応力増分依存性を考慮した弾塑性体構成式の一表現*

(第4報, 負荷方向と応力増分依存性パラメタの関係)

伊藤 耿一^{*1}, 呉屋 守章^{*2}, 高橋 寛^{*3}
高津 宣夫^{*1}

An Expression of Elastic-Plastic Constitutive Law Incorporating A Stress Increment Dependence (4th Report; Determination of Stress Increment Dependency Parameters at the Proportionally Prestressed State)

Koichi ITO, Moriaki GOYA, Hiroshi TAKAHASHI, and
Nobuo TAKATSU

In the first report, a new expression of a constitutive law for elastic-plastic material was proposed using two transition parameters which describe the stress increment dependency. These parameters denote the magnitude and the direction of plastic strain increments. In this report, these are determined by the biaxial loading test of aluminum specimens using testing machine constructed by trial and by the numerical simulation based on the KBW model. The results show that the stress increment dependency is the most considerable at the simple tension and decreases when the stress vector is turned toward the direction of the pure shear.

Key Words: Plasticity, Constitutive Equation, Stress Increment Dependency, Polycrystal Model

1. まえがき

J2-流れ理論のようになめらかな塑性ポテンシャルによる塑性構成式は, 塑性ひずみ増分の方向が応力増分の方向に依存しないので, 塑性不安定分岐問題のように, 負荷方向が急激に変わる塑性変形の記述には不適当であることが指摘されている⁽¹⁾。これを改良する目的でいくつかの構成式が提案され⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾ているが, その多くは降伏曲面の負荷点において角点(尖り点)が形成されていることを前提として, 塑性ひずみ増分の応力増分方向依存性を考慮している。従って, これらの構成式では角点は負荷点とともに移動しなければならない。単結晶の降伏曲面の角点は多重すべりの起こる単軸応力の負荷方向のみであり, 塑性ひずみ増分の応力増分依存性も単軸応力状態に限られる。しかし, 実際の多結晶は種々の方位を持つ結晶粒からなるので, 巨視的には単軸応力ではなくとも微視的には単軸応力

状態の結晶粒を含むので, ある程度の応力増分依存性が存在すると考えられる。

著者が先に提案した構成式⁽⁵⁾では応力増分依存性を直接的に表わすパラメータを導入している。それは与えられた応力増分の方向 α に対して生ずる塑性ひずみ増分の大きさ μ および方向 β であり, これらを任意負荷方向とその履歴に対して決定できればこの構成式は完結する。しかし, それはもはや数理論的な展開のみでは不可能であり, 実験あるいは多結晶モデルなどの結晶塑性学的観点に立脚した変形の物理モデルによるシミュレーションによらなければならない。そこで, 円管の内圧と軸力による2軸負荷試験装置を試作し, また, それによるアルミニウム円管の実験並びに多結晶モデル(KBWモデル)シミュレーションの結果から, 比例負荷による前負荷方向と μ, β の関係を定めることを試みた。

2. 応力増分依存性構成式の呉屋-伊藤の表現

詳細は省き形式のみを以下に略記する。

$$\dot{\epsilon}' = \frac{\dot{\sigma}'}{2G^*} + \frac{(\sigma' : \dot{\epsilon}')\sigma'}{S^*} \quad (1)$$

* 平成元年10月16日 第40回塑性加工連合講演会において講演, 原稿受付 平成2年4月16日。

^{*1} 正員, 東北大学工学部 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

^{*2} 正員, 琉球大学工学部 (〒903 沖縄県西原町千原1)。

^{*3} 正員, 山形大学工学部 (〒992 米沢市城南4-3-16)。

$$\left. \begin{aligned} G^* &= \frac{G \sin \alpha}{\sin \alpha + \frac{(3G/H')\mu \sin \beta}{\bar{\sigma}^2 \left\{ \frac{H' \sin 2\alpha}{9\mu G} + \frac{2}{3} \sin \alpha \cos \beta \right\}}} } \\ S^* &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1}(\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^I / |\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I|) \\ \mu(\alpha) &= H' |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P| / |\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I| \\ \beta(\alpha) &= \cos^{-1}(\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P / |\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P|) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 $\epsilon', \sigma', \dot{\epsilon}^P$ はそれぞれ偏差応力、偏差ひずみ、および塑性ひずみテンソルを表し、 $(\cdot)$ はそれらの時間増分を示す。また、 G, H' は横弾性係数および比例負荷に対する加工硬化係数であり、 $\mathbf{n}$ は偏差空間での現在の負荷方向を示す単位ベクトルである。さらに α は $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I$ の $\mathbf{n}$ 方向からの振れ角であり、その応力増分方向変化に対して生じた塑性ひずみ増分 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ の方向の $\mathbf{n}$ からの振れ角を β で、大きさを μ で表している。このふたつのパラメータは J_2 -流れ則においては常に

$$\left. \begin{aligned} \mu(\alpha) &= \cos \alpha \\ \beta(\alpha) &= 0^\circ \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となるので、この式からの偏差が塑性ひずみ増分の応力増分依存性の程度を示すことになる。

