異なる弾性体の接合による
超音波のひずみスペクトルの変化*村田健史^{*1}, 松本英治^{*2}, 柴田俊忍^{*2}

Variation of Strain Spectrum of Elastic Waves by Connection of Materials

Takeshi MURATA, Eiji MATSUMOTO, and Toshinobu SHIBATA

The strain spectrum of elastic plane waves is analyzed on the assumption that the elastic modulus and the density continuously change in the connection of two linear elastic materials. At first, a pair of differential equations is derived which governs the variation of the spectra of the strain and the velocity. Numerical results are given for the following three cases of the connection. That is, (I) the connection of two different elastic materials, (II) the connection of the same materials, and (III) the layered connection of two elastic materials. It is found that the transmission coefficient of the power spectrum of the strain varies according to the width, the density and the elastic modulus of the connection, or the variation of the number and the width of the layers.

Key Words: Elastic Wave, Nondestructive Inspection, Numerical Analysis, Inhomogeneous Elastic Material, Connection, Spectrum, Ultrasonic Wave, Transmission Coefficient, Fourier Transform

1. 緒 言

現在まで、非均質弾性体を伝ばする弾性波の問題については様々な研究がなされ、弾性波の解を求める幾つかの解法が考えられてきた。Eason⁽¹⁾はラプラス変換を用いて特殊な場合について弾性波を支配する微分方程式を解いた。Clements と Rogers⁽²⁾は行列変換した結果を積分することでいくつかの特殊解を得た。Fillipi⁽³⁾は非均質弾性体中の波動のいくつかの現象をRitz-Galerkin法を適用して解いた。SinghとBrar⁽⁴⁾は非均質弾性棒にパルス波を与えたときの相似解を求めた。Schreyer⁽⁵⁾は非均質体中の1次元の地震波を逆問題として解いた。Duanら⁽⁶⁾は周期的に重なった層状の弾性体を伝わる弾性波の分散関係について調べた。一方、近年、波形解析からは得られない情報をスペクトル解析により得る理論的手法が研究されてきた。Rudenko と Chirkin⁽⁷⁾は弱い分散的非線形物質中の不規則波のスペクトルを解析した。Gurbatov⁽⁸⁾はバース方程式に支配された不規則波の相互作用について研究した。Matsumoto⁽⁹⁾は均質な1次元非線形弾性

体中を伝ばするひずみ波のスペクトルの変化を表す微積分方程式を求め、これにより材料の非線形性から高周波倍音が発生すること、それを測定することにより高次の弾性定数が測定できることを示した。また、スペクトルアナライザの高性能化により実験によるスペクトル解析が実用的なものとなってきた。

本稿では弾性波のひずみのスペクトルに注目し、非均質線形弾性体の弾性定数および密度の値が任意の関数で与えられる場合の弾性波のひずみのスペクトルの変化について考察する。まず、第2章では非均質線形弾性体の運動方程式・構成式・適合条件よりフーリエ変換によって、弾性波のひずみおよび速度のスペクトルを支配する連立常微分方程式を導く。また、第4章ではスペクトル方程式を用いて、弾性体の接合部分を伝ばする平面波のひずみのスペクトルを数値計算により求める。ただし、接合とは二つの均質弾性体の非均質な部分による接続を意味する。接合は、つぎの3種類の場合を考える。

- (I) 異なる弾性体が接合されている場合
- (II) 同質の弾性体が接合されている場合
- (III) 弾性体が層状に接合されている場合

上の接合部分の幅などを変化させて、弾性波のひずみ

* 原稿受付 平成2年4月23日。

^{*1} 学生員、京都大学工学部 (〒606 京都市左京区吉田本町)。^{*2} 正員、京都大学工学部。

のパワースペクトルの透過率の周波数分布を求める。
さらに接合部分の幅を0としたときの透過率の解析解
を求め、数値計算結果と比較する。

2. 非均質線形弾性体中のスペクトル方程式

3次元平面弾性波が伝ばする方向にx座標をとると
き、ひずみ、速度、変位、および応力などの諸量はx
のみの関数となる。したがってすべての量をx座標の
みで表し、1次元弾性体として扱うことができる。ま
ず、外力の無い場合には1次元弾性体の運動方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial v}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。Tは応力、xは座標、 ρ は密度、vは
速度、tは時間を表す。また、1次元非均質線形弾性
体の構成式は

$$T = E(x)e \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。eはひずみ、E(x)は弾性定数を表す。
式(2)を式(1)に代入すると、

