間接境界積分法における数値面積分の精度*

岸田路也^{*1}, 佐々木一彰^{*1}, 町野史郎^{*2}Accuracy of Numerical Surface Integrals
in the Indirect Boundary Integral Method

Michiya KISHIDA, Kazuaki SASAKI and Shiroh MACHINO

This paper describes the accuracy of surface integrals in the indirect boundary integral method containing singular integrals. Here, the surface integral is carried out directly and numerically by the use of Simpson's and Legendre-Gauss's quadrature formulae. Also, the line integral, obtained by applying Gauss-Ostrogradskii's transformation to the surface integral, is examined. The accuracy is evaluated by the convergence behaviors of surface and line integrals and by the comparison with the analytically obtained integral values.

Key Words: Elasticity, Indirect Boundary Integral Method, Surface Integral, Accuracy, Line Integral, Gauss-Ostrogradskii's Transformation, Numerical Analysis

1. ま え が き

境界積分法を用いた応力解析で現れる方程式は、その名のように、境界上の未知量に関する境界積分方程式である。この方程式を解析的に解くことは困難であって、数値的に解かざるを得ない。三次元問題の場合、未知量を面積要素内で一定とするなどの離散化手法が用いられるが、その積分核についての数値面積分の精度が解析法の精度に直接関わってくることになる。しかし、それらについてふれた論文は、著者らの知る限りでは、ほとんど見られない。そこで本論文では、著者らが現在まで数多くの境界値問題の解析に用いてきた間接境界積分法^{(1)~(3)}を例に、数値面積分の精度について述べることにする。

ここでは、面積分を直接的に数値面積分で行った場合と、積分定理を用いて線積分に変換した後数値線積分で行った場合について、積分領域分割数の増加に伴う積分値の収束状態、また、解析的に積分が可能なものについてはその積分値との比較によって、数値面積分の精度を評価した。これらの数値面積分および線積

分は Simpson および Legendre-Gauss の積分公式によった。

2. 基礎方程式

均質かつ等方性を有する弾性体に対する間接境界積分法では

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{P}) &= \vec{B}_I(\vec{P}) + \vec{B}_{II}(\vec{P}) \\ \vec{B}_I(\vec{P}) &= \int_S \vec{\mu}(\vec{q})(1/|\vec{q} - \vec{P}|) dS(\vec{q}) \\ \vec{B}_{II}(\vec{P}) &= \int_S \vec{\xi}(\vec{q}) \{ \vec{c} \cdot \nabla_{\vec{q}} (1/|\vec{q} - \vec{P}|) \} dS(\vec{q}) \\ &\dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

なる層ポテンシャル $\vec{B}$ の一次・二次の偏導関数を考えれば良い^{(1)~(3)}。ここで、 $\vec{\mu}$ および $\vec{\xi}$ は境界面 S 上で規定される面密度ベクトルであり、 $\vec{B}_I$ は大きさ $|\vec{\mu}|$ の一重層ポテンシャル、 $\vec{B}_{II}$ は能率 $c|\vec{\xi}|$ の二重層ポテンシャルを表している⁽²⁾⁽³⁾。また、 $\vec{P}$ および $\vec{q}$ はそれぞれ領域 R 内および境界面 S 上の点を表す位置ベクトル、 $\nabla_{\vec{q}}$ は S 上の点 $\vec{q}$ での勾配、 $|\vec{q} - \vec{P}|$ は点 $\vec{q}$ と点 $\vec{P}$ 間の距離である。

本論文では、代表的な関数形として以下に示すような偏導関数を取り上げることとする。なお、 $r = |\vec{q} - \vec{P}|$ とし、 $\vec{P}$ 、 $\vec{q}$ および点 $\vec{q}$ での単位法線ベクトル

* 原稿受付 平成2年4月19日。

^{*1} 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13西8)。^{*2} 東陶機器(株) (〒824 行橋市大字今井1180)。

