中空円筒形生体硬組織の定常軸圧縮荷重による内部形成*

丹 野 顯^{*1}, 関 根 英 樹^{*1}Internal Remodeling of Hollow Cylindrical Bone Tissue
under Steady Axial Load

Ken TANNO and Hideki SEKINE

The effect of steady axial load on internal remodeling of a hollow cylindrical bone tissue, which is a model of diaphysis, is investigated. The coupling between the change of the volume fraction and the stress distribution is considered. The internal remodeling theory developed by Cowin and Van Buskirk is employed, and the displacement field is represented, including the second-order terms. The governing equations are solved numerically, and the changes of the volume fraction and stress distribution due to internal remodeling are clarified.

Key Words: Biomechanics, Bone Tissue, Adaptive Elasticity, Internal Remodeling, Hollow Cylindrical Body, Axial Load

1. 緒 言

骨などの生体硬組織は、力学的環境が変化すると、それに応じて形態や構造が徐々に変わるという機能的適応性を有している。このような機能が働く過程は形成と呼ばれている。整形外科の分野では健康骨の形成と病的骨のそれとの違いという観点から骨粗鬆症や代謝性骨疾患の治療に役立てる目的で注目されており⁽¹⁾, また歯科矯正の分野でも骨形成は極めて重要なものとして位置付けられている⁽²⁾。

形成は2種類に分類することができ、一つは物体の外形が変化する表面形成であり、もう一つは外形は変化せず組織の体積占有率や機械的性質が変化する内部形成である。Cowin-Hegedus⁽³⁾⁽⁴⁾は、生体硬組織を多孔質体およびそれを浸す灌水とからなる閉じた系としてモデル化し、内部形成を支配する方程式を提案している。この基礎式を用いて、これまでに円柱⁽⁵⁾および円孔を持つ平板⁽⁶⁾の内部形成の解析が行われた。しかしながら、これらの解析では形成速度および体積占有率の最終状態に及ぼす応力分布の影響については当然考慮されているが、形成の結果の応力分布への連成

については全く考慮されてはおらず、適合方程式は完全には満足されていない。著者らは前報⁽⁷⁾で、生体硬組織を不均質異方性適応弾性体として扱い、中実円柱の場合について体積占有率と応力分布との間の連成を考慮した基礎式を導きその解法を示した。

本研究は、実際の長骨の場合を目標として、骨密度が軸方向に不均一な場合の軸圧縮荷重による内部形成を、骨内部の応力分布も含めて扱ったものである。内部形成については Hegedus ら⁽⁴⁾の式を用い、長骨を中空円筒形適応弾性体とモデル化して、変位成分の高次の項および負の次数の項を含んだ基礎式を導き解析を行った。さらに数値計算によって内部形成による応力、骨密度の変化を検討した。

2. 内部形成の基礎式

Cowin ら⁽³⁾の内部形成のモデルによると、生体硬組織が微小なひずみを受ける場合の内部形成速度は次のように表される⁽⁴⁾。

$$\dot{e} = a(e) + A_{ij}(e)e_{ij} \dots\dots\dots (1)$$

ここに e は、生体硬組織を無ひずみ状態にして測った、基準となる体積占有率 ξ_0 からの体積占有率の変化量である。 e_{ij} はひずみテンソル、 $a(e)$, $A_{ij}(e)$ は内部形成における材料パラメータである。本論文では、

* 原稿受付 平成2年6月18日。

*¹ 正員、東北大学工学部 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

$a(e)$, $A_{ij}(e)$ として Cowin ら⁽⁵⁾と同様に次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} a(e) &= c_0 + c_1 e + c_2 e^2 \\ A_{ij}(e) &= A_{ij}^0 + A_{ij}^1 e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$c_0, c_1, c_2, A_{ij}^0, A_{ij}^1$ は材料定数であり、ヒト皮質骨に対する値は次のとおりである⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1.5 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1} \\ c_1 &= -1.5 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1} \\ c_2 &= 2.5 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{11}^0 &= A_{22}^0 = A_{33}^0 = A_{11}^1 = A_{22}^1 = A_{33}^1 \\ &= -10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$A_{12}^0 = A_{23}^0 = A_{31}^0 = A_{12}^1 = A_{23}^1 = A_{31}^1 = 0 \dots\dots\dots (5)$$

