of the split Hopkinson bar becomes steeper, experimental results by the conventional method contain more noticeable errors.

Key Words: Numerical Analysis, Impulsive Load, Thermal Gradient, Bicharacteristics, Split Hopkinson Bar

1. 緒 言

衝撃問題に用いられる数値解法の中で、従特性曲線に沿った数値積分法は応力波の反射・干渉などの複雑な二次元の波動伝ばの状態を正確に知ることができるうえ、安定な解を得られること、単純な形状のものに対して境界上の差分式が得られやすいことなどから、二次元波動解析には非常に有用な解法である。この解法により、弾性円柱⁽¹⁾や円管⁽²⁾が縦衝撃を受けるときの二次元波動解析が行われ、応力集中現象や引張応力の発生について検討されている。また弾性/粘塑性円柱⁽³⁾および円管⁽⁴⁾の二次元波動解析も行われ、衝撃条件と衝撃応答の関係なども調べられている。このように二次元波動問題に対して有用である従特性曲線法を、さらに拡張し、その解析範囲を広げることは意味のあることと思われる。

高ひずみ速度下での材料の動的力学特性の測定法として、ホプキンソン棒法が最もよく用いられている。この方法による衝撃圧縮試験の場合には、試験片の直径と入・出力棒の直径との関係および横方向の慣性な

どから、一次元の波動伝ばの仮定が適用できなくなるおそれがあるため、深津ら⁽⁵⁾は、室温での試験片と入・出力棒との直径の異なる場合のホプキンソン棒法の妥当性を従特性曲線法による二次元波動解析により検討している。

従来から、ホプキンソン棒法により、種々の材料の高温および低温での動的強度が調べられてきたが、新材料の開発等に伴い、さらにこの方法による活発な研究が行われるものと思われる。このような実験では、入・出力棒に試験片をはさみ、その部分を炉や低温槽に入れて温度を制御する方法⁽⁶⁾のものが多くある。この方法では、入・出力棒の炉や低温槽に入る部分からの熱伝導によって入・出力棒自体に温度こう配が生じることになり、この温度分布に対応して弾性係数も一様ではなくなるために、棒中の波動伝ばが非常に複雑になるものと考えられる。このような温度こう配を有する棒中の応力波の伝ばは非常に興味深い問題であり、また高温および低温においてホプキンソン棒法で衝撃実験を行うためにも、基本的かつ重要な問題であると思われる。このような温度こう配を有する棒中の波動伝ばに関する研究として、近似波動方程式を用いた局所加熱による弾性丸棒の分散波動の解析⁽⁷⁾⁽⁸⁾や一次元理論による弾塑性波の解析⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾が行われて

* 原稿受付 平成2年4月16日。

^{*1} 正員、大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町4-804)。

^{*2} 学生員、大阪府立大学大学院。

いる。しかしながら、高温および低温でのホプキンソン棒法による衝撃実験と関連させた二次元波動解析の例はまだないようである。

本研究では、従来から二次元波動問題に用いられてきた従特性曲線に沿った数値積分法を非等質な固体中の波動伝ば問題の解析に適用できるように拡張し、新たに基礎式を導出した。解析例として、端面が加熱(または冷却)されることにより、温度こう配が生じている半無限長円柱において、その端面に縦衝撃が作用するときの波動伝ば問題を取り上げ、円柱の端面に与えられる温度および衝撃速度の立上り時間が円柱内の波動伝ばに及ぼす影響を明らかにした。また、数値計算例により、衝撃実験に広く用いられているホプキンソン棒法で高温(または低温)実験を行う場合の検討も行い、応力棒内に非常に急激な温度こう配のある場合には、従来のホプキンソン棒法により求めた応力、ひずみおよびひずみ速度はかなりの誤差を含むことを示した。