$\vec{n}_q$ の直交直線座標系での成分を、それぞれ、 (x, y, z) , (x^*, y^*, z^*) および (n_{qx}, n_{qy}, n_{qz}) とし、 $x' = x^* - x$, $y' = y^* - y$, $z' = z^* - z$ である。また、コンマのあとの添字はその座標成分に関する微分(例えば、 x は x に関する微分 $\partial/\partial x$)を表す。

$$\begin{aligned}\vec{B}_I &= \int_S \vec{\mu} \frac{1}{r} dS \\ \vec{B}_{I,x} &= \int_S \vec{\mu} \frac{x'}{r^3} dS, \quad \vec{B}_{I,y} = \int_S \vec{\mu} \frac{y'}{r^3} dS \\ \vec{B}_{I,xx} &= \int_S \vec{\mu} \frac{3x'^2}{r^5} dS \\ \vec{B}_{I,xy} &= \int_S \vec{\mu} \frac{3x'y'}{r^5} dS \\ \vec{B}_{II} &= - \int_S c \xi \frac{n_{qx}x' + n_{qy}y' + n_{qz}z'}{r^3} dS \\ \vec{B}_{II,xx} &= \int_S c \xi \frac{3(n_{qx}z' + n_{qz}x')}{r^5} dS \\ &\quad - \int_S c \xi \frac{15x'z'(n_{qx}x' + n_{qy}y' + n_{qz}z')}{r^7} dS \\ \vec{B}_{II,yx} &= \int_S c \xi \frac{3(n_{qy}z' + n_{qz}y')}{r^5} dS \\ &\quad - \int_S c \xi \frac{15y'z'(n_{qx}x' + n_{qy}y' + n_{qz}z')}{r^7} dS \\ &\dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

3. 数 値 積 分

ここでは、便宜上、 $z=0$ 平面を境界面 S とする。また、数値計算の性質上最も解析精度が悪いと考えられる S 上の点 $\vec{p}$ を固定点とした積分について考える。

3・1 特異積分 $\vec{p} = \vec{q}$ の場合、層ポテンシャルの積分核は特異となる。この特異積分を Hadamard の有限部分積分で行う。図 1 に示すような $\vec{p}$ を含む領域 ΔS 上で密度関数 $\vec{\mu}$ および ξ を一定とする。点 $\vec{p}$ を原点とする極座標 (r, ϕ) をとり、 $\rho(\phi) = |\vec{q} - \vec{p}|$ とする。 $\vec{p}$ を中心とする半径 ε の円形領域 ΔS_ε を考

図 1 特異領域

え、最終的に $\varepsilon \rightarrow 0$ としたとき、次のような有限部分積分を考えるものとする。

$$\begin{aligned}\vec{\mu} \int_{\Delta S} F dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{\mu} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{\rho(\phi)} F(r, \phi) r dr d\phi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{\mu} \int_0^{2\pi} [G(\rho(\phi), \phi) - G(\varepsilon, \phi)] d\phi \\ &= \vec{\mu} \int_0^{2\pi} H(\rho(\phi), \phi) d\phi \dots\dots\dots(3)\end{aligned}$$

ここで、 $G(r, \phi)$ は $\{F(r, \phi)r\}$ の不定積分であり $H(\rho, \phi)$ は $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{G(\rho, \phi) - G(\varepsilon, \phi)\}$ の有限部分である。

このとき、各ポテンシャルおよびその導関数は例えば以下のように表される。

$$\begin{aligned}\vec{B}_I &= \vec{\mu}(\vec{p}) \int_0^{2\pi} \rho(\phi) d\phi \\ \vec{B}_{I,y} &= \vec{\mu}(\vec{p}) \int_0^{2\pi} \log\{\rho(\phi)\} \sin \phi d\phi \\ \vec{B}_{II,yz} &= -\frac{3}{2} c \xi(\vec{p}) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{\{\rho(\phi)\}^2} d\phi \\ &\dots\dots\dots(4)\end{aligned}$$

3・2 線積分への変換 いま、面積分領域を閉曲線 Γ によって囲まれる領域 ΔS とする。関数 f の x あるいは y についての偏微分が ΔS 内および Γ 上で連続であるとき、 ΔS に関する面積分は Gauss-Ostrogradskii の積分定理により

$$\begin{aligned}\int_{\Delta S} \frac{\partial f}{\partial x} dS &= - \int_{\Gamma} f dy^* \\ \int_{\Delta S} \frac{\partial f}{\partial y} dS &= \int_{\Gamma} f dx^* \dots\dots\dots(5)\end{aligned}$$