3. 生体硬組織の変形の基礎式

生体硬組織内のある点を考え、そのまわりに微小体積要素 V をとる。微小体積要素内の実質部の体積を V_M とし、実質部以外では応力を支えないとして、その点での応力 τ_{ij} を次式で定義する。

$$\tau_{ij} = (1/V) \int_{V_M} \tau_{ij}^M dV \dots\dots\dots (6)$$

ここで τ_{ij}^M は実質部での応力である。実質部以外でのひずみと変位については微小体積要素内の実質部の平均値と同じであるとすると、応力 τ_{ij} の定義と同様に、考えている点でのひずみ e_{ij} と変位 u_i はそれぞれ次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= (1/V_M) \int_{V_M} e_{ij}^M dV \\ u_i &= (1/V_M) \int_{V_M} u_i^M dV \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

e_{ij}^M と u_i^M はそれぞれ V_M でのひずみと変位である。以上で定義された応力 τ_{ij} , ひずみ e_{ij} , 変位 u_i を用いると、応力-ひずみおよび変位-ひずみの関係、平衡方程式は次式のように書くことができる⁽⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= (\xi_0 + e) c_{ijkl} e_{kl} \\ e_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ \tau_{ij,j} + \gamma(\xi_0 + e) b_i &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、コンマの後の添字 i は x_i に関する偏微分を意味する。ここで、 c_{ijkl} は実質部の弾性係数である。また、 γ は実質部の密度で場所に依存しない定数とする。 b_i は単位体積当たりの体積力である。

4. 軸荷重を受ける中空円筒形生体硬組織の変形問題の定式化

内半径 r_i , 外半径 r_o , 長さ $2l$ の中空円筒形生体硬組織が軸方向に圧縮荷重を受け、軸対称の内部形成が生じる場合を考える。同筒の軸方向に z 軸をとり、 $z=0, 2l$ が端面であるものとする。実質部の弾性係数、 c_{ijkl} に関しては、均質であり面内等方性とする。

円筒端面では平均圧縮応力 $\bar{p}$ が作用し、また円筒側面には外力が作用していないものとする。そのとき円筒端面および円筒内・外側面の条件は次のように表される。

$$\int_{r_i}^{r_o} r \tau_{zz} dr = - (r_o^2 - r_i^2) \bar{p} / 2 \dots\dots\dots (9)$$

$$r = r_o, r_i \text{ で } \tau_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

円筒側面の条件(10)を考慮すると平衡方程式から次の式が得られる。なお、体積力は無視している。

$$\int_{r_i}^{r_o} (r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \tau_{\theta\theta}) dr = 0 \dots\dots\dots (11)$$

変位成分を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= ru_1(z) + r^3 u_2(z) + \frac{1}{r} u_5(z) \\ u_\theta &= 0 \\ u_z &= u_3(z) + r^2 u_4(z) + \frac{1}{r^2} u_6(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