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{E'(x)}{E(x)}e = \frac{\rho(x)}{E(x)} \frac{\partial v}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここでE'(x)はE(x)のxによる微分を表
す。一方、ひずみと速度の適合条件は

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここでiを虚数単位、 ω を周波数とすると、
座標xにおけるひずみおよび速度スペクトルはフーリ
エ変換を用いて、

$$S(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e(x, t) \exp(-i\omega t) dt \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$U(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) \exp(-i\omega t) dt \quad \dots\dots\dots (6)$$

と定義される。あるいは逆に、

$$e(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega, x) \exp(i\omega t) d\omega \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, x) \exp(i\omega t) d\omega \quad \dots\dots\dots (8)$$

が成立する。式(3)に式(7)、(8)を代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} S(\omega, x) \exp(i\omega t) d\omega \\ & - \frac{\rho(x)}{E(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, x) \right. \right. \\ & \times \exp(i\omega t) d\omega \left. \left. \right] + \frac{E'(x)}{E(x)} \right. \\ & \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega, x) \exp(i\omega t) d\omega = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

さらに式(9)をフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} S(\omega, x) - i\omega \frac{\rho(x)}{E(x)} U(\omega, x) \\ & + \frac{E'(x)}{E(x)} S(\omega, x) = 0 \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

一方、式(4)に式(7)、(8)を代入して、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, x) \exp(i\omega t) d\omega \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega, x) \exp(i\omega t) d\omega \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(11)をフーリエ変換して、

$$\frac{\partial U(\omega, x)}{\partial x} - i\omega S(\omega, x) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

したがって、式(10)および式(12)がS(ω , x),

U(ω , x)に対する連立微分方程式となる。この連立
微分方程式を解くことで、非均質線形弾性体中を伝わ
る弾性波のひずみおよび速度のスペクトルを求めるこ
とができる。

以下では、スペクトル方程式の数値計算法について
考える。まず、S(ω , x), U(ω , x)を実部と虚部に
分ける。

$$S(\omega, x) = S_r(\omega, x) + i S_i(\omega, x) \quad \dots\dots (13)$$

$$U(\omega, x) = U_r(\omega, x) + i U_i(\omega, x) \quad \dots\dots (14)$$

式(13)、(14)を式(10)、(12)に代入すると、次の連立
常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_r(\omega, x)}{\partial x} + \omega \frac{\rho(x)}{E(x)} U_i(\omega, x) \\ & + \frac{E'(x)}{E(x)} S_r(\omega, x) = 0 \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_i(\omega, x)}{\partial x} - \omega \frac{\rho(x)}{E(x)} U_r(\omega, x) \\ & + \frac{E'(x)}{E(x)} S_i(\omega, x) = 0 \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_r(\omega, x)}{\partial x} + \omega S_i(\omega, x) = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial U_i(\omega, x)}{\partial x} - \omega S_r(\omega, x) = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(15)~(18)を数値計算によって解くために、 ω を離
散化する。すなわち、離散化する周波数間隔を $\Delta\omega$ と
して、($n=0, 1, 2, \dots$)

$$S_r^n(x) = S_r(n\Delta\omega, x)$$

$$S_i^n(x) = S_i(n\Delta\omega, x) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$U_r^n(x) = U_r(n\Delta\omega, x)$$

$$U_i^n(x) = U_i(n\Delta\omega, x)$$

とおき、式(19)を式(15)~(18)に代入する。スペクト
ルの境界値 $S_r^n(0)$, $S_i^n(0)$, $U_r^n(0)$, $U_i^n(0)$ (n
 $= 0, 1, 2, \dots$)を与え、この方程式を各nについて数値
計算することによって、座標xにおけるスペクトル分
布を求めることができる。