のような Γ に関する線積分へ変換できる。ここで、線積分の方向は ΔS を左手に見て進む向きである。なお、特異面積分の線積分への変換は Hadamard の有限部分積分と一致することとなる。

3・3 積分領域形状 本論文では、最も一般的と考えられる扇形領域を想定して、その領域に関して積分を行うこととする。積分領域は、図 2 に示すように、点 $\vec{q}_c$ を中点とし、一辺が x 軸上にある、平均半径 R 、幅 h 、開き角 θ の扇形領域 $abcd$ である。扇形寸法は、 $\vec{q}_c$ を通る半径方向長さ h および周方向長さ $R\theta$ がほぼ等しくなるよう、 $\theta \approx h/R$ とした。 S 上の固定点 $\vec{p}$ を x 軸上にとり、距離 $r_c = (|\vec{q}_c| - |\vec{p}|)$ の変化による積分精度の検討を行う。ただし、 $\vec{p} = \vec{q}_c$ の特異領域の場合、図 3 に示すように、点 $\vec{p} (= \vec{q}_c)$ を x 軸上にとるものとする。

この扇形領域に関する数値積分は、辺 ab , bc , cd , da をそれぞれ m 等分し、面積分および線積分ともに、Simpson の積分公式および Legendre-Gauss の 2 点・4 点積分公式を用いて行った。

本論文では、まず、固定点 $\vec{p}=0$ の場合を取り上げ、 $R/h (=r_c/h)=1, 2, 3, 4, 5, 7, 10$ の各々の場合について、 θ を上記のように定め、その扇形領域について分割数 m を増加させながら積分を行った。次に、 $\vec{p} \neq 0$ の場合について、 $R/h=4.5$ 、 $\theta=15^\circ$ の領域に関して、

図2 積分領域形状 ($\vec{p} \neq \vec{q}_c$)

図3 積分領域形状 ($\vec{p} = \vec{q}_c$)

$\vec{p} - |\vec{q}_c| > 0$ および $|\vec{p}| - |\vec{q}_c| < 0$ のそれぞれについて、 $r_c/h=1, 2, 3, 4, 5, 7, 10$ として積分を行った。最後に、同じ $R/h=4.5$ 、 $\theta=15^\circ$ の扇形領域に関し、 $\vec{p} = \vec{q}_c$ (特異領域) の場合の積分を行った。

3.4 積分精度 式(1)などの積分は、線積分へ変換することにより、 $\vec{p}=0$ の場合は解析的に積分可能となり、その他の場合は半径方向への解析的な積分と周方向への不完全な円積分となる。この不完全な円積分は近似計算によって値を求めた。これより、 $\vec{p}=0$ の場合には解析的に求めた線積分値と、その他の場合には近似的に求めた線積分値と、数値的に求めた面積分および線積分値とを比較し、その相対誤差

$$(\text{誤差}) = \frac{|\text{解析値 (近似値)} - \text{数値計算値}|}{\text{解析値 (近似値)}} \times 100 \%$$

によって積分精度を検討することとした。

4. 結 果

ここでは、代表的な関数形として、 $\vec{p} \neq \vec{q}_c$ の場合は $B_{I,x}$ 、 $B_{I,xx}$ 、 $B_{I,xy}$ 、 $B_{II,xz}$ を、また、特異積分の場合は $B_{I,y}$ 、 $B_{I,xy}$ 、 $B_{II,yz}$ を取り上げ、結果を示した。

図4および表1(a)-(d)に、 $\vec{p}=0 \neq \vec{q}_c$ 、 $r_c/h=1$ の場合について、種々の積分方法による分割数 m の増加に伴う各関数形の積分値の誤差および収束状況を示

図4 積分分割数 m の増大に伴う積分誤差の収束 ($\vec{p}=0$ 、 $r_c/h=1$)