3. 円管の2軸組合せ負荷実験

3.1 実験装置 内圧と軸力の組合せにより、薄肉円管に任意の2軸負荷経路を実現できる油圧サーボ式組合せ負荷試験装置を試作した。試作機の油圧サーボ回路ならびに計測制御系のブロック図を図1に示す。

一端を固定された試料円管に対し、他端を油圧ピストンで引き押しすることにより軸力 W を負荷し、内圧 p は円管内部に導入された作動油圧によって直接与える。これにより、試料円管には

$$\sigma_z = \frac{W}{2\pi RT} + \frac{Rp}{2T}, \quad \sigma_\theta = \frac{R}{T}p$$

なる組合せ平面応力状態が実現される。ここに、 R, T は試料円管の半径および肉厚である。 W と p はひずみゲージ式ロードセルおよび圧力センサにより検出し、ひずみは試料円管の中央部に軸方向、円周方向に直接貼付けた塑性域用ひずみゲージにより検出する。これらの信号はデータロガーによりインターバル計測されパーソナルコンピュータに転送される。また、任意に指定された応力経路を精度良く実現するために、内圧側、軸力側ともに電気油圧式流量制御サーボバルブを採用した。指定された応力経路に対する内圧と軸力の圧力指令信号が計測データに基づいてコンピュータにより計算されてサーボアンプに送られ、内圧、軸力セン

サーの信号によるフィードバック制御を行なった。

3.2 実験条件および方法 供試材は市販のアルミニウム円管 (A 1050) を 400°C で焼き鈍したものであり、初期外径 $R = 32\text{mm}$ 、肉厚 $T = 1.5\text{mm}$ 、変形部の長さは 100mm である。塑性域用箔ひずみゲージ (KFE-5-C1 共和電業製) を接着後、試験機にセットした。

図1 試験装置油圧回路図並びに計測制御ブロック図

図2 偏差面における負荷経路と塑性ひずみ増分ベクトル

ひずみゲージの公称最大ひずみは8%であるが、予備的な実験により信頼できるひずみ測定値の上限は4%とした。また、このひずみ範囲では円管のたる型変形の影響は殆どないものと考えて応力、ひずみを評価した。さらに、縦弾性係数 $E=7200\text{MPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ としてフック則により評価される弾性ひずみ成分を、測定されたひずみ成分から差し引いたものを塑性ひずみ成分とした。

応力、および塑性ひずみの成分は5次元偏差空間内の平面ベクトル $\mathbf{S}=(S_1, S_2)$, $\mathbf{E}=(E_1, E_2)$ で次のように表現される。

$$S_1 = \sigma_x - \sigma_\theta/2, \quad S_2 = \sqrt{3}\sigma_\theta/2 \quad (5)$$

$$E_1 = \varepsilon_x^p, \quad E_2 = (\varepsilon_x^p + 2\varepsilon_\theta)/\sqrt{3} \quad (6)$$

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} \quad (7)$$

$$DE_i = \sqrt{(E_{1(i+1)} - E_{1(i)})^2 + (E_{2(i+1)} - E_{2(i)})^2} \quad (8)$$

$$E = \sum DE_i = E_{i-1} + DE_i \quad (9)$$

ここに式(8),(9)の下添字 i はインターバル計測における i 番目の測定値であることを示す。

4. 実験結果

今回は前荷方向と応力増分依存性の関係を調べることを目的として、図2に示す記号でいくつかの θ 方向の比例荷重による前荷後の折り曲げ角 α による折り曲げ荷重試験を行った。等方性材料ならば θ については 0° から 30° の範囲を調べれば十分であるが、供試材は初期異方性をもつので 90° の範囲で試験をした。ただし、応力増分依存性についての検討は 0° から 60° の範囲についての実験データについて行い、特に異方性を考慮した考察は行っていない。折曲げ点は予ひずみ $E=0.01$ を目標としたが多少ばらつきはある。折曲げ角 α は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の3通りである。同一の荷重経路について最低3本の試料について試験を行い、それらの平均値で結果を整理した。また、試験により得られた荷重過程途上のひずみ増分ベクトルと比例荷重過程での等ひずみ線図の例を図3に示す。ひずみ増分ベクトルは各荷重点において $DS=3\text{MPa}$ に対応するひずみ成分の変化をもって定義した。