式(12)の $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ で表した応力を式(9)~(11)に代入し整理すると、次の u_1, u_2, u_5 に関する三元連立2階常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & (D_{33}^{(3)} - r_o^2 D_{33}^{(1)}) u_1''(z) + \frac{1}{r_o^2 + r_i^2} \{ (r_o^4 + r_o^2 r_i^2 + r_i^4) (D_{33}^{(3)} - r_o^2 D_{33}^{(1)}) + r_o^2 r_i^4 (r_i^2 D_{33}^{(-1)} - D_{33}^{(1)}) \} u_2''(z) \\ & + \frac{1}{r_o^2 + r_i^2} \{ D_{33}^{(3)} - r_o^2 r_i^2 D_{33}^{(-1)} - (r_o^2 - r_i^2) D_{33}^{(1)} \} u_5''(z) + 2 \{ \frac{C_{11}^0 + C_{12}^0}{C_{13}^0} D_{33}^{(1)} - 2 D_{13}^{(1)} \} u_1(z) \\ & + 2 \{ \frac{3C_{11}^0 + C_{12}^0}{C_{13}^0} r_o^2 D_{33}^{(1)} - 4 D_{13}^{(3)} \} u_2(z) + \frac{2}{r_o^2} \frac{-C_{11}^0 + C_{12}^0}{C_{13}^0} D_{33}^{(1)} u_5(z) = (r_o^2 - r_i^2) \bar{p} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (D_{33}^{(3)} - r_i^2 D_{33}^{(1)}) u_1''(z) + \frac{1}{r_o^2 + r_i^2} \{ (r_o^4 + r_o^2 r_i^2 + r_i^4) (D_{33}^{(3)} - r_i^2 D_{33}^{(1)}) + r_o^2 r_i^4 (r_i^2 D_{33}^{(-1)} - D_{33}^{(1)}) \} u_2''(z) \\ & + \frac{1}{r_o^2 + r_i^2} \{ D_{33}^{(3)} - r_o^2 r_i^2 D_{33}^{(-1)} + (r_o^2 - r_i^2) D_{33}^{(1)} \} u_5''(z) + 2 \{ \frac{C_{11}^* + C_{12}^*}{C_{13}^*} D_{33}^{(1)} - 2 D_{13}^{(1)} \} u_1(z) \\ & + 2 \{ \frac{3C_{11}^* + C_{12}^*}{C_{13}^*} r_i^2 D_{33}^{(1)} - 4 D_{13}^{(3)} \} u_2(z) + \frac{2}{r_i^2} \frac{-C_{11}^* + C_{12}^*}{C_{13}^*} D_{33}^{(1)} u_5(z) = (r_o^2 - r_i^2) \bar{p} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$(D_{33}^{(3)} - D_{33}^{(1)} D_{13}^{(2)} / D_{13}^{(0)}) u_1''(z) + [-D_{33}^{(1)} D_{44}^{(4)} / D_{13}^{(0)} + \frac{1}{r_o^2 + r_i^2} \{ (r_o^4 + r_o^2 r_i^2 + r_i^4) (D_{33}^{(3)} + (D_{44}^{(2)} - D_{13}^{(2)})$$

$$\begin{aligned}
& \times D_{33}^{(1)}/D_{13}^{(0)} + r_o^4 r_i^4 (D_{33}^{(-1)} - (D_{13}^{(-2)} + D_{44}^{(-2)}) D_{33}^{(1)}/D_{13}^{(0)})] u_2''(z) \\
& + [-D_{33}^{(1)} D_{44}^{(0)}/D_{13}^{(0)} + \frac{1}{r_o^2 + r_i^2} (D_{33}^{(3)} + (D_{44}^{(2)} - D_{13}^{(2)}) D_{33}^{(1)}/D_{13}^{(0)} - r_o^2 r_i^2 (D_{33}^{(-1)} - (D_{13}^{(-2)} + D_{44}^{(-2)}) D_{33}^{(1)}/D_{13}^{(0)}))] u_5''(z) \\
& + [-D_{33}^{(1)} D_{44}^{(4)}/D_{13}^{(0)} + \frac{1}{r_o^2 + r_i^2} ((r_o^4 + r_o^2 r_i^2 + r_i^4) (D_{33}^{(1)} D_{44}^{(2)}/D_{13}^{(0)}) - r_o^4 r_i^4 D_{33}^{(1)} D_{44}^{(-2)}/D_{13}^{(0)})] u_2'(z) \\
& + [-D_{33}^{(1)} D_{44}^{(0)}/D_{13}^{(0)} + \frac{1}{r_o^2 + r_i^2} (D_{33}^{(1)} D_{44}^{(2)}/D_{13}^{(0)} + r_o^2 r_i^2 D_{33}^{(1)} D_{44}^{(-2)}/D_{13}^{(0)})] u_5'(z) \\
& + 2\{-2D_{13}^{(1)} + (D_{11}^{(0)} + D_{12}^{(0)}) D_{33}^{(1)}/D_{13}^{(0)}\} u_1(z) + 2\{-4D_{13}^{(3)} + (D_{11}^{(2)} + 3D_{12}^{(2)}) D_{33}^{(1)}/D_{13}^{(0)}\} u_2(z) \\
& + 2(D_{13}^{(-2)} - D_{12}^{(-2)}) D_{33}^{(1)}/D_{13}^{(0)} u_5(z) = (r_o^2 - r_i^2) \bar{p} \dots \dots \dots (15)
\end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \nu C_{1111}, \quad C_{12} = \nu C_{1122} \\ C_{13} &= \nu C_{1133}, \quad C_{33} = \nu C_{3333} \\ C_{44} &= \nu C_{2323}, \quad C_{66} = \nu C_{1212} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

