繊維強化複合材料積層板の確率材料設計法の研究*

(積層板の破損パス追跡シミュレータの開発)

中 易 秀 敏^{*1}, 前 川 善 一 郎^{*2}Stochastic Materials Design of Composite Materials
(Development of Simulator for Failure Path of Composite Materials)

Hidetoshi NAKAYASU and Zen'ichiro MAEKAWA

A basic formulation for evaluating the failure path of composite laminates is presented. The proposed formulation is based on an in-plane failure criteria and first-order reliability method (FORM). The sequential failure path of each layer of composite laminates is simulated by means of modulus degradation and safety indices under the off-axial load conditions. Numerical analyses of graphite epoxy composite laminates are performed corresponding to various lamination configurations with symmetric lamination angles subjected to off-axial in-plane strain conditions. From the simulation analysis, a typical failure path is evaluated corresponding to an in-plane strain vector. The mechanical behaviors such as decreasing modulus and increasing in-plane strain are also simulated in correspondence with each stage of sequential ply failure. The proposed simulator enables one to search the effective failure path in order to evaluate the last ply failure probability of laminates.

Key Words: Composite Materials, Simulator for Failure Path, Off-Axial Load, Stochastic Material Design, First-Order Reliability Method (FORM), Conditional Failure Probability, Safety Index

1. 緒 言

繊維強化複合材料積層板(以下、積層板と称する)の強度特性の確率的評価には、これまで並・直列モデルとして積層板の破損確率の上下限を与える近似式を用いるもの⁽¹⁾や初期破損 (first ply failure: FPF) によって評価するもの⁽²⁾がわずかにあるのみで、その破損挙動の詳細については不明な点が多かった。この原因の一つとして、積層板の破損確率の評価には、最終破損 (last ply failure: LPF) の評価が必要であるにもかかわらず、これを評価するには積層板内に発生する膨大な数にのぼる各層の逐次破損事象(以下破損パスと称する)を評価しなければならず、このための効果的な評価法や近似法が確立していないことが挙げられる。

ところで、金原ら⁽³⁾や福田ら^{(4),(5)}は、Rosenモデル⁽⁶⁾やZwebenモデル⁽⁷⁾の考え方を拡張して、モンテカルロ法により一軸方向に負荷のかかる場合の一方向繊維強化複合材料積層板(以下、一方向積層板と称する)の破損挙動をとらえ、確率的な強度特性の評価

を行なっている。これらの研究では、負荷状態が理想化された単軸荷重条件に制約されているものの、複合材料の持つ不均質性や破損様式の複雑さをうまくモデル化して、数値計算による有効な解析結果が得られているため、積層板の破損現象の解明に大いに役立っている。なかでも福田ら⁽⁵⁾は、このような解析において既に積層板の破損パスの概念の必要性を洞察し、積層板の確率強度評価に破損パスから派生する条件付確率評価法を検討している。これらの研究のほとんどは、積層板の破損現象解明に沿った目的をもつため、本研究の意図する確率材料設計法には直接結びつかないものの、積層板の破損現象を再現するのにシミュレーション法によるアプローチが破損パスの評価にも役立つことを示唆している。

一方、いくつかのプライから構成される積層板の確率材料設計法を進めるには、積層板の最終破損までを考慮した破損確率評価法が必要である⁽⁸⁾。このためには、積層板をいくつかの要素からなるシステムと見立て、積層板に面内多軸荷重が加わる際に、積層板内に発生する破損パスの性質を吟味しなければならない。さらに、そこから得られる成果を蓄積することによって効果的な破損パスの評価法や破損確率の近似計算法を創生する必要がある。ところで、積層板内の逐次破損事象である破損パスの生起確率を評価するには、最初にある層の破損事象が発生し、次にその条件のもと

* 原稿受付 平成2年4月25日。

^{*1} 正員、大阪工業大学 (〒535 大阪市旭区大宮)。^{*2} 正員、京都工芸繊維大学 (〒606 京都市右京区松ヶ崎御所海道町)。

で別の層が破損する条件付確率を逐次考えていかなければならない。このためには、破損した層の伝達機能（剛性など）の喪失を考え、積層板全体に再編成される応力とひずみの関係を逐次再解析した後、残存する各層に対して更新される面内ひずみのもとでの条件付確率を再評価する必要がある。

このような状況に鑑み、本報においては破損パスを設計者が任意に追跡し、かかる状況下での条件付確率ならびに選ばれた破損パスの生起確率の評価のためのシミュレータを開発する。具体的には、二次多項式破損則⁽¹⁾によって表わされる各層のひずみ空間における破損クライテリオンを利用して、面内多軸荷重から派生する応力ベクトルを介して積層板内に発生する面内ひずみベクトルの各成分を用いて、既報^{(10)~(13)}に基づき各層の破損確率評価を逐次行い、徐々に発生する逐次破損パスをシミュレートしていく。数値解析として、多重等角斜交対称積層構成のグラフィイト/エポキシ(T300/5208)積層板を想定し、いくつかの面内ひずみの組合せに対して、いくつかの異なる積層構成を有する積層板内における破損パスの追跡と力学的挙動を検討してみる。

2. 基礎となる力学的背景

積層板の座標系と繊維配向角を図1のように定義する。以下、積層板に関連する記号ならびに用語は、三木⁽¹⁴⁾の表現に準拠する。ここでは積層板は、平面応力状態にあり完全線形弾性特性を示すものと仮定するため、非可逆的な挙動や非線形的、塑性的あるいは粘性的な場合は取り扱わない。