3. スペクトル方程式の境界値問題の解法

均質弾性体の接合部分を伝ばする縦波平面波（以下では弾性波とよぶ）のひずみのスペクトルがどのように変化するかを調べる。ただし、弾性体の接合部分を非均質弾性体と仮定する。

本稿で考える接合は図1のような場合である。図1において、非均質領域に入射する弾性波（入射波と呼ぶ）、非均質領域（接合部分）を透過する弾性波（透過波とよぶ）、および非均質領域より反射する弾性波（反射波と呼ぶ）が存在すると考える。座標軸は入射波の伝ばする方向をxの正方向にとり、弾性波の接合部分の入射端側の座標を $x = x_1$ 、出力端側の座標を $x = x_2$ とする。材料定数（本稿では密度および弾性定数を意味する）はxの関数として与え、均質領域（ $x \leq x_1$ および $x_2 \leq x$ ）においては一定値を取り、非均質領域（ $x_1 < x < x_2$ ）においては接合に応じて適当な関数で表わす。ここで、xの正方向に伝ばする波を進行波、負方向に伝ばする波を後退波と呼ぶ。

つぎに、図1で $x = 0$ における入射波のひずみのスペクトルが与えられ、 $x = \infty$ で弾性波が存在しないような境界値問題を波の重ね合わせの原理を用いて解く方法を示す。連立常微分方程式(10)、(12)の線形性よりこの重ね合わせが可能であるのは明らかである。ここで、2章で求めた弾性波のひずみおよび速度のスペクトルを支配する連立常微分方程式(10)、(12)に関する境界値問題。

$$\begin{aligned} S(\omega, 0) &= S_0(\omega) \\ S(\omega, \infty) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

を解くために、つぎに示すの二つの補助的な境界値問題(21)、(22)を考える。式(20)では速度のスペクトルの境界値は $S_0(\omega)$ と独立でないことが以下で明らかになる。

$$\begin{bmatrix} S_1(\omega, 0) \\ U_1(\omega, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{bmatrix} S_2(\omega, 0) \\ U_2(\omega, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_0(\omega) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、位置xのひずみおよび速度のスペクトルの組を、

$$\begin{bmatrix} S(\omega, x) \\ U(\omega, x) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (23)$$

と表す。

上式の解に対応する二つの弾性波（波1、波2）のスペクトルを $S_1(\omega, x)$ のように表わす。 $S_0(\omega)$ および $U_0(\omega)$ は、それぞれ $x = 0$ におけるひずみおよび速度のスペクトルである。このとき式(20)の二つめの条件は、 $x \geq x_2$ において後退波は存在しない条件

図2 接合部分での材料定数の分布
($x_1 < x < x_2$ は接合部分または層領域)

図1 接合部分の弾性波の伝ば

と同値である。したがって、 $x = x_2$ におけるひずみおよび速度のスペクトルが進行波のみによるものになるように、二つの波を、

$$\begin{bmatrix} S(\omega, x_2) \\ U(\omega, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(\omega, x_2) \\ U_1(\omega, x_2) \end{bmatrix} + C(\omega) \begin{bmatrix} S_2(\omega, x_2) \\ U_2(\omega, x_2) \end{bmatrix} \quad (24)$$

のようにパラメータ $C(\omega)$ を用いて重ね合わせる。ただし $C(\omega)$ は以下でわかるように、周波数 ω に依存することに注意する。また、式 (24) の $S_1(\omega, x_2)$, $U_1(\omega, x_2)$, $S_2(\omega, x_2)$, $U_2(\omega, x_2)$ は 2 章で求めた連立常微分方程式 (10), (12) を境界条件 (21), (22) のもとで解くことにより求めた値である。

弾性体が均質な領域 ($0 \leq x \leq x_1, x_2 \leq x$) においては、

$E(x) = E_0$ (const), $\rho(x) = \rho_0$ (const) であるので、 $a_0 = \rho_0/E_0$ とおくと連立常微分方程式 (10), (12) は、

$$\frac{\partial S(\omega, x)}{\partial x} - i\omega a_0 U(\omega, x) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial U(\omega, x)}{\partial x} - i\omega S(\omega, x) = 0 \quad (26)$$