ただし, $\nu = \xi_0 + e$, $(\quad)' = \partial(\quad)/\partial z$ とする。 C_{ij}^0 , C_{ij}^* はそれぞれ $r = r_o$ および $r = r_i$ での C_{ij} の値である。また

$$\left. \begin{aligned} D_{ij}^{(*)} &= \int_{r_i}^{r_o} C_{ij} r^k dr \\ C_{ij}^{(*)} &= \int_{r_i}^{r_o} C_{ij} r^k dr \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

式(13)～(15)は円筒端面で6個の境界条件が与えられれば解くことができる。

5. 数 値 計 算 例

ヒト皮質骨を対象とし、材料定数を Cowin ら⁽⁵⁾のそれを参考にして次のようにとる。

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \lambda_2 + 2\mu_2, \quad C_{12} = \lambda_2, \quad C_{13} = \lambda_1 \\ C_{33} &= \lambda_1 + 2\mu_1, \quad C_{44} = 2\mu_3, \quad C_{66} = 2\mu_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 40\nu, \quad \lambda_2 = 40\nu \\ \mu_1 &= 7\nu, \quad \mu_2 = 4\nu, \quad \mu_3 = 4\nu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

$$\xi_0 = 0.892 \dots \dots \dots (20)$$

作用している外力の大きさおよび e の初期状態 $e_0(z)$ は Cowin ら⁽⁵⁾と同様に次のようにおく。

$$\bar{p} = 1.2 \quad [\text{MPa}] \dots \dots \dots (21)$$

$$e_0(z) = 0.1 \sin \frac{\pi z}{l} \dots \dots \dots (22)$$

式(2)～(5)を考慮すると、式(1)の内部形成の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{e} &= 1.5 \times 10^{-8} - 1.5 \times 10^{-7} e + 2.5 \times 10^{-7} e^2 \\ &\quad - 10^{-4} (1 + e) (e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{zz}) \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

中空円筒の横断面内の応力成分を

$$\tau_{zz} = \bar{p}, \text{ 他の応力成分は零 } \dots \dots \dots (24)$$

とおいた場合には、式(23)は解析的に解くことができる⁽³⁾。

$$\begin{aligned} e(z, t) &= [e_1 \{e_0(z) - e_2\} \\ &\quad + e_2 \{e_1 - e_0(z)\} \exp(t/\tau)] / [\{e_0(z) - e_2\} \\ &\quad + \{e_1 - e_0(z)\} \exp(t/\tau)] \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} e_1 &= 0.467, \quad e_2 = 0.135 \\ \tau &= 1.21 \times 10^7 \quad [\text{s}] \cong 140 \quad [\text{days}] \end{aligned} \dots \dots \dots (26)$$

体積占有率の初期状態を表す $e_0(z)$ は周期 $2l$ の周期関数であり、本論文で取り上げた長さ $2l$ の有限長中空円筒も無限に長い中空円筒の一部と考え、周期 $2l$ の周期性を導入すれば、常微分方程式(13)～(15)を解く際の円筒端面での境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_1(0) &= u_1(2l), \quad u_1'(0) = u_1'(2l) \\ u_2(0) &= u_2(2l), \quad u_2'(0) = u_2'(2l) \\ u_5(0) &= u_5(2l), \quad u_5'(0) = u_5'(2l) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

式(13)～(15)の三元連立2階常微分方程式は無次元化した後、ルンゲ・クッタ・メルソン法によって数値的に解いた。 z 方向の分割は1000、時間ステップは 0.02τ とした。 C_{ij} の r に関する積分は、 r 方向に10等分し、シンプソン1/3則によって数値的に求めた。 z 方向の分割点以外での積分値は線形補間法で求め、さらに弾性係数の z に関する微分は中央差分でおきかえた。

数値計算は、長骨の骨幹のデータを参照して内外径比 r_i/r_o については0.5と0.7の2通りに設定し、 $r_o/2l=1$ として行った。

図1は、 $r_i/r_o=0.5$ に対する体積占有率の変化量 e の z 方向の分布の時間的な変化を示したものである。 e の z 方向の不均一さは内部形成によって時間の経過とともに減少し $t=4\tau$ ではほぼ均一な状態になる。この過程で e の半径方向分布の不均一はほとんどみられない。 $r_i/r_o=0.7$ の場合の e への z 方向の分布は $r_i/r_o=0.5$ の場合とほぼ一致し、内外径比の影響はほとんど表れない。