さて、上記仮定のもとでの積層板のうちの一つの層の応力・ひずみ関係ならびに剛性は、以下のように求められる。まず、繊維軸系の x - y 系ならびに主軸系の 1-2系において、応力

$$\sigma_i = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_s\}^T, \quad \sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}^T \quad (1)$$

とひずみ

$$\epsilon_i = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_s\}^T, \quad \epsilon_1 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}^T \quad (2)$$

はそれぞれの系の面内剛性マトリックス Q_i 、 Q_1 と面内コンプライアンスマトリックス S_i 、 S_1 によって式(3)、(4)のように表わされる。

$$\sigma_i = Q_i \epsilon_i, \quad \epsilon_i = S_i \sigma_i \quad (3)$$

$$\sigma_1 = Q_1 \epsilon_1, \quad \epsilon_1 = S_1 \sigma_1 \quad (4)$$

このとき、式(3)における、 x - y 系の面内剛性マトリックス Q_i は、独立な4個の工学的弾性定数 E_x (x 方向のヤング率)、 E_y (y 軸方向のヤング率)、 E_s (x, y 軸方向に関するせん断弾性定数)、 ν_x (x 方向に関する

図1 積層板の座標系

ポアソン比) によって次式となる。

$$Q_i = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ & Q_{yy} & 0 \\ \text{sym.} & & Q_{ss} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$Q_{xx} = \kappa E_x, \quad Q_{yy} = \kappa E_y, \quad Q_{xy} = \kappa \nu_x E_y, \\ Q_{ss} = E_s, \quad \kappa = (1 - \nu_x^2 E_y/E_x)^{-1} \quad (6)$$

ところで、1-2系から x - y 系への応力成分ならびにひずみ成分の変換は、式(7)の二つの座標変換マトリックス T_1 、 T_2

$$T_1 = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

によって式(8)で与えられる。

$$\sigma_i = T_1 \sigma_1, \quad \epsilon_i = T_2 \epsilon_1 \quad (8)$$

ここに、 $m = \cos \theta$ 、 $n = \sin \theta$ であり、 θ は繊維配向角を表わす。式(7)、(8)における二つの座標変換マトリックスの表現が応力とひずみ成分で異なるのは、工学的せん断ひずみが通常のテンソルせん断ひずみの2倍と定義されているためである。また、式(3)の関係に式(8)を代入して、 $T_1^{-1} = T_2^T$ 、 $T_2^{-1} = T_1^T$ なる直交関係を利用すると、式(4)の1-2系の面内剛性マトリックス Q_1 と面内コンプライアンスマトリックス S_1 は式(9)で与えられる⁽¹¹⁾。

$$Q_1 = T_2^T Q_i T_2, \quad S_1 = T_1^T S_i T_1 \quad (9)$$

つぎに、これらの層がいくつも重なって構成される積層板の全体の厚さを H とすると(図2)、面内ひずみ ϵ_{12} を z 軸方向に一定とすれば、式(4)の応力・ひずみ関係より、積層板の平均応力

図2 積層板にかかる荷重と寸法諸元の定義

$$\sigma_{11}^0 = 1/H \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{11} dz \quad (10)$$

と面内ひずみの間には次式が成立する。

$$\sigma_{11}^0 = Q_{11}^0 \epsilon_{11}^0, \quad \epsilon_{11}^0 = S_{11}^0 \sigma_{11}^0 \quad (11)$$

ここに、添字⁰は積層板の面内全体の特性を表わす添字である。式(11)における Q_{11}^0 は積層板の層内の積分により求められる有効面内剛性マトリックスである。

$$Q_{11}^0 = 1/H \int_{-H/2}^{H/2} Q_{11} dz \quad (12)$$

この積分の意味するところは、積層板全体の面内剛性は単に構成プライの弾性定数の平均で与えられるということである。積層板を用いた構造設計において有用なみかけの工学的弾性定数、すなわち有効工学的弾性定数は有効面内コンプライアンスマトリックス S_{11}^0 ($=Q_{11}^0{}^{-1}$)の要素より次式で与えられる⁽²⁾。

$$\begin{aligned} 1\text{-軸方向のヤング率} \quad E_{11}^0 &= 1/S_{11}^0 \\ 2\text{-軸方向のヤング率} \quad E_{22}^0 &= 1/S_{22}^0 \\ 1,2\text{-軸方向のせん断弾性定数} \quad E_{66}^0 &= 1/S_{66}^0 \\ 1\text{-軸方向のポアソン比} \quad \nu_{21}^0 &= -S_{12}^0/S_{11}^0 \\ \text{せん断カップリング係数} \quad \nu_{61}^0 &= S_{16}^0/S_{11}^0 \end{aligned} \quad (13)$$

なお、1-2系からx-y系への変換は式(7)の座標変換マトリックスによって式(9)と同様の手順で容易に求まる。

3. 破損パス追跡シミュレータ

3. 1 シミュレータの概要

積層構成が

$$[\theta_1, \dots, \theta_n] \quad (14)$$

で表わされる積層板に、任意の面内多軸荷重が加わる時、各層の破損確率もしくは安全性指標を表示し、この値を参考にして設計者が選んだ層に破損を生じさせ、その結果積層板の力学的特性がどの様に変化するかを再現させ、それぞれの状況下で各層の条件付破損確率を評価するシミュレータを開発する。また、設計者の選んだ最終破損に至る破損パスの生起確率やそれに相当する安全性指標、力学的特性(面内ひずみの変化、面内剛性マトリックスの変化など)も評価できるように検討する。