4.1 比例荷重過程 ひずみ増分ベクトルの方向はトレスカの六角形の角点にあたる、 $\theta=0^\circ, 60^\circ$ および、その辺の中点方向に対応する $\theta=30^\circ, 90^\circ$ ではほぼ荷重方向と平行であるが、それ以外の方向では荷重方向から、

トレスカの六角形の辺の法線方向に偏る傾向を示している。これより塑性ポテンシャル面を考えるときはトレスカ型に近いことが推定される。等ひずみ線図より推定される降伏曲面もミーゼス円とトレスカ形の間的な形である。

図3 比例荷重と折曲げ荷重過程におけるひずみ増分ベクトルと等ひずみ線図(実験)

図4 比例荷重と折曲げ荷重過程におけるひずみ増分ベクトルと等ひずみ線図(KBW)

4.2 比例荷重後の折曲げ過程 図は折曲げ角 $\alpha=30^\circ$ の場合であるが、トレスカの六角形の辺の法線方向である $30^\circ, 90^\circ$ 方向からの折曲げ過程では、ひずみ増分ベクトルの方向は殆ど変化しないのに対し、その他の方向からの折曲げ後の過程では、ひずみ増分ベクトルの方向は次第にトレスカの辺の法線方向に向かって変化する傾向が認められる。これより、応力増分

の方向変化によるひずみ増分の方向変化は、各方向の比例負荷時のひずみ増分の方向からトレスカの辺の法線方向までに限定されると推定される。従って、応力増分依存性は単軸引張りおよびそれと塑性的に等価な応力状態であるトレスカの角点方向で最も大きく、純粋せん断応力状態に対応する辺の中点方向に向かって次第に小さくなることが示唆される。

5. KBW モデルによる数値シミュレーション

前報⁽¹⁰⁾では、多結晶の変形モデルの一つである KBW モデルによる単軸方向、純粋せん断方向の前負荷後についての数値計算の結果による μ, β を用いて、応力増分依存性構成式 (1) の分岐解析への適用を試みた。そこで今回も前節の実験結果と対比させて考察する目的で、KBW モデルによるシミュレーションを行った。

KBW モデルの詳細は文献^{(8),(9)}に譲り、以下に概略だけを述べる。KBW モデルでは多結晶体を均質等方な弾性定数を持った球状結晶粒による一様な方位分布の集合体とみなし、単結晶の構成式から多結晶体の塑性変形を予測する。介在物問題に対する Eshelby⁽¹²⁾の解より、多結晶体とそれを構成している各結晶粒の応力、塑性ひずみを次式で関連づける。

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{S}} - 2G(1-\eta)(\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{E}}) \quad (10)$$

$$\eta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \quad \nu: \text{ポアソン比}$$

ここに $\dot{\mathbf{s}}$, $\dot{\mathbf{e}}$ は結晶粒の応力および塑性ひずみ速度であり結晶粒の方位によって異なる。まず、特定の結晶粒に対して $\dot{\mathbf{s}}$ を与え、それをその結晶粒の結晶構造に基づくすべり系上のせん断応力に分解し、すべり系の硬化則により活動すべり系とそのすべり量を決定する。求められたすべり量の総和としてその結晶粒の塑性ひずみ $\dot{\mathbf{e}}$ を定義し、その全方位平均

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \dot{\mathbf{e}} d\psi \quad (11)$$

として多結晶体の塑性ひずみ速度を評価する。ここに (φ, θ, ψ) は巨視的座標系に対する各々の結晶粒の方位を示すオイラー角である。その結果、式 (10) より多結晶体の応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ を評価し、これが指定した負荷方向と異なるときには最初の仮定を修正して再計算する。

図 4 にその結果によるひずみ増分ベクトルと等ひずみ線図を示すが、実験結果の図 3 と同様の特徴を示している。すなわち、比例負荷過程では単軸応力方向と純粋せん断方向においてひずみ増分の方向は負荷方向に一致しているが、その他の方向においては負荷方向から純粋せん断方向に偏向しており、単軸前負荷から

の折曲げ過程では前負荷方向から純粋せん断方向に漸近的に変化している。しかも、これらの特徴は KBW モデルの結果の方がより明瞭である。等ひずみ面もトレスカ型に近い形状を示している。