2. 理論式

2.1 円柱内の温度分布 半無限長の弾性円柱の一端がある温度に加熱あるいは冷却されており、円柱の側面では熱の放散がある場合を考える。円柱座標 (r, θ, z) を用い、軸対称性を考慮することにより、円柱の定常熱伝導の基礎式および境界条件は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$r=a: \frac{\partial T}{\partial r} + h_0(T - T_m) = 0 \quad (2)$$

$$z=0: T = T_0 \quad (3)$$

$$z=\infty: T = T_m \quad (4)$$

ここで、 T は温度、 a は円柱の半径、 T_0 は端面に与えられる温度、 T_m は室温、 h_0 は相対熱伝導率(熱伝導率/熱伝導率)である。

図 1 円柱と座標系

式(1)、(2)をハンケル変換を用いて解くことにより、次式が得られる。

$$T = \sum_i \frac{2h_0}{a(s_i^2 + h_0^2)J_0(s_i a)} \{ (T_0 - T_m) \times \exp(-s_i z) + T_m \} J_0(s_i r) \quad (5)$$

$$-h_0 J_0(s_i a) + s_i J_1(s_i a) = 0 \quad (6)$$

ここで、 s_i は式(6)の正根であり、 J_0 および J_1 はそれぞれ零次と1次のベッセル関数である。

2.2 基礎式 図1に示すように、弾性円柱の一端がある温度に加熱(または冷却)されることにより円柱内に温度こう配が生じているときに、その加熱(または冷却)された端面に時間 t に関するランプ状立上りの速度 $V(t)$ (軸対称)の衝撃を受けるときの二次元弾性波動伝ば問題を考える。円柱の中心軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) を用い、対称性より $\theta=0$ の面のみを考える。この場合の軸対称問題の基礎式は次のように表される。

$$L(W) = A^r W_r + A^\theta W_\theta + A^z W_z - B = 0 \quad (7)$$

ここでベクトル W 、 B および行列 A^r 、 A^θ 、 A^z はそれぞれ次に示すとおりである。

$$W' = [u, v, p, q, s, n]$$

$$B' = [2\gamma q/\eta, \beta\gamma/\eta, u/\eta, -u/\eta, 0, 0]$$

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \gamma M & 0 & \alpha^2 \gamma Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \gamma Q & 0 & \alpha^2 \gamma N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^2 \gamma \end{bmatrix}$$

$$A^\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで

$$\tau = \frac{c_1}{r_0} t, \quad \eta = \frac{r}{r_0}, \quad \xi = \frac{z}{r_0}, \quad u = \frac{v_r}{c_1}$$

$$v = \frac{v_z}{c_1}, \quad p = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2\rho c_1^2}, \quad q = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\rho c_1^2}$$

$$s = \frac{\sigma_z}{\rho c_1^2}, \quad n = \frac{\tau_{rz}}{\rho c_1^2}, \quad a = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\beta = \frac{c_1'}{c_2}, \quad \gamma = \frac{\rho}{\rho'}, \quad N = \frac{\beta^2(\beta^2 - 1)}{3\beta^2 - 4}$$

$$M = \frac{\beta^4}{3\beta^2 - 4}, \quad Q = \frac{\beta^2(2 - \beta^2)}{3\beta^2 - 4}$$

であり, $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ は各応力分布, v_r, v_z は各粒子速度成分, c_1, c_2 は基準温度における膨張波およびせん断波の伝ば速度, ρ は密度, t は時間, r_0 は代表長さ(以下では円柱の半径を用いる), ダッシュは任意温度でのそれぞれの値を表す。

式(7)は1階の半線形微分方程式系であり, その特性曲面は図2に示すように円すいとなる。ここで k は時間刻み幅であり, H は座標刻み幅である。この円すいの母線が従特性曲線であり, 円すいの底面の半径が応力波の伝ば速度に対応し, 外側が膨張波を, 内側がせん断波を表している。ここで $h = c_1/c_2$ であり, 基準温度での応力波の伝ば速度の比を表し, 基準温度では $\alpha = 1, \alpha\beta = h$ となる。基礎式の導出に際して従来の方法と異なるところは, 差分格子上的各点で温度分布に対応して材料定数が変化することにより, 膨張波とせん断波の伝ば速度も同じく変化することを考慮しなければならないことである。すなわち, 図2中の差分格子上的各点で, 温度分布に対応して伝ば速度の比 α, β が変わるので, 結局, 特性曲面の円すいの底面の半径も変化することになる。このことを考慮すれば, 基礎式の導出は従来の方法⁽⁵⁾と同様に行うことができる。