3. 2 シミュレータの初期条件と仮定

シミュレータを起動する初期条件として、以下を仮定する。図2に示される積層板全体の形状寸法(幅B、厚さH、長さL)と面内多軸荷重(P_1 、 P_2 、 P_3)の確率特性値(平均、分散、標準偏差、相関係数など)は初期値として入力する。 θ 層の厚み t は全体の層数 n よ

り

$$t = H/n \quad (15)$$

とし、各層の積層比は均一と仮定する。また、積層板内の破損が進行するにつれて、積層板内の面内剛性は逐次低下するが、見かけ上の応力を分担する面積変化は無視するものとし、したがって平均応力 σ_{11}^0 は初期値のまま一定とする。さらに、積層板内の各層の逐次破損の進行段階では、面外荷重や曲げ、ねじり変形は発生しないものと仮定する。積層板の最終破損は、積層板全体の有効工学的弾性定数(式(13))のいずれかの値が、初期に設定した剛性低下の閾値(threshold)に達したときと定義する。

なお、各層の破損の判定には、既報⁽¹⁾で示した信頼性評価法に基づき、面内ひずみに対する各層の安全性指標もしくは破損確率の値によって判定する。このとき、解析の基礎とする各層の破損条件には、これまでの一方向積層板での信頼性解析結果⁽¹⁾においてあらゆる面内多軸荷重の組合せと任意の繊維配向角に対して安定した解析結果を示したTsai-Wuの二次多項式破損則⁽⁴⁾のひずみ平面上の基準を用いる。

3. 3 シミュレータ内の信頼性解析

積層板内の各層の信頼性解析に用いる限界状態関数としては、積層板内の各層の逐次破損の第 k 段階において

$$g(X, \theta) = 1 - \epsilon_{11}(\theta) - G_{11}(\theta) \cdot \epsilon_{11}(\theta) - G_{12}(\theta) \cdot \epsilon_{12}(\theta) - G_{16}(\theta) \cdot \epsilon_{16}(\theta) \quad (16)$$

を用いる。式(16)の各係数は、二次多項式破損基準のひずみ空間における強度パラメータであり、その詳細な誘導過程は既報⁽¹⁾に譲る。ただし、強度パラメータ $G_{11}(\theta)$ 、 $G_{12}(\theta)$ 、 $G_{16}(\theta)$ は、積層板の各層の逐次破損の第 k 段階において破損に関する層の面内剛性マトリックスが変化するため、その都度再構築される。また、第 k 段階で破損の起こった層とそれ以前までの段階で破損が起こり剛性が低下している層の次の段階での面内剛性マトリックスの変化は、式(12)で与えられる有効面内剛性マトリックスに影響を与え、その逆行列である有効コンプライアンスマトリックスも変化し、最終的に式(11)で与えられる面内ひずみ ϵ_{11}^0 も更新される。したがって、各層の条件付破損確率もしくはそれに対応する安全性指標は、破損の第 k 段階で更新された面内ひずみ ϵ_{11}^0 を各層の繊維配向角に対応して式(8)より

$$\epsilon_{11}(\theta) = T_{11} \epsilon_{11}^0 \quad (17)$$

で変換した $\epsilon_{11}(\theta)$ を式(16)に代入した限界状態関数を用いて評価される。

かくて、式(16)の限界状態関数より、積層板の各層

の逐次破損の第k段階での θ_k 層の条件付破損確率は

$$Pf(\theta_k)^{k+1} = P[g(X, \theta_k)^{k+1} \leq 0] \quad (18)$$

で求められる。ここに、 $P[\cdot]$ は事象 $\cdot$ の生起する確率を表わす。式(18)の $Pf(\theta_k)^{k+1}$ の厳密な解析的評価は困難なため、既報⁽¹³⁾に基づく一次近似信頼性解析法(FORM)⁽¹⁴⁾により

$$\beta(\theta_k)^{k+1} = \|u^*\| = \min(\|u\|) = -\alpha^T u^*, \\ \{u: g_k(u) \leq 0\} \quad (19)$$

で与えられる第k段階の θ_k 層の条件付安全性指標 $\beta(\theta_k)^{k+1}$ を求めて、次式で条件付破損確率と対応づける。

$$Pf(\theta_k)^{k+1} = \Phi(-\beta(\theta_k)^{k+1}) \quad (20)$$

ここに、 u はRosenblatt変換⁽¹⁵⁾により互いに独立な多変量標準正規確率変数ベクトル U に変換された設計変数ベクトル X の実現値であり、 $\|\cdot\|$ は $\cdot$ のノルム、 α は $\|\alpha\|=1$ の性質をもつ破損表面上の設計点 u^* での負の勾配(方向余弦)

$$\alpha = \text{grad}\{g_k(u^*)\} / \|\text{grad}\{g_k(u^*)\}\| \quad (21)$$

である。 $\text{grad}\{\cdot\}$ は $\cdot$ のグラジエントを表わし、 $\Phi(\cdot)$ は一次元標準正規分布関数である。