となる。ここで、進行波と後退波を右上添字の +, - で区別すると、

$$\begin{bmatrix} S(\omega, x) \\ U(\omega, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^+(\omega, x) \\ U^+(\omega, x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S^-(\omega, x) \\ U^-(\omega, x) \end{bmatrix} \quad (27)$$

となる。

一方、進行波のひずみおよび速度は、

$$e^+ (\sqrt{a_0} x - t) \quad (28)$$

$$v^+ (\sqrt{a_0} x - t) \quad (29)$$

と表される。いま、式 (28) および (29) は式 (4) より

$$e^+ (kx - \omega t) + \sqrt{a_0} v^+ (kx - \omega t) = 0 \quad (30)$$

を満たす。したがって、式 (30) をフーリエ変換すると、進行波のひずみおよび速度のスペクトルは、

$$S^+(\omega, x) + \sqrt{a_0} U^+(\omega, x) = 0 \quad (31)$$

を満たす。同様に後退波に対しても、

$$S^-(\omega, x) - \sqrt{a_0} U^-(\omega, x) = 0 \quad (32)$$

が成り立つ。したがって、式 (24) の $S(\omega, x_2)$, $U(\omega, x_2)$ は式 (31) を満たさねばならない。したがって、 $C(\omega)$ は次式で与えられる。

$$C(\omega) = - \frac{S_1(\omega, x_2) + \sqrt{a_0} U_1(\omega, x_2)}{S_2(\omega, x_2) + \sqrt{a_0} U_2(\omega, x_2)} \quad (33)$$

この $C(\omega)$ を用いて、 $x \geq x_2$ において後退波は存在しないときの、任意の座標 x におけるひずみおよび速度のスペクトルは、

$$\begin{bmatrix} S(\omega, x) \\ U(\omega, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(\omega, x) \\ U_1(\omega, x) \end{bmatrix} + C(\omega) \begin{bmatrix} S_2(\omega, x) \\ U_2(\omega, x) \end{bmatrix} \quad (34)$$

と表わされる。上式は式 (21), (22) より $x = 0$ における境界条件、

$$\begin{bmatrix} S(\omega, 0) \\ U(\omega, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(\omega, 0) \\ U_1(\omega, 0) \end{bmatrix} + C(\omega) \begin{bmatrix} S_2(\omega, 0) \\ U_2(\omega, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0(\omega) \\ C(\omega) U_0(\omega) \end{bmatrix} \quad (35)$$

を満たすので、結局、境界値問題 (20) の解である。すなわち、初期ひずみのスペクトルを境界条件として任意に与え、速度のスペクトルとして適当な値を与えて二つの境界値問題 (21), (22) を解き、その解の座標 x_2 での値をもとに式 (33) より $C(\omega)$ が求まり、任意の座標 x におけるひずみおよび速度のスペクトルが式 (34) より求まる。

最後に、ひずみのパワースペクトルの透過率を定義する。図 1 で $x = x_2$ における進行波のひずみのスペクトルの大きさの 2 乗 $|S^+(\omega, x_2)|^2$ と $x = 0$ における進行波のひずみのスペクトルの大きさの 2 乗 $|S^+(\omega, 0)|^2$ の比、

$$\tau(\omega) = \frac{|S^+(\omega, x_2)|^2}{|S^+(\omega, 0)|^2} \quad (36)$$

を透過率と定義する。つまり透過率とは波のある周波数成分がどの程度透過するかを表すものである。上式の $S^+(\omega, 0)$ は式 (33), (34), (27), (31), および (32) から決定できる。 $S^+(\omega, x_2)$ は数値計算により求めたスペクトル $S_1(\omega, x_2)$ および $S_2(\omega, x_2)$ を式 (24) に代入すればよい。