図2 特性円すい

従特性曲線に沿う微分関係式を求めると次式になる。

$$\begin{aligned} \alpha\delta u + \alpha^2\gamma(\delta p + \delta q) &= -\frac{k}{2}\left\{\frac{\beta^2-2}{\beta^2}(-v_{\epsilon}^0 - v_{\epsilon 1}) - \alpha\gamma(n_{\epsilon}^0 + n_{\epsilon 1}) - \frac{\beta^2-2}{\beta^2}\left(\frac{u_0 + \delta u}{\eta_0} + \frac{u_1}{\eta_1}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha\gamma\left(\frac{q_0 + \delta q}{\eta_0} + \frac{q_1}{\eta_1}\right)\right\} - \alpha(u_0 - u_1) - \alpha^2\gamma(p_0 - p_1 + q_0 - q_1) \\ -\alpha\delta u + \alpha^2\gamma(\delta p + \delta q) &= -\frac{k}{2}\left\{\frac{\beta^2-2}{\beta^2}(-v_{\epsilon}^0 - v_{\epsilon 3}) + \alpha\gamma(n_{\epsilon}^0 + n_{\epsilon 3}) - \frac{\beta^2-2}{\beta^2}\left(\frac{u_0 + \delta u}{\eta_0} + \frac{u_3}{\eta_3}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha\gamma\left(\frac{q_0 + \delta q}{\eta_0} + \frac{q_3}{\eta_3}\right)\right\} + \alpha(u_0 - u_3) - \alpha^2\gamma(p_0 - p_3 + q_0 - q_3) \\ \alpha\delta v + \alpha^2\gamma\delta s &= -\frac{k}{2}\left\{\frac{\beta^2-2}{\beta^2}(-u_{\eta}^0 - u_{\eta 2}) - \alpha\gamma(n_{\eta}^0 + n_{\eta 2}) - \frac{\beta^2-2}{\beta^2}\left(\frac{u_0 + \delta u}{\eta_0} + \frac{u_2}{\eta_2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha\gamma\left(\frac{n_0 + \delta n}{\eta_0} + \frac{n_2}{\eta_2}\right)\right\} - \alpha(v_0 - v_2) - \alpha^2\gamma(s_0 - s_2) \\ -\alpha\delta v + \alpha^2\gamma\delta s &= -\frac{k}{2}\left\{\frac{\beta^2-2}{\beta^2}(-u_{\eta}^0 - u_{\eta 4}) + \alpha\gamma(n_{\eta}^0 + n_{\eta 4}) - \frac{\beta^2-2}{\beta^2}\left(\frac{u_0 + \delta u}{\eta_0} + \frac{u_4}{\eta_4}\right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha\gamma\left(\frac{n_0 + \delta n}{\eta_0} + \frac{n_4}{\eta_4}\right)\right\} + \alpha(v_0 - v_4) - \alpha^2\gamma(s_0 - s_4) \\ -\beta\delta v - \beta^2\gamma\delta n &= -\frac{k}{2}\left\{(u_{\epsilon}^0 + u_{\epsilon 1'}) + \beta\gamma(s_{\epsilon}^0 + s_{\epsilon 1'}) + \beta\gamma\left(\frac{n_0 + \delta n}{\eta_0} + \frac{n_{1'}}{\eta_{1'}}\right)\right\} + \beta(v_0 - v_{1'}) + \beta^2\gamma(n_0 - n_{1'}) \\ \beta\delta v - \beta^2\gamma\delta n &= -\frac{k}{2}\left\{(u_{\epsilon}^0 + u_{\epsilon 3'}) - \beta\gamma(s_{\epsilon}^0 - s_{\epsilon 3'}) - \beta\gamma\left(\frac{n_0 + \delta n}{\eta_0} + \frac{n_{3'}}{\eta_{3'}}\right)\right\} - \beta(v_0 - v_{3'}) + \beta^2\gamma(n_0 - n_{3'}) \\ \beta\delta u + \beta^2\gamma\delta n &= -\frac{k}{2}\left\{-(v_{\eta}^0 + v_{\eta 2'}) - \beta\gamma(p_{\eta}^0 + p_{\eta 2'} + q_{\eta}^0 + q_{\eta 2'}) - 2\beta\gamma\left(\frac{q_0 + \delta q}{\eta_0} + \frac{q_{2'}}{\eta_{2'}}\right)\right\} \\ &\quad - \beta(u_0 - u_{2'}) - \beta^2\gamma(n_0 - n_{2'}) \\ -\beta\delta u + \beta^2\gamma\delta n &= -\frac{k}{2}\left\{-(v_{\eta}^0 + v_{\eta 4'}) + \beta\gamma(p_{\eta}^0 + p_{\eta 4'} + q_{\eta}^0 + q_{\eta 4'}) + 2\beta\gamma\left(\frac{q_0 + \delta q}{\eta_0} + \frac{q_{4'}}{\eta_{4'}}\right)\right\} \\ &\quad + \beta(u_0 - u_{4'}) - \beta^2\gamma(n_0 - n_{4'}) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