3. 4 シミュレーション・アルゴリズム

上記基本方針に基づくシミュレータの具体的な実行アルゴリズムを下記に列挙する。

STEP 1

初期値の設定を行う。下記の値の確率特性値(平均, 分散, 標準偏差, 相関係数など)を入力する。

材料強度パラメータ : $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33},$
 $\sigma_{12}, \sigma_{13}, k_{12},$

弾性定数パラメータ : E_1, E_2, E_3, ν_{12}

寸法諸元パラメータ : B, L, H

面内多軸荷重パラメータ: P_1, P_2, P_3

さらに、積層構成を決定し、 $[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ に相当する繊維配向角の数 n と繊維配向角の確率特性値を入力する。また、積層板の最終破損を設定する有効工学的弾性定数の閾値を定める減少率 r を入力する。

STEP 2

x - y 系の面内剛性マトリックス $Q_{ij}^{(k)}$ を式(5)より求め、各層の1-2系の面内剛性マトリックス $Q_{ij}^{(k)}(\theta_k)$ を式(9)より算出する。 $Q_{ij}^{(k)}(\theta_k)$ を式(12)に代入して、積層板全体としての有効面内剛性マトリックス $Q_{ij}^{(0)}$ を求め、さらに $Q_{ij}^{(0)}$ の逆行列をとり有効面内コンプライアンスマトリックス $\chi_{ij}^{(0)}$ を求める。

STEP 3

面内多軸荷重の組合せ条件を入力する。形式上

- 1) 面内ひずみ $\epsilon_1^{(0)}$ を入力,
- 2) 平均応力 $\sigma_1^{(0)}$ を入力,

3) 有効面内多軸荷重 P_1^*, P_2^*, P_3^* を入力
の3通りの入力形式が可能とし、それぞれに対して、以下の処理を行なう。

1) 面内ひずみ $\epsilon_1^{(0)}$ を入力する場合

式(11)に基づき平均応力

$$\sigma_1^{(0)} = Q_{11}^{(0)} \epsilon_1^{(0)} \quad (22)$$

を求め、これより有効面内多軸荷重 P_1^*, P_2^*, P_3^* を

$$P_1^* = \sigma_1^{(0)} \cdot B \cdot H, P_2^* = \sigma_2^{(0)} \cdot L \cdot H, \\ P_3^* = \sigma_3^{(0)} \cdot B \cdot H \quad (23)$$

により計算する。このとき安全率は、次式のようになる。

$$SF_1 = P_1 / P_1^*, SF_2 = P_2 / P_2^*, SF_3 = P_3 / P_3^* \quad (24)$$

2) 平均応力 $\sigma_1^{(0)}$ を入力する場合

式(11)に基づき面内ひずみ

$$\epsilon_1^{(0,2)} = S_{11}^{(0,2)} \sigma_1^{(0)} \quad (25)$$

を算出し、1)と同様、式(23),(24)より有効面内多軸荷重と安全率を求める。

3) 有効面内多軸荷重 P_1^*, P_2^*, P_3^* を入力する場合

平均応力 $\sigma_1^{(0)}$ を次式

$$\sigma_1^{(0)} = P_1^* / (B \cdot H), \sigma_2^{(0)} = P_2^* / (L \cdot H) \\ \sigma_3^{(0)} = P_3^* / (B \cdot H) \quad (26)$$

で求め、式(24),(25)で安全率、面内ひずみを算出する。

STEP 4

積層板の最終破損を設定する有効工学的弾性定数の閾値を減少率 r より

$$E_{11}^{(k+1)} = (1-r)E_{11}^{(k)}, \\ E_{22}^{(k+1)} = (1-r)E_{22}^{(k)}, \\ E_{33}^{(k+1)} = (1-r)E_{33}^{(k)} \quad (27)$$

と定義する。 $E_{11}^{(k)}, E_{22}^{(k)}, E_{33}^{(k)}$ は式(13)による。

つぎに、 $k=0$ としてSTEP 5に進む。

STEP 5

面内ひずみ $\epsilon_1^{(0)}$ に対する各層の安全性指標

$\beta(\theta_k)^*$ を求め、その結果を表示する。

STEP 6

破損させる層の積層配向角 θ_k を入力する。このとき、同時破損を行うかどうかを設定する。

STEP 7

破損の発生した繊維配向角 θ_k の層の剛性を低下させる。剛性低下によって更新される弾性定数は、以下の式によって算出される。

$$E(\theta_k)^{k+1} = \\ E(\theta_k)^k \cdot \max\{0, 1 - |\epsilon_k| / \epsilon_{k,cr}\} \quad (\epsilon_k \geq 0)$$

$$\begin{aligned}
E_x(\theta_j)^{(k+1)} &= \\
E_x(\theta_j)^{(k+1)} &\cdot \max\{0, 1 - |\varepsilon_x/\varepsilon_{L,c}| \} \quad (\varepsilon_x < 0) \\
E_y(\theta_j)^{(k+1)} &= \\
E_y(\theta_j)^{(k+1)} &\cdot \max\{0, 1 - |\varepsilon_y/\varepsilon_{T,c}| \} \quad (\varepsilon_y \geq 0) \\
E_y(\theta_j)^{(k+1)} &= \\
E_y(\theta_j)^{(k+1)} &\cdot \max\{0, 1 - |\varepsilon_y/\varepsilon_{T,c}| \} \quad (\varepsilon_y < 0) \\
E_z(\theta_j)^{(k+1)} &= \\
E_z(\theta_j)^{(k+1)} &\cdot \max\{0, 1 - |\varepsilon_z/\varepsilon_{L,t}| \} \quad (28)
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{L,t} &= \sigma_{L,t} / E_x, \quad \varepsilon_{L,c} = \sigma_{L,c} / E_x \\
\varepsilon_{T,t} &= \sigma_{T,t} / E_y, \quad \varepsilon_{T,c} = \sigma_{T,c} / E_y \\
\varepsilon_{L,t} &= \sigma_{L,t} / E_z \quad (29)
\end{aligned}$$

