BEM解析支援エキスパートシステムの開発*

(第2報 誤差評価とアダプティブメッシング)

結城 良治^{*1}, 曹 国強^{*2}, 上田 壮一^{*3}**Development of Expert System for BEM Analysis
(2nd Report : Error Estimation and Adaptive Meshing)**

Ryoji YUUKI, Guo-Qiang CAO and Soichi UEDA

The development of an expert system for two-dimensional elastostatic BEM analysis has been presented in the 1st report. This paper describes a new efficient non-residual type error estimator by using the direct regular method (DRM) and an adaptive meshing method based on the estimated error. Numerical results on the stress concentration problem as well as on the crack problem are given and the good accuracy and convergence of this error estimator are presented. This a posteriori error estimation and adaptive meshing method are implemented into the expert system for BEM analysis which generates the BEM mesh based on priori error estimation. In the system developed here, the user can estimate the error for the mesh generated by the expert system and refine the mesh automatically to obtain the optimal mesh.

Key Words : Error Estimation, Adaptive Meshing, Direct Regular Method, Elastostatic Analysis, Boundary Element Method, Expert System

1. 緒言

本研究は境界要素法(BEM)解析に伴う専門知識をエキスパート化し, 形状・境界条件の入力だけで手軽にBEM解析ができる解析支援システムをワークステーション上で開発することを目的とする. 前報⁽¹⁾ではオブジェクト指向知識表現を用いたユーザインタフェースの開発および形状・境界条件を入力するだけでBEMのモデリング・メッシングを自動生成するシステムの開発について報告した. このシステムによりBEM解析に必要なメッシュデータが自動生成され, BEMコードに転送され, 数値解析が実行される. しかし, メッシングに関する知識が十分ではない現状では, エキスパートシステム(ES)で生成された要素分割は必ずしも最適なものではなく, 離散化誤差を事後に評価し, その結果に基づき要素再分割, アダプティブ化を図る必要がある.

すでにFEMに関しては誤差評価・アダプティブメッシングに関する多くの研究があり, 実用化の段階に達している^{(2)~(5)}. 最近BEMに関しても誤差評価に関する研究も活発になってきた^{(6)~(12)}. しかし, これらの研究の多くはFEMの誤差評価手法を直接導入し残差ノルムを求めているが, この計算には特異積分の処理などで多大な時間を要し, 効率性・有効性に疑問が残されている.

本報では, 非特異直接法(DRM)を利用したBEM独自の新たな効率的な誤差評価手法を提案し, その有効性をいくつかの解析例を通じて示すとともに, この誤差評価手法を本ESに組み込み, アダプティブメッシングも導入して, 問題・境界条件に応じて適切なメッシングにより高精度な解が自動的に得られる一貫処理システムの構築を目指した.

2. BEMの特異直接法と非特異直接法

ここでは静弾性問題のBEM解析を例として特異直接法と非特異直接法の基礎式をまず示す. 図1の問題

* 原稿受付 平成2年4月26日.

^{*1} 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1).^{*2} 東京大学大学院.^{*3} (株)電通 (〒104 東京都中央区入船2-1).

と DRM の併用解法を採用する。ここでは各要素長を $2L$ として、 $d/L=0.5$ としてソース点を自動生成することにした。未知量は通常の BEM (DSM) と同じく各節点で代表させるが、ソース点を要素端点ではその点で、中間節点では外に設けると、端点では (1) 式、外に設けたソース点では (2) 式を用いて、次式の方程式が得られる。

$$H' \cdot u' = G' \cdot u' \quad (4)$$

この係数マトリックス H' 、 G' は中間節点に対応する成分を除き半分は (3) 式の H 、 G と同じとなり、新たに生成する必要はなく、外に設けたソース点でのマトリックスも特異積分を含まないので効率的かつ精度良く計算できる。

同一要素分割を用いた 2 つの BEM 解は、離散化誤差が大きい要素で著しい相違が生じ、離散化誤差が小さい要素では両者は一致することが数値実験的に明らかとなり^{(11)・(14)}、ここでは両者の解の差を誤差の指標とすることにした。

3.2 誤差指標の計算 2 つの BEM 解は各要素毎に図 4 のようになる。2 つの解の差をとるとしても、その差は要素内で分布し、かつ表面力・変位の各方向成分毎に生じるので、これらをどのように処理し、単一の誤差指標を得るかを考える必要がある。特に BEM では変位・表面力のディメンジョンの異なる量が直接解として求まるので、変位・表面力の誤差をいかに無次元化して表示するか、FEM とは異なる難しさがある。本研究では Guiggiani⁽⁹⁾ の方法を参考にしつつ、以下のような誤差指標を採用した。

両者の BEM の解の差を各節点毎にとり、変位の差を Δu_x 、 Δu_y 、表面力の差を Δt_x 、 Δt_y とする。各節点毎に各成分の誤差をまず次のように計算する。