また、式(7)を時間軸に沿って積分することにより、次の差分式が得られる。

$$\begin{aligned}\delta u &= \gamma \frac{k}{2} \left\{ p_{\eta}^0 + q_{\eta}^0 + n_{\epsilon}^0 + 2 \left(\frac{q_0 + \delta q}{\eta_0} \right) + p_{\eta 0} + q_{\eta 0} + n_{\epsilon 0} + 2 \frac{q_0}{\eta_0} \right\} \\ \delta v &= \gamma \frac{k}{2} \left\{ n_{\eta}^0 + s_{\epsilon}^0 + \left(\frac{n_0 + \delta n}{\eta_0} \right) + n_{\eta 0} + s_{\epsilon 0} + \frac{n_0}{\eta_0} \right\} \\ \beta^2 \gamma \delta p &= \frac{k}{2} \left\{ (\beta^2 - 1) u_{\eta}^0 + (\beta^2 - 2) v_{\epsilon}^0 + (\beta^2 - 1) \left(\frac{u_0 + \delta u}{\eta_0} \right) + (\beta^2 - 1) u_{\eta 0} + (\beta^2 - 2) v_{\epsilon 0} + (\beta^2 - 1) \frac{u_0}{\eta_0} \right\} \\ \beta^2 \gamma \delta q &= \frac{k}{2} \left\{ u_{\eta}^0 - \frac{u_0 + \delta u}{\eta_0} + u_{\eta 0} - \frac{u_0}{\eta_0} \right\} \\ \beta^2 \gamma \delta s &= \frac{k}{2} \left\{ (\beta^2 - 2) u_{\eta}^0 + \beta^2 v_{\epsilon}^0 + (\beta^2 - 2) \left(\frac{u_0 + \delta u}{\eta_0} \right) + (\beta^2 - 2) u_{\eta 0} + \beta^2 v_{\epsilon 0} + (\beta^2 - 2) \frac{u_0}{\eta_0} \right\} \\ \beta^2 \gamma \delta n &= \frac{k}{2} (v_{\eta}^0 + u_{\epsilon}^0 + v_{\eta 0} + u_{\epsilon 0}) \dots \dots \dots (9)\end{aligned}$$

ここで、上添字⁰⁰、下添字₀₀はそれぞれ点 (η_0, ξ_0, τ) 、 $(\eta_0, \xi_0, \tau - k)$ における値を表す。

式(8)および式(9)を連立させて解くことにより、ベクトル $\mathbf{W}$ の各成分の増分 δu , δv , δp , δq , δs , δn を求めることができる。