とする。なお、繊維配向角 θ_j の層が破損したさいに、それ以前に破損している層も再度剛性低下が行なわれるものと仮定して工学的弾性定数を上記と同様の手順で式(28)により更新する。また、破損に関与しない繊維配向角 θ_j の層の工学的弾性定数は k 段階と同一とする。すなわち

$$\begin{aligned}
E_x(\theta_j)^{(k+1)} &= E_x(\theta_j)^{(k)}, \\
E_y(\theta_j)^{(k+1)} &= E_y(\theta_j)^{(k)}, \\
E_z(\theta_j)^{(k+1)} &= E_z(\theta_j)^{(k)} \quad (30)
\end{aligned}$$

とする。

STEP 8

STEP 7で更新された工学的弾性定数

$$E_x(\theta_j)^{(k+1)}, E_y(\theta_j)^{(k+1)}, E_z(\theta_j)^{(k+1)}$$

をもつ繊維配向角 θ_j の層の面内剛性マトリックス $Q_j(\theta_j)^{(k+1)}$ を式(5)より再構築し、座標変換式(9)により $Q_1(\theta_j)^{(k+1)}$ を求め、さらに対応する逆行列解析より $S_1(\theta_j)^{(k+1)}$ 、 $S_2(\theta_j)^{(k+1)}$ を求める。

ところで、破損に関与しないため工学的弾性定数が変化しない繊維配向角 θ_j の層の面内剛性マトリックスは k 段階と同一とする。すなわち

$$\begin{aligned}
Q_1(\theta_j)^{(k+1)} &= Q_1(\theta_j)^{(k)}, \\
S_1(\theta_j)^{(k+1)} &= S_1(\theta_j)^{(k)}, \\
Q_2(\theta_j)^{(k+1)} &= Q_2(\theta_j)^{(k)}, \\
S_2(\theta_j)^{(k+1)} &= S_2(\theta_j)^{(k)} \quad (31)
\end{aligned}$$

とする。

STEP 9

積層板全体の有効面内剛性マトリックス $Q_0^{(k+1)}$ を式(12)より算出する。さらに有効面内コンプライアンスマトリックス $S_0^{(k+1)}$ を求め、式(13)より有効工学的弾性定数 $E_1^{(k+1)}$ 、 $E_2^{(k+1)}$ 、 $E_6^{(k+1)}$ を、式(11)より面内ひずみ $\varepsilon_1^{(k+1)}$ をそれぞれ計算する。

STEP 10

積層板の最終破損の判定を行なう。STEP 4で求めた有効工学的弾性定数の閾値

$$E_{1,0}^{(SH)}, E_{2,0}^{(SH)}, E_{6,0}^{(SH)} \quad (i=1,2,6)$$

とSTEP 9で算出された有効工学的弾性定数

$$E_{1,0}^{(k+1)}, E_{2,0}^{(k+1)}, E_{6,0}^{(k+1)} \quad (i=1,2,6)$$

との大小を比較し、逐次減少していく $E_{i,0}^{(k+1)}$ のうち一つでも閾値以下になるものが発生したとき積層板の破損が生じたものとして破損バスの進行を停止し、そうでなければSTEP 5に戻りさらに破損バスの進行を進める。すなわち

$$\begin{aligned}
E_{1,0}^{(k+1)} &> E_{1,0}^{(SH)}, E_{2,0}^{(k+1)} > E_{2,0}^{(SH)} \\
E_{6,0}^{(k+1)} &> E_{6,0}^{(SH)} \quad (32)
\end{aligned}$$

のすべての不等式が満たされていれば、 $k=k+1$ としてSTEP 5へ、さもなければSTEP 11へ進みシミュレーションを終了する。

STEP 11

積層板の破損バスを表示し、逐次破損する層の繊維配向角 θ_j の表示ならびにそのときの $\beta(\theta_j)^{(k)}$ の値をツリー表示する。さらに、各段階の破損確率 $Pf(\theta_j)^{(k)}$ も表示する。

最終破損に至るバスの生起確率 Pfp と対応する安全性指標 βfp を次式で求め、表示する。

$$Pfp = Pf p^{(k)} \quad (33)$$

$$\beta fp = -\Phi^{-1}(Pf p) \quad (34)$$

ただし

$$Pf p^{(k)} = \prod_{j=1}^n \{ Pf(\theta_j)^{(k)} \} \quad (35)$$

$$\beta fp^{(k)} = -\Phi^{-1}(Pf p^{(k)}) \quad (36)$$

である。ここに、 $Pfp^{(k)}$ は k 段階までの破損バスの生起確率を表わし、それは各破損段階における条件付破損確率の積によって与えられるものとする。また、 $\beta fp^{(k)}$ は式(36)によって $Pfp^{(k)}$ に対応する安全性指標である。 $\Phi^{-1}(\cdot)$ は、標準正規分布の累積分布関数の逆関数である。さらに、 p_0 は各層の破損による剛性低下によって初期に設定した有効工学的弾性定数の閾値に達するまでの破損段階の総数である。