4. 数値計算結果

本章では、3 種類の接合について接合部分の幅や材料定数の分布などを変化させて、ひずみのパワースペクトルの透過率を数値計算により求める。

計算では主として 2 種類の弾性材料、アルミニウム合金 (aluminium alloy B53S) とスチール (Heccla 138A) を用いた。アルミニウム合金およびスチールの材料定数は Smith 等^{11,12)} による下記の実験値を採用する。

aluminium alloy B53S

$$\lambda = (5.80 \pm 0.02) \cdot 10^4 \text{ (MPa)}$$

$$\mu = (2.60 \pm 0.01) \cdot 10^4 \text{ (MPa)}$$

$$\rho = 2677 \text{ (kg/m}^3\text{)}, c = 6410 \text{ (m/s)}$$

Heccla 138A

$$\lambda = (10.9 \pm 0.1) \cdot 10^4 \text{ (MPa)}$$

$$\mu = (8.19 \pm 0.05) \cdot 10^4 \text{ (MPa)}$$

$$\rho = 7843 \text{ (kg/m}^3\text{)}, c = 5897 \text{ (m/s)}$$

λ と μ はラメの定数、 ρ は密度、 c は弾性波の速度である。また弾性定数 E はラメの定数により、

$$E = \lambda + 2\mu$$

と表わされる。

4.1 異なる弾性体が接合されている場合 弾性定数および密度の値が異なる2種類の均質な弾性体が弾性波の進行方向に対して垂直に接合されており、両材料の間に一定幅の接合部分をもつ3次元弾性体を考える(図2のI)。これは2種類の異なる弾性板の圧接の場合などを理想化したものである。 x_0 は接合部分の中央の座標を表し、 Δx は接合部分の幅を表す。また x_1 および x_2 は接合部分の弾性波入射端および透過端の座標である。ここで入射側の均質材料を材料Aと呼び材料定数などは添字Aで表し、透過側の均質材料を材料Bと呼び材料定数などは添字Bで表すことにする。接合部分は非均質弾性体であると考え、弾性定数および密度は直線的に変化し、つぎのような関数形で与えられるとする。

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho_A, \quad E(x) = E_A & (0 \leq x \leq x_1) \\ \rho(x) &= \rho_A + \frac{\rho_B - \rho_A}{\Delta x}(x - x_1) & (x_1 < x < x_2) \\ E(x) &= E_A + \frac{E_B - E_A}{\Delta x}(x - x_1) & (x_1 < x < x_2) \\ \rho(x) &= \rho_B, \quad E(x) = E_B & (x_2 \leq x) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここで Δx は接合部分の幅で、 $\Delta x = x_2 - x_1$ である。連立常微分方程式(10)、(12)により数値計算を行った結果を示す。

図3に、式(37)において接合部分の幅 Δx の値を変化させたときのひずみのパワースペクトルの透過率を

0~10(MHz)にわたって数値計算した結果を示す。縦軸はひずみのパワースペクトルの透過率、横軸は周波数を表す。入射側の材料をアルミニウム合金、透過側の材料はスチールとした。図中の $\Delta x = 0$ のグラフは接合部分の幅が0、すなわち弾性定数および密度が不連続に変化する場合(不連続接続)の解析解であり、

$$\tau(\omega) = \left(\frac{2E_A c_A}{E_A c_A + E_B c_B} \right)^2 \quad (\text{constant})$$

である。いずれの図においても Δx の値が小さくなるにしたがってひずみのパワースペクトルの透過率の分布は $\Delta x = 0$ の場合の分布に近づいている。また透過率は高周波域において $\Delta x = 0$ の場合との差が大きくなっている。

以上より、異なる均質弾性体の接合において、ひずみのパワースペクトルの透過率の周波数分布は接合部分の幅により変化することがわかった。また接合部分の幅の増大と共に透過率の周波数分布は連続的に変化し、接合部分が存在しない場合の透過率との差は高周波域ほど大きいことがわかった。

4.2 同質の弾性体が接合されている場合 均質な弾性体が弾性波の伝わる方向に対して垂直に接合されており、接合部分の密度および弾性定数が連続的に変化する非均質領域によって表される3次元弾性体を考える(図2のII)。ただし接合部分の材料定数は接合される弾性体の値よりも小さいとする。これは弾性体の溶接の場合などを理想化したものである。ここで均質材料を材料Aと呼び材料定数などは添字Aで表す。また接合部分の材料定数は次のようなべき関数で表され