$$\begin{aligned}\alpha \delta u &= \frac{\alpha k}{\eta_0} \delta q + a_1, \quad \alpha \delta v = \frac{\alpha k}{2 \eta_0} \delta n + a_2, \quad \alpha^2 \delta p = -\frac{(\beta^2 - 2)k}{2 \beta^2 \eta_0} \delta u + \alpha^2 \delta q + a_3 \\ \alpha^2 \delta q &= \frac{2 \beta^2}{2 \beta^2 + k/(\alpha \eta_0)^2} \left(a_4 - \frac{k}{2 \alpha \beta^2 \eta_0} a_1 \right), \quad \alpha^2 \delta s = \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - 1} \alpha^2 \delta p + a_5, \quad \alpha^2 \delta n = a_6 \\ a_1 &= \frac{k^2}{2 \alpha} \left\{ \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2} \left(\frac{u_{\eta 0}}{\eta_0} - \frac{u_0}{\eta_0^2} \right) + u_{\eta \eta 0} + \frac{u_{\epsilon \epsilon 0}}{\beta^2} + \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} u_{\eta \epsilon 0} \right\} + k \alpha \left(p_{\eta 0} + q_{\eta 0} + \frac{2 q_0}{\eta_0} + n_{\epsilon 0} \right) \\ a_2 &= \frac{k^2}{2 \alpha \beta^2} \left\{ \frac{\beta^2 - 2}{\eta_0} u_{\epsilon 0} + (\beta^2 - 1) u_{\eta \epsilon 0} + v_{\eta \eta 0} + \beta^2 v_{\epsilon \epsilon 0} \right\} + k \alpha \left(s_{\epsilon 0} + \frac{n_0}{\eta_0} + n_{\eta 0} \right) \\ a_3 &= k^2 \left\{ p_{\eta \eta 0} + q_{\eta \eta 0} + \frac{2 q_{\eta 0}}{\eta_0} - 2 \left(\frac{q_0}{\eta_0^2} + \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} n_{\eta \epsilon 0} \right) + \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2} \left(s_{\epsilon \epsilon 0} + \frac{n_{\epsilon 0}}{\eta_0} \right) \right\} + k \left\{ u_{\eta 0} + \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2} \left(\frac{u_0}{\eta_0} + v_{\epsilon 0} \right) \right\} \\ a_4 &= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{k^2}{2} \left\{ p_{\eta \eta 0} + q_{\eta \eta 0} + 2 \left(\frac{q_{\eta 0}}{\eta_0} - \frac{q_0}{\eta_0^2} \right) + n_{\eta \epsilon 0} \right\} + k \left(u_{\eta 0} - \frac{u_0}{\eta_0} \right) \right] \\ a_5 &= \frac{(3 \beta^2 - 4) k^2}{2 \beta^2 (\beta^2 - 1)} \left(n_{\eta \epsilon 0} + \frac{n_{\epsilon 0}}{\eta_0} + s_{\epsilon \epsilon 0} \right) + \frac{(3 \beta^2 - 4) k}{\beta^2 (\beta^2 - 1)} v_{\epsilon 0} \\ a_6 &= \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{k^2}{2} \left(p_{\eta \epsilon 0} + q_{\eta \epsilon 0} + \frac{2 q_{\epsilon 0}}{\eta_0} + s_{\eta \epsilon 0} + n_{\eta \eta 0} + n_{\epsilon \epsilon 0} + \frac{n_{\eta 0}}{\eta_0} - \frac{n_0}{\eta_0^2} \right) + k (u_{\epsilon 0} + v_{\eta 0}) \right\} \dots \dots \dots (10)\end{aligned}$$

ここで、数値計算の簡単化のために、密度を一定と仮定し、 $\gamma=1$ としている。

円柱の端面、端面の外周の境界などでは、有効な従特性曲線の数が増減して差分方程式の数が増減するが、その分だけ境界条件で補足されることになり、境界ごとに必要な数の差分式の組合せが求められる。

2.3 境界条件 衝撃端に作用される負荷関数 $V(\tau)$ は次のように仮定した(図3)。

$$V(\tau) = \begin{cases} V_m \tau / \tau_r, & (\tau \leq \tau_r) \\ V_m, & (\tau > \tau_r) \end{cases} \dots \dots \dots (11)$$

ここで、 $V_m = V_0 / c_1$ 、 V_0 は衝撃速度、 τ_r は無次元立上り時間である。

衝撃荷重に対する境界条件は次のとおりである。

衝撃端 : $v = V(\tau)$, $n = 0$

円柱表面 : $p + q = 0$, $n = 0 \dots \dots \dots (12)$

初期条件としては、 $\tau=0$ で応力成分と粒子速度成分のすべてが零であるとした。すなわち、円柱内の生じる熱応力は考慮していない。

3. 数値計算結果および考察

直径 20 mm の半無限長の弾性円柱の端面をある温度で加熱(または冷却)することにより円柱内に温度こう配が生じているときに、その加熱(または冷却)端面に立上り時間 τ_r の衝撃速度 $V(\tau)$ の縦衝撃が作用する場合を考える。