図4 要素内の誤差の分布

$$\begin{aligned} \epsilon_{ux} &= \Delta u_x / u_{ref}, \quad \epsilon_{uy} = \Delta u_y / u_{ref} \\ \epsilon_{tx} &= \Delta t_x / t_{ref}, \quad \epsilon_{ty} = \Delta t_y / t_{ref} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで u_{ref} 、 t_{ref} は無次元化のための参照値である (後述)。各節点における誤差の指標 η^k は各成分の自乗平均として次式で定義した。

$$\eta^k = 100 \sqrt{(\epsilon_{ux})^2 + (\epsilon_{uy})^2 + (\epsilon_{tx})^2 + (\epsilon_{ty})^2} \quad (6)$$

さらに要素毎のエラーの指標として次式で定義される η^e を用いる (図 4 の面積に相当する)。

$$\eta^e = \int_{S_e} \sum_{k=1}^3 \eta^k N_k dS / L_e \quad (7)$$

ここで N_k は内挿関数、 L_e は各要素の長さである。この η^e を各要素毎に求め、この値が大きいところほど離散化誤差が大きいものと判断する、すなわち誤差の指標とする。

なお、 u_{ref} は通常の BEM 解 (DSM) を用いて、次式で求めた。

$$u_{ref} = \sum_{k=1}^N \int_{S_k} \sqrt{u_{xj}^2 + u_{yj}^2} dS / L_{total} \quad (8)$$

ここで N は全要素数、 L_{total} は境界の全長である。 t_{ref} も同様とする。

図5 誤差評価解析手順

3.3 アダプティブメッシング ここでは再分割の手法としてh法を用いる。各要素毎に求められた誤差指標 η^e の分布を見て、その値の大きいものは4分割、次のレベルは3分割、次は2分割、ある値以下ではそのままとし、再分割を行うこととした。本解析例では、前述の誤差指標 η^e が0.5%以下では再分割は行わないこととし、全要素で0.5%以下になった段階でアダプティブ分割を終了することとした。なおこの手法は今後さらに改良する予定であり、r法の導入やFEMのアダプティブ化の技法の導入を考えている。

以上述べた誤差評価・アダプティブメッシングの手法の手順を図5に示す。本手法はプログラミングも簡単であり、計算時間もあまりかからず効率的であり、実用的な誤差評価手法と考えられる。また本手法は弾性問題に限らず、ポテンシャル問題などにも直接適用できるものと考えられる。

4. 誤差評価例

前述の誤差評価手法の有効性を検証するため、ここでは2次元弾性問題を対象として、穴の応力集中問題とき裂の問題(特異性を有する例として)についてBEM解析および事後の誤差評価を行った。

4.1 穴の応力集中問題の解析例 図6に示す長方形板中の円孔が一樣引張ないし内圧を受ける場合について解析した。図7はマニュアル入力による初期要素分割とその誤差分布の解析例を示す。予想通り穴の周辺の要素の誤差が大きくなっていることが分かる。この誤差分布を用いて、再分割および誤差評価を繰り返

し、その最終要素分割および誤差分布を図8に示す。2回のアダプティブメッシングにより、図8に示すように穴周辺が細分割され、全体的に誤差が極めて小さなレベルに達していることが分かる。図9は一樣引張を受ける孔縁A点の応力集中係数の収束状況を示す。機械的に等分割を繰り返す場合に比べ、本手法に基づくアダプティブメッシングにより1回ないし2回の解析で極めて効率的に厳密解に収束する様子が分かる。同様な解析を穴が内圧を受ける場合にも実施し、初

図7 一樣引張を受ける穴の初期要素分割と誤差分布

図8 一樣引張を受ける穴の最終要素分割と誤差分布

図6 長方形板中の穴の応力集中問題

図9 応力集中係数(図6のA点、一樣引張)の収束状況

図10 内圧を受ける穴の初期要素分割と誤差分布

図11 内圧を受ける穴の最終要素分割と誤差分布 (2回のアダプティブ分割後)

期分割と誤差分布を図10, 最終分割と誤差分布を図11に示す。当然ながら負荷条件により誤差分布も異なり, 適切な要素分割パターンも少し異なることが分かる。このような負荷条件に応じた適切なメッシングを事前に予測することは現状では困難であるので, やはり事後評価・アダプティブ技法の導入の意義は大きいものと考えられる。

4.2 き裂の解析例 応力特異性のある問題への応用例として図12に示す長方形板の中央き裂の解析を行った。図13に初期要素分割と誤差分布の解析例を示す。き裂先端近傍に大きな誤差が生じていることが分かる。