表 1 積分分割数 m の増大に伴う積分値の収束 ($\bar{p}=0, h=1, r_c/h=1$)(a) $B_{I,x}$, 解析値 $I=0.92445$, (): I との誤差 (%)

m	シンプソン		ガウス (2点公式)		ガウス (4点公式)	
	面積分	線積分	面積分	線積分	面積分	線積分
1	0.93530 (1.1739)	0.93497 (1.1377)	0.91775 (0.7249)	0.91797 (0.7012)	0.92442 (0.0038)	0.92442 (0.0038)
2	0.92564 (0.1285)	0.92562 (0.1263)	0.92368 (0.0833)	0.92369 (0.0818)	0.92445 (0.0000)	0.92445 (0.0000)
3	0.92473 (0.0304)	0.92473 (0.0300)	0.92467 (0.0200)	0.92427 (0.0197)	0.92445 (0.0000)	0.92445 (0.0000)
4	0.92455 (0.0104)	0.92455 (0.0103)	0.92439 (0.0070)	0.92439 (0.0068)	0.92445 (0.0000)	0.92445 (0.0000)
5	0.92449 (0.0045)	0.92449 (0.0044)	0.92442 (0.0030)	0.92442 (0.0029)	0.92445 (0.0000)	0.92445 (0.0000)
10	0.92445 (0.0003)	0.92445 (0.0003)	0.92445 (0.0002)	0.92445 (0.0002)	0.92445 (0.0000)	0.92445 (0.0000)

(b) $B_{I,xx}$, 解析値 $I=1.57596$, (): I との誤差 (%)

m	シンプソン		ガウス (2点公式)		ガウス (4点公式)	
	面積分	線積分	面積分	線積分	面積分	線積分
1	1.66956 (5.9389)	1.61155 (2.2580)	1.52015 (3.542)	1.55464 (1.3529)	1.57545 (0.0326)	1.57577 (0.0125)
2	1.58767 (0.7430)	1.58045 (0.2847)	1.56847 (0.4758)	1.57309 (0.1823)	1.57595 (0.0007)	1.57596 (0.0003)
3	1.57891 (0.1867)	1.57709 (0.0716)	1.57404 (0.1219)	1.57523 (0.0467)	1.57596 (0.0000)	1.57596 (0.0000)
4	1.57700 (0.0659)	1.57636 (0.0253)	1.57528 (0.0434)	1.57570 (0.0166)	1.57596 (0.0000)	1.57596 (0.0000)
5	1.57642 (0.0286)	1.57614 (0.0110)	1.57567 (0.0189)	1.57585 (0.0073)	1.57596 (0.0000)	1.57596 (0.0000)
10	1.57599 (0.0020)	1.57589 (0.0008)	1.57594 (0.0013)	1.57596 (0.0005)	1.57596 (0.0000)	1.57596 (0.0000)

(c) $B_{I,xy}$, 解析値 $I=1.41615$, (): I との誤差 (%)

m	シンプソン		ガウス (2点公式)		ガウス (4点公式)	
	面積分	線積分	面積分	線積分	面積分	線積分
1	1.50423 (6.2200)	1.47157 (3.9135)	1.36354 (3.7148)	1.38294 (2.3449)	1.41568 (0.0326)	1.41584 (0.0217)
2	1.42688 (0.7583)	1.42313 (0.4934)	1.40927 (0.4858)	1.41167 (0.3160)	1.41614 (0.0007)	1.41614 (0.0005)
3	1.41883 (0.1896)	1.41790 (0.1241)	1.41493 (0.1238)	1.41500 (0.0810)	1.41615 (0.0000)	1.41615 (0.0000)
4	1.41709 (0.0668)	1.41677 (0.0438)	1.41552 (0.0440)	1.41574 (0.0288)	1.41615 (0.0000)	1.41615 (0.0000)
5	1.41656 (0.0290)	1.41642 (0.0190)	1.41588 (0.0192)	1.41597 (0.0126)	1.41615 (0.0000)	1.41615 (0.0000)
10	1.41617 (0.0020)	1.41617 (0.0013)	1.41613 (0.0013)	1.41613 (0.0009)	1.41615 (0.0000)	1.41615 (0.0000)