円柱の材料は SUS 304 鋼であり、 $\rho = 8.057 \times 10^3$ kg/m³ とした。温度により弾性係数が異なるが、これには当研究室で行われた超音波反射法による実験結果⁽¹¹⁾⁽¹²⁾を用いた。図4にその実験結果を示す。また衝撃速度は $V_0 = 5.0$ m/s とした。温度分布の計算に関する定数としては、 $T_m = 293$ K, $h_0 = 15.0$ m⁻¹ とした。

計算手段としては、式(5)により各格子点上で温度を計算し、その温度に対応する各弾性係数を図4の結果を最小二乗法により求めた式により決定した後、応力波の伝ば速度を求め、式(10)に代入することによりベクトル $\mathbf{W}$ の各増分を求めた。数値解の安定性に関

しては、衝撃端からの入力エネルギー E_{inp} と円柱のもつエネルギー E_{int} から、エネルギー誤差 (E_{inp}

図 3 負荷関数

(a)

(b)

図 4 温度による弾性係数の変化

$-E_{int})/E_{inp}$ を調べるエネルギー法で検討した。以下の数値計算例の誤差はすべて 1.5% 以内であった。

図 5 に式 (5) により得られた円柱の中心軸および表面での温度分布を例示する。直径 20 mm 程度の円柱では中心軸と表面とでは、ほとんど差がないことがわかる。また、衝撃端から $\xi=2.0$ までは温度が急激に変化しているが、徐々に室温に一致するようになることがわかる。

図 6 に衝撃端の中心軸における応力 $s(=\sigma_x/\rho c_1^2)$ の時間変動の様子を示す。図 6 (a) には応力 $p+q(=\sigma_r/(\rho c_1^2))$ の変動も併せて示してある。各図の (a) および (b) はそれぞれ立上り時間 τ_r が 1 および 6 の場合である。衝撃端では温度がいちばんきびしく影響することになり、図からわかるように、衝撃端の温度が室温より高くなるにつれて応力が低下し、室温より低くなると逆に増加することがわかる。これは温度による材料定数の変化(図 4)によるものと考えられる。また $p+q$ は圧縮波が円柱の半径方向を往復するために周期的に振動し、 s もその影響を受けており、一次元解析と二次元解析の違いが現れている。さらに、立上り時間が長くなるにつれて、応力の変動も小さくなっていることもわかる。

図 7 に衝撃端の円柱表面における応力 s の時間変動を示す。この場合も中心軸での応力変動と同様な傾向がみられる。

図 8 に $\tau=10$ の時点での中心軸における応力 s の分布を示す。図 8 (a) には応力 $p+q$ の変動もあわせて示してある。 τ_r が短い場合には応力変動が大きく、特に $T_0=1073$ K の場合は著しく変動していることがわかる。また τ_r が大きくなると応力変動は小さくなっている。これらの図より、衝撃端面近傍では温度による影響により、作用する温度が室温より高くなるにつれて応力が低下し、室温より低くなると逆に増加する

図 5 温度分布

ことがわかる。また、それより遠いところでは温度分布が室温に近づくことに対応して、応力値が逆転していることがわかる。図5の温度分布から考えると、高温の場合には衝撃端から離れるほど温度が室温に近づくので、弾性係数が大きくなり、衝撃端で生じたひずみがそのような部分を伝ばしていくことになるために応力は高くなり、応力値が逆転するものと考えられる。低温の場合はこの逆である。

図9に $\tau=10$ の時点での円柱表面での応力 s の分布を示す。図からわかるように、 τ_r が大きくなるにつれて応力の変動が少なくなり、応力値の差は衝撃端をのぞいて小さくなる傾向にある。図9(b)の $\tau_r=6.0$ (約10 μ sに相当)のときの s の分布より、衝撃端における各温度での応力値と室温(293 K)との相対的な差 $\{s-s[293\text{ K}]/s[293\text{ K}]\}$ を調べると、77 Kでは約4%、673 Kとでは約6%、1073 Kとでは約14%程度の相違があることがわかる。また、衝撃端から離れるに従い応力値の逆転が起こるために、衝撃端で生じた応力とそこから離れた位置での応力とではかなりの差