図2は、内外径比が(a) $r_i/r_o=0.5$, (b) $r_i/r_o=0.7$ の場合について $t=0$, $t=0.4\tau$ のときの $z/2l=0.25$, 0.5 , 0.75 , 1 における円筒横断面内の垂直応力 τ_{zz} およびせん断応力 τ_{rz} の半径方向分布を示したものである。図より、骨密度が平均よりも大きい場所では、 τ_{zz} の値は円筒内面側で最小となり外面側で最大となることがわかる。逆に骨密度が平均より小さい場所では、

内面側で最大となり外面側で最小となる。せん断応力 τ_{zr} は骨密度の z 方向のこう配が零でない位置で生じ、円筒内面側と外面側のほぼ中間の位置で最大となる。その最大値の大きさは骨密度の z 方向の変化が大きいほど大きい。これらの z 方向および半径方向の応力の不均一さは時間の経過とともに減少し、 $t=4\tau$ では不均一さはほとんど消滅する。また、内外径比 r_i/r_o が大きくなると、 τ_{zz} の分布は若干ではあるがより均一になり、 τ_{zr} はその最大値が小さくなることからわかる。

軸圧縮荷重を受ける中実円柱形生体硬組織の内部形成の解析結果⁷⁾との比較では、半径方向位置による体積占有率の変化については、中実円柱形の場合には半径方向の位置による体積占有率の違いがわずかに見られるが、中空円筒形で内外径比が 0.5 あるいは 0.7 の場合には半径方向の位置による違いは図に表れない程度に小さくなっている。一方、応力分布については、中実円柱形および中空円筒形のどちらの場合も傾向は一致している。特に、垂直応力については、中空円筒形での各位置での値が、中実円柱形の対応する位置での値とほぼ等しくなることがわかった。したがって、垂直応力については中実円柱形で得られた値によって中空円筒形の場合の値を推定することが可能であると言える。また、体積占有率についても中空円筒形の場合の値を中実円柱形の表面での値によって評価しても誤差は小さいと言える。

図 1 体積占有率の変化量 e の軸方向分布の時間的変化

6. 結 言

本研究では、軸方向に不均一な体積占有率の分布をもつ中空円筒形生体硬組織が、軸方向に圧縮荷重を受けて、内部形成を行う場合の、体積占有率および応力の解析を行った。その結果、円筒横断面内の垂直応力は、軸方向および横断面内で、体積占有率の不均一さを原因とする不均一な分布になり、さらに体積占有率の軸方向の変化のこう配が零でないところではせん断応力が生じることを示した。また、これらの不均一な分布は内部形成の作用によって時間の経過とともに均一な状態へと変化することを示した。

中実円柱形の場合の解析結果と比較することにより、中空円筒形の場合の垂直応力の値は、中実円柱形の対応する位置での値とほぼ同一の値を示すことがわかった。また、体積占有率についても中実円柱形の場合の表面での値とほぼ等しい値を示し、中実円柱形の解析結果から中空円筒の場合の垂直応力および体積占

図 2 垂直応力 τ_{zz} 、せん断応力 τ_{zr} の分布

有率を評価することが可能であることがわかった。

文 献

- (1) 例えば, Frost, H. M., *Bone Remodeling and its Relationship to Metabolic Bone Diseases*, (1973), Thomas.
 - (2) 千葉, 日橋歯誌, **48**-6(1989), 585.
 - (3) Cowin, S. C. and Hegedus, D. H., *J. Elasticity*, **6**-3(1976), 313.
 - (4) Hegedus, D. H. and Cowin, S. C., *J. Elasticity*, **6**-4(1976), 337.
 - (5) Cowin, S. C. and Van Buskirk, W. C., *J. Biomech.*, **11**-5(1978), 269.
 - (6) Firoozbakhsh, K. and Aleyaasin, M., *J. Biomech. Eng.*, **111**-1(1989), 355.
 - (7) 丹野・関根, 機論, **56**-527, A (1990), 84.
 - (8) Firoozbakhsh, K. and Cowin, S. C., *J. Biomech. Eng.*, **102**-4(1980), 287.
-