図3 ひずみのパワースペクトルの透過率
(接合部分の幅を変化させた場合)

るものとする。ただし n は偶数、 α は $0 < \alpha < 1$ の値をとるものとする。

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho_0, \quad E(x) = E_0 & (0 \leq x \leq x_1) \\ \rho(x) &= \rho_0 - \rho_0 \alpha \left[1 - \left(\frac{x - x_1}{\Delta x / 2} \right)^n \right] \\ E(x) &= E_0 - E_0 \alpha \left[1 - \left(\frac{x - x_1}{\Delta x / 2} \right)^n \right] & (x_1 < x < x_2) \\ \rho(x) &= \rho_0, \quad E(x) = E_0 & (x_2 \leq x) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ここで x_1 は接合部分の中央の座標を表し、 Δx は接合部分の幅で、 $\Delta x = x_2 - x_1$ である。 x_1 および x_2 は接合部分の両端の座標である。 α は接合部分の材料

定数の均質領域の材料定数からの減少を表わすパラメータであり、 α の値が小さいほど接合部分の材料定数の値と均質材料の値との比が 1 に近づく。一方、パラメータ n の値が大きくなるほど不連続接続に近づく（図 2 の II は $n=2$ の場合）。

連立常微分方程式 (10)、(12) を用いて数値計算を行った結果を示す。接合されている材料はアルミニウム合金である。

図 4 は式 (38) において x_1 、 α 、および Δx の値を固定して n の値を $n=2$ 、 $n=6$ 、 $n=20$ と変化させた場合にひずみのパワースペクトルの透過率を 0~100 (MHz) にわたって計算した結果を表す。これは接合部分

図 4 ひずみのパワースペクトルの透過率
(接合部分の材料定数の分布を
変化させた場合)

図 5 ひずみのパワースペクトルの透過率
(接合部分の材料定数を変化させた場合)

の材料定数の分布が変化する場合である。縦軸はひずみのパワースペクトルの透過率、横軸は周波数である。透過率は n の値によって変化するが、高周波域においては n の値が小さいほど透過率は増大し1に近づいている。

図5は式(38)において x 、 n 、および Δx の値を固定して α の値を変化させた場合に透過率を0~100(MHz)にわたって計算した結果を表わす。これは接合部分の材料定数の大きさが変化する場合である。全ての周波数において、 α の値が小さいほど透過率は大きくなり1に近づく。

これらの結果より、同質の材料の接合においてひずみのパワースペクトルの透過率は低周波域で著しく減少し、接合部分の材料定数の分布の変化によって、特

に高周波域で透過率の分布が変化することがわかった。

4.3 弾性体が層状に接合されている場合 弾性定数および密度の値が異なる2種類の均質な弾性体が層状に接合されている3次元弾性体を考える(図2のⅢ)。このような接合は複合材料などを理想化したものと考えられる。両材料は弾性波の伝ば方向に対して垂直に接合されており、接合部分は非均質弾性体であるとする。弾性定数および密度は周期的に変動する次のような関数により与えられる。ただし、全ての層の厚さは等しいとする。また、 m は奇数、 α は $0 < \alpha < 0.5$ の値をとるものとする。

$$\rho(x) = \rho_0, \quad E(x) = E_0 \quad (0 \leq x \leq x_1)$$

$$\rho(x) = \rho_0 - \rho_0 \alpha \{1 + \cos(2m\pi \frac{x - x_1}{\Delta x})\}$$

図6 ひずみのパワースペクトルの透過率
(層の数を変化させた場合)