6. 順方向による応力増分依存性の評価

さて、著者らが提案した構成式 (1) ではひずみ増分ベクトルの振れ角は前負荷方向から測った角度 β で定義されている。比例負荷時には J2 流れ則のように、負荷方向とひずみ増分方向が一致している場合にはこれにより、応力増分依存性を統一的に表現できる。しかし、図 3, 4 に見られるように、それが比例負荷時の負荷方向によって異なる場合には同一の α に対するひずみ増分ベクトルの振れ角 β の大きさのみで、応力増分依存性の程度を判断することはできない。

高橋⁽⁷⁾は任意の負荷点に対して後続の応力増分方向と塑性ひずみ増分方向が一致するときの応力増分方向を順方向 (Natural direction θ_n で表す) と定義し、これをパラメータとして μ, β についての以下のような近似式を提案し、Lin モデルによる数値シミュレーションの結果に対して極めて良い近似であることを示している。

偏差応力空間で順方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}_N$ とし、あらためてこの方向を基準として $D\mathbf{S}, D\mathbf{E}$ の振れ角 α_I, β_I を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_I &= \cos^{-1}(\mathbf{n}_N \cdot D\mathbf{S} / |D\mathbf{S}|) \\ \beta_I &= \cos^{-1}(\mathbf{n}_N \cdot D\mathbf{E} / |D\mathbf{E}|) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\alpha_I = \alpha - (\theta_n - \theta), \quad \beta_I = \beta - (\theta_n - \theta) \quad (13)$$

そこで、前報⁽¹⁰⁾で提示した遷移関数の近似式にかえて、 θ_n に依存する係数 C と指数 m を導入して μ, β_I と α_I との間に次式を仮定する⁽⁷⁾。

$$\beta_I = C(\theta_n) \alpha_I \quad (14)$$

$$\mu(\alpha_I) = \{\cos(\alpha_I - \beta_I)\}^{1+m(\theta_n)} \quad (15)$$

ここで、単軸方向で応力増分依存性が最も大きく純粋せん断方向に近づくにつれて減少し、純粋せん断方向では上式は式 (2) に一致することを考慮して $C(\theta_n)$ を次のように仮定する。

$$C(\theta_n) = C_{\max} \phi(\theta_n) \quad (16)$$

$$\phi(\theta_n) = \text{Min}[(\theta_S - \theta_n)/30^\circ] \quad (17)$$

 図5 前負荷方向 θ と順方向 θ_n の関係

ここに、 θ_S は純粋せん断の負荷方向（トレスカの辺の中点）であり、実験ならびに KBW モデルの結果からみてそのとき $\theta_S = \theta_n$ ，すなわち $\phi = 0$ と見てよい。また、 θ が θ_S からトレスカの角点方向に向かうと ϕ は増大し、角点で最大となる。等方性材料ではそこで再び θ_n は負荷方向と一致し $\phi = 1$ となる。そこでトレスカ型の角点を仮定するならば式(16)より

$$C_{max} = \beta_{max}/\alpha_{max} = 30^\circ/120^\circ = 1/4 \quad (18)$$

また、式(14)の指数 m は

$$m = 0.9C/C_{max} = 0.9\phi(\theta_n) \quad (19)$$

がよい近似であることが示されている⁽⁷⁾。

以上の関係式を採用するならば、任意の負荷点において順方向 θ_n を決定することで応力増分依存性を考慮した構成式(1)は完結する。ここでは各前負荷点で折曲げ角を変えた行った折曲げ負荷過程の結果より $\beta - \alpha$ 線図を描き、 $\beta = \alpha$ の直線との交点を図から読みとることで評価した。図5は実験および KBW モデルにより求められた比例負荷による前負荷方向 θ と順方向 θ_n の関係である。 J_2 流れ理論によれば $\theta \equiv \theta_n$ であり、トレスカ型の降伏関数を用いると角点方向では $\theta_n = \theta$ ，その他の負荷方向では $\theta \equiv 30^\circ$ であるが、実験および KBW モデルとともにその中間の傾向を示しており、KBW モデルの方がよりトレスカ型に近い。ここで得られた θ_n により整理をした μ, β_I と α_I の関係を図6は示す。前負荷方向 θ が純粋せん断方向から離れるほど β_I の変化が大きい傾向を示しているが KBW モデルの方が一般に β_I の α_I 依存性が強い。 $\mu - \alpha_I$ 関係については、角点方向と