各段階の面内ひずみ $\varepsilon_1^{(k+1)}$ 、有効面内剛性マトリックス $Q_0^{(k+1)}$ 、有効面内コンプライアンスマトリックス $S_0^{(k+1)}$ ならびに、有効工学的弾性定数 $E_1^{(k+1)}$ 、 $E_2^{(k+1)}$ 、 $E_6^{(k+1)}$ を表示する。

4. 数値解析

図2に示すような1-2系に面内多軸荷重の加わる積層板を考える。本解析では、積層板の積層構成を

$$[\pm \phi_1, \pm \phi_2, \dots, \pm \phi_m]_{sym} \quad (37)$$

で表わされる多重等角斜交対称積層(アングルプライ)

表 1 基本確率変数の確率特性値

(T300/5208)

Parameter	Expectation	Standard deviation	CV
σ_{L1}	1500 (MPa)	150	0.10
σ_{L2}	1500 (MPa)	180	0.12
σ_{T1}	40 (MPa)	4.40	0.11
σ_{T2}	246 (MPa)	19.68	0.08
σ_{LT}	68 (MPa)	4.08	0.06
k_{12}	-0.5	0.005	0.01
E_x	181000 (MPa)	9050	0.05
E_y	10300 (MPa)	515	0.05
E_s	7170 (MPa)	358.5	0.05
ν_x	0.28 (MPa)	0.0028	0.01
B	30 (mm)	1.5	0.05
L	150 (mm)	7.5	0.05
H	2 (mm)	0.1	0.05
P_1	90000 (MPa)	4500	0.05
P_2	12000 (MPa)	600	0.05
P_6	4080 (MPa)	204	0.05

表 2 破損パス追跡シミュレーション結果

Materials: T300/5208 Configuration: $[\pm 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]$, ... Dimension: $B=30, L=150, H=2$ (mm) In-plane strain: $\epsilon_x^{*15} = \{0.0015, 0.0015, 0\}^T$ Mean stress: $\sigma_x^{*15} = \{148.5, 148.5, 0\}^T$ (MPa) Modulus reduction ratio: $r=0.3$ Failure criteria: $E_1^{*15} = 51966, E_2^{*15} = 51966, E_6^{*15} = 16845$ (MPa)				
Failure stage k	1	2	3	4
Lamination angle of failed ply	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 15^\circ$
$\beta(\theta_i)^{15}$ $Pf(\theta_i)^{15}$	1.9201 $2.74 \cdot 10^{-2}$	2.1644 $1.52 \cdot 10^{-2}$	2.0107 $2.22 \cdot 10^{-2}$	2.9022 $1.85 \cdot 10^{-2}$
$\beta f p^{15}$ $P f p^{15}$	1.9201 $2.74 \cdot 10^{-2}$	3.3411 $4.17 \cdot 10^{-4}$	4.2823 $9.26 \cdot 10^{-6}$	5.5184 $1.71 \cdot 10^{-8}$
ϵ_1^{*15} ϵ_2^{*15} ϵ_6^{*15}	0.00150 0.00150 0	0.00154 0.00154 0	0.00160 0.00166 0	0.00175 0.00180 0
E_1^{*15} E_2^{*15} E_6^{*15}	73433 73433 22821	72425 70387 20827	69051 67290 18120	61388 63999 15420

のグラフィット/エポキシ(T300/5208)積層板を想定する。したがって、2章で表わした繊維配向角と式(37)のそれとは

$$\theta_1 = \phi_1, \theta_2 = -\phi_1, \theta_3 = \phi_2, \theta_4 = -\phi_2, \dots \quad (38)$$

と対応し、全積層数は

$$n = 4m \quad (39)$$

で与えられる。

さて、初期値として与えるSTEP 1の入力データの確率特性値を表1のように既報(2007)と同一とした。また、各層の繊維配向角は、標準偏差が0.1で指定された繊維配向角を期待値とする正規分布にしたがう確率変数とした。なお、確率変数は互いに独立とし、それぞれ

$\sigma_{L1}, \sigma_{L2}, \sigma_{T1}, \sigma_{T2}, \sigma_{LT} \rightarrow$ 対数正規分布

$k_{12}, E_x, E_y, E_s, \nu_x, B, L, H \rightarrow$ 正規分布

$P_1, P_2, P_6 \rightarrow$ ワイブル分布(2母数)

(a) $E_x(\theta_i)^{(k)}$ の変化

(b) $E_y(\theta_i)^{(k)}$ の変化

(c) $E_s(\theta_i)^{(k)}$ の変化

図 3 各層の工学的弾性定数の変化

図 4 有効工学的弾性定数の変化

のように分布するものと仮定し、各確率分布の母数は、表1の値よりモーメント法によって推定したものを用いた。

まず、積層構成 $[\pm 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$ の積層板に面内ひずみ $\epsilon_1^0, \epsilon_2^0 = \{0.0015, 0.0015, 0\}$ が作用する場合のシミュレーション結果を表2に示す。この結果は、各破損段階で破損する候補として挙げられる各層の内、それぞれの段階で最も大きい条件付破損確率に相当する安全性指標を示す層を選んだ破損パス（以下最大破損パスと称する）の結果である。この例のように、せん断のない面内ひずみの作用する多重等角斜交対称積層板ではそれぞれの破損段階において、対称な繊維配向角を持つ層は同一の条件付破損確率を有するため、各段階においてそれぞれ対称な繊維配向角を持つ層の同時破損が選択されている。また、剛性低下の減少率を $r=0.3$ としたこの解析では、第4段階で有効工学的弾性定数のうちの $E_2^{(k)}$ が $E_2^{(k-1)}$ を下回ったため、この段階で積層