図7 ひずみのパワースペクトルの透過率
(層の厚さを変化させた場合)

$$\begin{aligned}
 E(x) &= E_0 - E_0 \alpha \left\{ 1 + \cos \left(2m\pi \frac{x - x_0}{\Delta x} \right) \right\} \\
 &\quad (x_1 < x < x_2) \\
 \rho(x) &= \rho_0, \quad E(x) = E_0 \quad (x \leq x_1) \\
 &\quad \dots\dots\dots (39)
 \end{aligned}$$

x_1 , x_2 はそれぞれ均質領域と層領域の境界の座標であり, x_0 は x_1 と x_2 の中点の座標である. また Δx は層領域の厚さで $\Delta x = x_2 - x_1$ である. α は二つの材料定数の比を表わすパラメータであり α の値が大きいほど二つの材料定数の比が大きくなる. また添字 A は二つの層の材料のうち均質領域の材料と同質の材料を表わす. m は層領域 ($x_1 < x < x_2$) 中で材料 A の層には含まれる材料 (材料 B とよぶ) の層の数を表わす (図 2 の III は $m=3$ の場合).

連立常微分方程式 (10), (12) を用いて数値計算を行った結果を示す. 材料 A はアルミニウム合金として計算した.

図 6 に式 (39) において α の値を固定して m の値を Δx に比例して変化させて, ひずみのパワースペクトルの透過率を 0~30 (MHz) にわたって計算した結果を示す. これは層の厚さは等しく, 層の数が変わる場合である. このとき図より透過率が減少する周波数域が存在することがわかる. 層の数の変化によりその周波数の中心周波数は変化しないが, 減少する程度は層の数が増えるにしたがって大きくなる.

つぎに, 図 7 に式 (39) において α および m の値を固定して Δx を変化させて, 透過率を 0~30 (MHz) にわたって計算した結果を示す. これは層の数は等しいが 1 層の厚さが異なる場合である. 図より, 層の厚さに対して透過率が減少する特定の周波数域が存在するが, 層の数が等しければその減少の程度はどの場合も変わらないことがわかる.

以上より, 異なる弾性体が層状に接合している場合, 層の厚さ, 層の数によって透過率の分布は変化することがわかった.

なお, 以上の数値計算は 4 次の Runge-Kutta-Gill 法により行い, 京都大学大型計算機センターの M780MSP を用いて計算した.

5. 結 言

本稿では異なる均質な線形弾性体の接合部分を材料定数が連続的に変化する非均質線形弾性体と考え, 数値計算により接合部分を伝ばする平面弾性波 (縦波) のひずみのスペクトルを解析した. また, その結果を不連続接合の場合と比較した. ただし不連続接合とは接合部分の存在しない, すなわち材料定数の変化が不連

続である二つの均質線形弾性体の接続を意味した. 本研究により以下のことが明らかになった.

まず, 1 次元の非均質線形な材料を伝わる弾性波の, ひずみおよび速度のスペクトルを支配する連立常微分方程式を明らかにした.

さらに, 材料定数が連続的に変化する非均質領域で二つの均質物質が接合されているとき, 入射するひずみのパワースペクトルと透過するひずみのパワースペクトルを測定し比較することにより接合部分の幅と材料定数の分布などを推定できることが明らかになった.

今後さらに詳しい研究により, パワースペクトルの測定により, 材料定数の変化についてより多くの情報を得る手法が発展することが期待される.

文 献

- (1) Eason, G., Bull. Seismol. Soc. Am., 57 (1967), 1267.
- (2) Clements, D. L., et al., Int. J. Solids Struct., 10 (1974), 661.
- (3) Fillipi, P. Q., Appl. Math., 33 (1976), 337.
- (4) Singh, M. C., et al., J. Acoust. Soc. Am., 63 (1978), 1009.
- (5) Schreyer, H. L., J. Appl. Mech., 44 (1977), 469.
- (6) Duan, Z. P., Eischen, J. W., and Herrmann, G., Transactions of the ASME, 53 (1986), 108.
- (7) Rudenko, O. V., et al., Sov. Phys. Dokl., 19 (1974), 64.
- (8) Gurbatov, S. N., Sov. Phys. Acoust., 26 (1980), 302.
- (9) Matsumoto, E., J. Acoust. Soc. Am., 84 (1988), 335.
- (10) Smith, R. T., et al., J. Acoust. Soc. Am., 40 (1966), 1002.