純粋せん断方向についてのみ示した。

 図6 応力増分依存性パラメータ μ, β_I の前負荷方向 θ による変化

その中間の方向については実験結果のばらつきが大きく、前負荷方向の違いによる有為な差が認められなかった。これは予ひずみが比較的小さく、折曲げ点の変動による加工硬化率の変化が大きかったためと思われる。しかし、純粋せん断方向では殆ど J_2 流れ則と一致しているのと較べて、角点方向($\theta = 0^\circ, 60^\circ$)では、 α_I の変化に対する μ の減少は緩やかであることは明確に認められる。図中の一点鎖線は実験結果による θ_n を用いた式(14)(15)による近似曲線であるが、 β_I については比較的良い近似であることがわかる。

7 考察

上に示した実験、KBW モデルのいずれも順方向 θ_n の純粋せん断方向からの偏差はトレスカの角点方向で最も大きく、純粋せん断方向に近づくに連れて小さくなり、応力増分依存性も同様の傾向を示す結果を与えている。この物理的な意味を考察してみる。

多結晶体を無数のすべり系をもつ単結晶とみなしたすべり理論に立脚した考察で、高橋⁽⁷⁾は多結晶体のす

べり系の数がいかに多くとも、降伏曲面はトレスカ型になり、応力増分依存性は単軸応力状態であるその角点方向に限定されることを示している。しかし実在の多結晶体は種々の方位をもつ結晶粒からなり、互いに拘束し合ってそれぞれが異なったひずみを生ずるので、巨視的には単軸応力とは異なった負荷を受けていても、微視的には単軸応力状態の結晶粒がある割合で存在し得る。その結果、単軸以外の応力状態でもある程度の応力増分依存性を示すことになる。そのとき各前負荷方向に対して、単軸応力状態にある結晶粒の数の、全結晶粒中に占める比率が応力増分依存性の程度を支配することになる。常識的に考えて、巨視的応力が単軸方向に近いほどその比率は高まり、結果として応力増分依存性は大きくなる。また、この観点から順方向 θ_n は次のように物理的に解釈できる。ある前負荷状態で、仮に単軸応力状態にある結晶粒が全く存在しないとすれば、順方向 θ_n は純粋せん断方向の 30° であるはずで、単軸応力の結晶粒が存在するとその比率に応じて順方向は純粋せん断の方向から偏ることになる。従って、順方向 θ_n の純粋せん断方向 θ_s からの偏差、すなわち式(17)の ϕ は単軸応力状態にある結晶粒の比率を評価するパラメータとみなすことができる。

巨視的に単軸以外の応力のもとで単軸応力状態の結晶粒が存在するのは、互いに方位の異なる周囲の結晶粒との間の干渉応力、すなわち微視的応力場による結果と考えられる。この点に関して KBW モデルは配列平均的に考慮されているので⁽⁹⁾、実際の多結晶体よりも各々の結晶粒が自由に変形し易く、 ϕ (図5の θ_n)に関して実験結果に較べて単結晶に近い結果となったと推定される。

8 結 言

内圧と軸力によるアルミニウム円管の2軸負荷試験ならびに KBW モデルシミュレーションによって、比例前負荷方向と応力増分依存性の程度との関係を得た。その結果、応力増分依存性を表す二つのパラメータのうち、ひずみ増分方向変化を示す β_I の応力増分方向依存性は、単軸応力状態に対応するトレスカの角点方向で最も大きく純粋せん断方向に向かって漸近的に減少することが明らかになった。また、任意の前負荷点において、塑性ひずみ増分方向と一致する応力増分方向を順方向として定め、これにより応力増分依存性パラメータを表現できることを示した。

文 献

- (1) 伊藤・竹山, 塑性と加工, 23-254, (1982), 245.
- (2) 伊藤・竹山, 同上, 23-256, (1982), 410.
- (3) 後藤, 機論, 47-424, A(1981), 1389.
- (4) Christoffersen, J. & Hutchinson, J.W., *J. Mech. Phys. Solids*, 27-516(1979), 465.
- (5) 呉屋・伊藤, 機論, 54-504, A(1988), 1617.
- (6) Batdorf, S.B. & Budiansky, B., *J. Appl. Mech.*, 21(1954), 323.
- (7) Takahashi, H., Ito, K. & Goya, M., *Proc. 2nd Int. Symposium on PLASTICITY*, (1989), 657.
- (8) Budiansky, B. & Wu, T.T., *Proc. 4th Congr. Appl. Mech.*, 2(1962), 1175.
- (9) 高橋, 機論, 42-354, (1976), 396.
- (10) 伊藤・呉屋, 機論, 55-520, A(1989), 2475.
- (11) 呉屋・伊藤, 機論, 56-521, A(1990), 101.
- (12) Eshelby, J.D., *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 241(1951), 376.