図5 面内ひずみの変化

図6 面内ひずみの組合せ

表3 同一の積層構成で種々の面内ひずみに対する最大破損パス

$[\pm 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$				Maximum failure path	
$(\epsilon_1^0, \epsilon_2^0, \epsilon_3^0)$	r				
1 (0.0025, 0, 0)	1.0	$\pm 45^\circ \rightarrow \pm 30^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow \pm 75^\circ \rightarrow \pm 60^\circ \rightarrow \pm 15^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$			
2 (-0.0080, 0, 0)	0.8	$\pm 30^\circ \rightarrow \pm 45^\circ \rightarrow \pm 15^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$			
3 (0, 0.0025, 0)	1.0	$\pm 60^\circ \rightarrow \pm 45^\circ \rightarrow \pm 30^\circ \rightarrow \pm 0^\circ \rightarrow \pm 15^\circ \rightarrow \pm 75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ$			
4 (0, -0.0056, 0)	0.9	$\pm 60^\circ \rightarrow \pm 75^\circ \rightarrow \pm 45^\circ \rightarrow \pm 90^\circ$			
5 (0.0015, 0.0015, 0)	1.0	$\pm 45^\circ \rightarrow \pm 60^\circ \rightarrow \pm 30^\circ \rightarrow \pm 15^\circ \rightarrow \pm 75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$			
6 (0.0020, -0.0020, 0)	1.0	$\pm 75^\circ \rightarrow \pm 60^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow \pm 30^\circ \rightarrow \pm 45^\circ \rightarrow \pm 15^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$			
7 (-0.0025, 0.0025, 0)	1.0	$\pm 0^\circ \rightarrow \pm 30^\circ \rightarrow \pm 15^\circ \rightarrow \pm 60^\circ \rightarrow \pm 45^\circ \rightarrow \pm 75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ$			
8 (-0.0025, -0.0025, 0)	1.0	$\pm 45^\circ \rightarrow \pm 60^\circ \rightarrow \pm 30^\circ \rightarrow \pm 75^\circ \rightarrow \pm 15^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$			
9 (0, 0, 0.00400)	1.0	$-45^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -30^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow -15^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow \pm 0^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow 60^\circ$			
10 (0, 0, -0.00400)	1.0	$45^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow \pm 0^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow -15^\circ \rightarrow -30^\circ \rightarrow -60^\circ$			
11 (0.0025, 0, 0.00005)	1.0	$45^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow -30^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -15^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$			
12 (-0.0070, 0, 0.00005)	0.8	$-30^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow \pm 0^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow 60^\circ$			
13 (0, 0.0025, 0.00005)	1.0	$60^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow \pm 0^\circ \rightarrow -30^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ$			
14 (0, -0.0070, 0.00010)	0.8	$-60^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ$			
15 (0.0015, 0.0015, 0.00005)	1.0	$45^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow -30^\circ \rightarrow -15^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$			
16 (0.0020, -0.0020, 0.00005)	1.0	$75^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ \rightarrow -30^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow -15^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$			
17 (-0.0022, 0.0022, 0.00005)	1.0	$60^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow \pm 0^\circ \rightarrow -30^\circ \rightarrow -15^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow \pm 90^\circ$			

表4 種々の積層構成で同一の面内ひずみに対する最大破損パス

$\epsilon_1^0, \epsilon_2^0 = \{0.0035, -0.0020, 0.00005\}$, $r=0.7$

	Configurations	Maximum failure path
1	$[\pm 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_{sym}$	$90^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$
2	$[\pm 0^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$
3	$[\pm 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 75^\circ, 90^\circ]_{sym}$	$90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow -30^\circ$
4	$[\pm 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow -30^\circ$
5	$[\pm 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, 90^\circ]_{sym}$	$90^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow 30^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow -30^\circ \rightarrow \pm 0^\circ$
6	$[\pm 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow -30^\circ$
7	$[\pm 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ$
8	$[\pm 0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ$
9	$[\pm 0^\circ, 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow 45^\circ \rightarrow -45^\circ$
10	$[\pm 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ$
11	$[\pm 0^\circ, 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ$
12	$[\pm 0^\circ, \pm 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ$
13	$[\pm 0^\circ, 5^\circ, \pm 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ$
14	$[\pm 0^\circ, \pm 5^\circ, \pm 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow 60^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ \rightarrow 45^\circ$
15	$[\pm 0^\circ, \pm 5^\circ, \pm 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, 80^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -80^\circ \rightarrow 80^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ$
16	$[\pm 0^\circ, \pm 5^\circ, \pm 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, 80^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -80^\circ \rightarrow 80^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ$
17	$[\pm 0^\circ, \pm 5^\circ, \pm 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, 85^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -85^\circ \rightarrow 85^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow -60^\circ \rightarrow -45^\circ$
18	$[\pm 0^\circ, \pm 5^\circ, \pm 10^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ, \pm 75^\circ, 80^\circ, 85^\circ, \pm 90^\circ]_{sym}$	$\pm 90^\circ \rightarrow -85^\circ \rightarrow 85^\circ \rightarrow -80^\circ \rightarrow 80^\circ \rightarrow -75^\circ \rightarrow 75^\circ \rightarrow -60^\circ$