が生じることになる。以上の結果より、ホプキンソン棒法において、試験片を入・出力棒ではさみ、その部分を炉や低温槽に入れ、そこから離れた位置にひずみゲージを貼って応力波をピックアップする方式では、非常に急激な温度こう配があるときには、試料端面近傍の応力の値がひずみゲージ位置での応力の値と同じであるという仮定が成立しなくなる。したがって、そのようなときに実験データから応力やひずみ等を求めると、かなりの誤差を含むことになる。

いま、温度こう配による影響を実験誤差内とみなす場合として、実験に対する許容誤差を約3%程度である場合を考える。図9(b)から、77 Kと293 Kの計算結果は衝撃端を除きほぼ一致し、衝撃端においても約4%の誤差であることより類推すると、この計算条件下で衝撃端に与えることのできる温度は約 ± 200 K程度になるものと思われる。簡単化のため、この数値計算例では密度 ρ を一定としているが、一次元理論により検討してみると、衝撃により発生する応力 σ は c を一次元の弾性波の伝ば速度とすると $\sigma=\rho cv=$

図6 衝撃端中心での応力変動

図7 衝撃端側面での応力変動

(a)

(b)

図 8 中心軸での応力変動

$\sqrt{\rho E} v$ で与えられ、衝撃端に与えられる速度 v は一定であり、図 4 の温度による E の変化に比べて、 ρ がそれほど急激には変化しないことから、密度の温度変化も考慮した場合も、この計算結果とそれほど大きな相違はないと思われる。しかしながら、密度の温度変化を考慮した場合も現在検討中である。

4. 結 言

二次元波動問題に対して有用である従特性曲線に沿って数値積分する方法を拡張し、非等質な固体中の波動伝ば問題の解析方法を示した。解析例として、半無限長の弾性円柱の端面を加熱(または冷却)することにより円柱内に温度こう配が生じているときに、その端面に縦衝撃が作用する場合の波動伝ば問題を取り上げ、数値計算結果により、円柱の端面に与えられる温度および衝撃速度の立上り時間が円柱内の応力波の伝ばに影響を及ぼすことを明らかにした。また、衝撃実

(a)

(b)

図 9 円柱表面での応力変動

験に広く用いられているホプキンソン棒法で高温(または低温)実験を行う場合の検討も行い、円柱内に非常に急激な温度こう配のある場合には、衝撃端で発生する応力値が室温の場合とかなり異なるうえに、応力波が伝ばするにつれ、温度による弾性係数の変化に対応して応力値が変化することから、従来の入・出力棒の温度こう配を考慮しないホプキンソン棒法により求めた応力、ひずみおよびひずみ速度はかなりの誤差を含むことになることを示した。

終わりに、温度分布に関して、ご助言いただいた大阪府立大学・谷川義信教授、石田良平助手に謝意を表す。

文 献

- (1) 谷村・ほか 2 名, 機論, 52-484, A(1986), 2680.
- (2) 劉・ほか 3 名, 機論, 54-502, A(1988), 1284.
- (3) 劉・ほか 3 名, 材料, 36-411(1987), 1309.
- (4) 劉・ほか 3 名, 機論, 55-515, A(1989), 1572.
- (5) 深津・ほか 2 名, 機論, 50-453, A(1984), 869.
- (6) 例えば, 田中・木下, 機論, 32-241(1966), 1328.

- (7) 田中・榎本, 機論, 53-496, A (1987), 2313.
 - (8) 田中・ほか 3 名, 機論, 53-496, A (1987), 2318.
 - (9) Francis, P. H. and Lindholm, U. S., *J. Appl. Mech.*, (1968), 441.
 - (10) 伊達, 材料, 30-338 (1981), 1102.
 - (11) 竹内・ほか 4 名, 材料, 26-282 (1977), 210.
 - (12) 竹内・ほか 3 名, 材料, 28-312 (1979), 852.
-