(d) $B_{II,xx}$, 解析値 $I=4.48785$, (): I との誤差 (%)

m	シンプソン		ガウス (2点公式)		ガウス (4点公式)	
	面積分	線積分	面積分	線積分	面積分	線積分
1	5.17534 (15.3190)	4.71746 (5.1165)	4.09574 (8.7370)	4.35675 (2.9210)	4.48143 (0.1430)	4.48571 (0.0477)
2	4.59154 (2.3106)	4.52244 (0.7709)	4.44225 (1.4560)	4.46604 (0.4858)	4.48767 (0.0039)	4.48779 (0.0013)
3	4.51581 (0.6232)	4.49717 (0.2079)	4.46974 (0.4035)	4.48180 (0.1346)	4.48783 (0.0003)	4.48784 (0.0001)
4	4.49808 (0.2280)	4.49126 (0.0761)	4.48114 (0.1494)	4.48561 (0.0498)	4.48784 (0.0000)	4.48784 (0.0000)
5	4.49238 (0.1011)	4.48936 (0.0337)	4.48486 (0.0666)	4.48685 (0.0222)	4.48784 (0.0000)	4.48785 (0.0000)
10	4.48817 (0.0071)	4.48795 (0.0024)	4.48763 (0.0047)	4.48777 (0.0016)	4.48785 (0.0000)	4.48785 (0.0000)

す。ここで表1は $h=1$ の場合の値である。これより、一般的に線積分へ変換したほうが少ない分割数で精度良く積分できることがわかる。分割数 m の増加に伴

い、数値積分値は解析的な積分値に一樣に収束し、積分方法によらず、 $m \geq 5$ で解析的な積分値との誤差が0.1%以内となる。また、図5に、各関数形について

図5 r_c の変化に伴う基準積分誤差0.1%を満たす最小分割数 ($\vec{p}=0$)

図6 r_c の変化に伴う基準積分誤差0.1%を満たす最小分割数 ($|\vec{p}| > |\vec{q}_c|$)

図 7 r_c の変化に伴う基準積分誤差 0.1% を満たす最小分割数 ($|\vec{p}| < |\vec{q}_c|$) 図 8 積分分割数 m の増大に伴う積分誤差の収束 ($\vec{p} = \vec{q}_c$)

r_c/h の変化に伴う基準誤差 (0.1%) を満たす最小分割数 m を示す。これより、 r_c/h の増加に伴ってより少ない分割数 m で精度の良い積分が可能であり、実際 $r_c/h \geq 3$ では $m=1$ で基準誤差を満たすような精度で積分が可能であることがわかる。

次に、 $\vec{p} \neq 0$ について、図 6 (a)-(d)、図 7 (a)-(d) に各関数形について $|\vec{p}| - |\vec{q}_c| > 0$ および $|\vec{p}| -$

$|\vec{q}_c| < 0$ の場合の距離 r_c の変化に伴う基準誤差 (0.1%) を満たす最小分割数 m を示す。

また、図 8 に、 $\vec{p} = \vec{q}_c$ (特異領域) の場合の各関数形の分割数 m の増加に伴う誤差の変化を示す。ここでは、面積分・線積分をシンプソンの公式を用いて行った場合のみを示した。これらより、特異面積分の場合でも、 $m=50$ 程度で 0.1% 以内の積分精度を有することが示された。

5. ま と め

本論文では、間接境界積分法における各種関数形の数値面積分精度の検討を行った。この結果以下のことが示された。

(1) 一般的に面積分を線積分へ変換した後数値積分するほうが、直接面積分するよりも良い精度で求められる。

(2) 直接面積分を行う場合でも、 $\vec{p} \neq \vec{q}_c$ 、 $r_c/h \geq 1$ については分割数 $m \geq 5$ で、また、 $\vec{p} = \vec{q}_c$ の特異積分についても $m \geq 50$ で、それぞれ、基準値 (解析値または近似値) との誤差 0.1% 以内で積分可能である。

(3) 基準値が求まらず誤差の評価が不可能なため、ここでは示さなかったが、線積分に変換不可能な他の関数形 (例えば $\vec{B}_I$ 、 $\vec{B}_{I,xx}$ など) についても、面積分値の収束状況から、前述の結果と同程度の分割によ

って同程度の精度で積分可能であると考えて良い。

(2) 岸田・藤村, 機論, 48-427, A (1982), 882.

(3) 岸田・佐々木・石田・野口, 機論, 53-489, A (1987), 878.

文 献

(1) Kishida, M., *Theo. Appl. Mech.*, 28 (1980), 139.