板の破損が発生したとしてシミュレーションは終了している。図3, 4, 5には、同様の条件下で剛性低下の減少率を $r=1.0$ として、有効工学的弾性定数の値のうちのいずれかが0になるまで最大破損バスの追跡を続けた結果に対する各層の弾性定数の変化、有効工学的弾性定数の挙動、ならびに面内ひずみの変化をそれぞれ示した。なお、図4には $r=0.3$ の場合の各閾値レベルも併記した。これらの図から、最大破損バスを追跡していった結果では、破損の進行につれて徐々に剛性の低下と対応して面内ひずみが増加し、最終段階では急激な剛性低下と面内ひずみの急激な増加がみられる。これらのことは、現実にかかるであろう積層板の内部の逐次破損にともなう力学的挙動をよく表現していると思われる。

表3には、同様の積層構成に対し図6に示す17種類の面内ひずみを入力して、それぞれの場合の最大破損バスを比較のために列挙した。負荷パターンに依存して破損バスが顕著に変化する様子とせん断ひずみの発生する場合と発生しない場合の違いがきわめてよく表現されている。また、表4には、同一の面内ひずみを受ける18種類の異なった積層構成に対して、減少率 $r=0.7$ として最大破損バスを追跡した結果を示す。せん断ひずみの影響を受けない層($\pm 0^\circ, \pm 90^\circ$)は同時破損を起こしているが、その他の層はせん断ひずみの影響を顕著に受けた破損バスの様相をうまく表わしている。

5. 結 言

既存の巨視的破損則と安全性指標に基づく近似信頼性解析法に立脚して、いくつかの異なった層から構成される積層板に、面内ひずみが作用するとき、積層板内に発生する各層の逐次破損を追跡できるシミュレータの概念を提案した。本論文で示した、積層板内に発生する逐次破損現象を一つの破損バスとしてとらえ、それらを追跡するシミュレータのアルゴリズムは、初步的な一方向積層板の面内剛性を基礎として、あくまで線形弾性特性に従うとの仮定の基での議論である。

しかしながら、仮に今後さらに精緻な微視的力学的機構に基づくよりよい破損則が発見されたり、あるいは各層の破損による応力集中の検討や界面剥離までも考慮できる材料設計上有効な破損則を取り入れる場合には、安全性指標を評価する信頼性解析部の限界状態関数を新たに提案された破損則に対応して修正すればよく、本論文で示したシミュレータのアルゴリズムの骨子は普遍である。

提案したシミュレータを用いることによって、積層

板内に発生する任意の破損バスの追跡とその生起確率の評価が可能であることを示し得た。今後、このシミュレータを援用することによって、積層板を一つのシステム構造体とみなして信頼性解析を進めるために、積層板内に発生する破損バスの内の有効なものだけを選択し、全体破損確率の評価、ならびにその破損確率を制約条件とする確率材料設計法の開発の途がさらに一歩前進するものと期待される。

最後に本研究は、金沢工業大学材料システム研究所宮野 靖所長との討論を契機に開始されたものであり、ここに感謝の意を表する。研究遂行に当たり、数値解析の計算には、(株)松下電気産業 池田信彦氏ならびに(株)日立製作所 林和生氏の献身的な協力を得た。ここに記して、深謝する。また、本研究は文部省科学研究費による経済的援助を受けたことを付記して謝意を表する。

文 献

- (1) 三木光範, 第17回FRPシンポジウム前刷, 日本材料学会 (昭63) 107.
- (2) Tsai S.W. and Hahn H.T., Introduction to Composite Materials, (1980) Technomic (藤井太一監訳, 複合材料の強度解析と設計入門, (昭61)248, 日刊工業新聞社) .
- (3) 金原 勲, 尾崎毅志, 高田志郎, 材料, 34-378 (昭61) 280.
- (4) 福田 博, 材料システム, 4 (昭61) 13.
- (5) Fukuda, H., Chou, T.W., Kawata, H., Composite Materials, K. Kawata & T. Akasaka (Ed.), Proc. Japan-U.S. Conf., Tokyo, (1981).
- (6) Rosen, B.W., AIAA J., 2 (1964) 1985.
- (7) Zweben, C., AIAA J., 6 (1968) 2325.
- (8) 中易秀敏, 材料システム, 3 (平1) 41.
- (9) Tsai, S.W. and Wu, E.M., J. Compos. Mater., 5 (1971) 58.
- (10) 中易秀敏, 前川善一郎, R. Rackwitz, 第17回FRPシンポジウム前刷, 日本材料学会 (昭63) 103.
- (11) 中易秀敏, 前川善一郎, 機論, 55-513, A (平1) 1028.
- (12) 中易秀敏, 第18回FRPシンポジウム前刷, 日本材料学会 (平1) 21.
- (13) 中易秀敏, 機論, 56-528, A (平2) 1807.
- (14) 三木光範, 材料, 30-336 (昭56) 943.
- (15) Hochenbichler, M., Gollwitzer, S., Kruse, W., and Rackwitz, R., Structural Safety, 4 (1987) 267.
- (16) Rosenblatt, M., Annals Math. Stat., 23 (1952) 470.