図12 長方形板中の中央き裂の一様引張問題

この問題についてアダプティブメッシングを行うと1回で図14に示す最終要素分割が得られた。この誤差分布を見るとき裂先端要素には依然として大きな誤差が残っているが, 他の要素では全体的に誤差が低いレベルになっていることが分かる。このような応力特異性を有する問題では特異点近傍離散化誤差は避けられず, このような問題では特異点近傍を除く他の要素の誤差が均一低レベルになった段階でアダプティブメッシングを終了するものとする。

図13 き裂問題の初期要素分割と誤差分布

図14 き裂問題の最終要素分割と誤差分布

図15 応力拡大係数の収束状況

なお、前述のメッシュを用いたBEM解から、変位外挿法により応力拡大係数 K_I を計算し、図15に示す。アダプティブメッシングにより厳密に近い解が得られ、本手法の有効性が確認できた。

以上の解析例を通じて、一様収束が保証される問題、すなわち要素を細かくすれば解が厳密解に収束する問題に対しては本手法が有効に適用できる見通しが得られた。ただし、ここで評価する誤差はあくまで離散化誤差であり、BEM解析で生じるいわゆる数値積分誤差や形状近似誤差は別の問題であり、これらの誤差もできる限り小さくしないと正しい解が得られないのは言うまでもない。

5. 本エキスパートシステムの評価

前報⁽¹⁾で報告したように本システムでは形状・境界条件を入力しただけで、メッシュデータが自動生成される。図16は前述のき裂問題についてESにより生成された要素分割とその誤差評価例を示す。ESによりき裂先端近傍は細かく分割されているが、リガメント側のき裂先端近傍とき裂中央の対称軸上にまだ誤差が若干残されていることが分かる。図15に示すようにこの要素分割でも、誤差0.6%以内の精度の良い K_I 値が得られている。

さらに高精度の解を得るため、アダプティブメッシングを行うと1回で図17に示す要素分割が得られた。その誤差分布を図17に、 K_I の解を図15に示すが、精度の良い解析ができたことが分かる。

ESを用いた事前評価によるメッシングはメッシングに関する浅い知識（例えばき裂先端は細かくといった知識）しか対応できないのが現状であり、問題・負荷条件ごとに異なる最適メッシングに関する深い知識

図16 き裂問題のESによる要素分割例と誤差評価例

図17 き裂問題のアダプティブメッシュ例とその誤差分布

の獲得とそのルール化は困難を伴う。そこで本研究では浅い知識はESに組み込み、深い知識を必要とする要素分割の最適化は事後評価に任せ、事前評価と事後評価の強調により高精度・高信頼性のBEM解を得る実用的なシステムを開発し、その有効性を確認した。

6. 結言

BEM解析支援エキスパートシステムの開発の一貫として、本研究では離散化誤差の事後評価手法を新たに提案し、誤差評価に基づくアダプティブメッシング技法をESに組み込み、解析事例を通じてその有効性を確認した。主な結論として以下の点が挙げられる。

- 1). DRMを用いたBEM特有の誤差評価手法を提案し、2～3の解析例を通じてその有効性を確認した。
- 2). この誤差評価に基づきアダプティブメッシングを行うと極めて効率的に最適メッシングが得られ、高精度なBEM解が得られた。
- 3). この手法をESに組み込むことにより、ESによるメッシングの不完全さを補い、正しい解が得られるようになり、システムとして一貫した処理が可能となった。

なお、本研究は機械学会RC-89研究分科会第2小委員会(委員長 矢川元基東大教授)の共同研究の一貫として行ったものであり、関係各位に謝意を表する次第である。

文献

- (1) 結城, 上田, 曹, 機論A投稿中
- (2) Rank, E. and Babuska, I., Int. J. Num. Meth. Engng., 24(1987), 2087-2106
- (3) Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J. D., Int. J. Num. Meth. Engng., 24(1987), 337-357
- (4) Kikuchi, N., Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 55(1986), 129-151
- (5) 大坪, 北村, 日本造船学会論文集, 165(1989), 225-232
- (6) Rencis, J. J. and Mullen, R.L., Int. J. Num. Meth. Engng., 23(1986), 1509-1527
- (7) Rank, E., Int. J. Num. Meth. Engng., 28(1989), 1335
- (8) Rencis, J. J. and Jong, K.Y., "Boundary Element Techniques: Applications in Engineering", ed. C.A. Brebbia, Com. Mech. Pub., (1989), 305-321
- (9) Guiggiani, M., 同上(1989), 323-340
- (10) Stephan, E.P., "Boundary Element X" ed. C.A. Brebbia, Com. Mech. Pub. (1988), 205-216
- (11) 結城, 曹, 上田, 境界要素法論文集, 6(1989), 131-137
- (12) 神谷, 川口, 境界要素法研究会第29会例会資料(1990), 1-13
- (13) 結城, 木須, 境界要素法による弾性解析, 培風館(1987)
- (14) 結城, 松本, 木須, 機論A, 52-480(1986), 1877-1884