き裂開口変位分布に基づく三次元き裂の応力拡大係数の評価*

鳥居 太始之^{*1}, 本田 和 男^{*1}, 日 影 淳^{*2}

Evaluation of Stress Intensity Factors of Three-Dimensional Cracks Based on Crack Opening Displacement Distribution

Tashiyuki TORII, Kazuo HONDA and Jun HIKAGE

The authors have already derived the equation by which crack opening stress distributions and the resulting stress intensity factors (SIF) can be calculated from the crack opening displacements along a crack, based on the complex-valued formulas on the stress and displacement of a two-dimensional crack. In this study, this equation is used to evaluate the SIF of a three-dimensional crack. For elliptical internal cracks, the SIF at the principal axis could be evaluated theoretically under a plane strain condition from the crack opening displacement distributed in the vertical plane including the principal axis. For surface part-through cracks, the SIF evaluated under a plane stress condition from the crack opening measured along a crack on the specimen surface were in good agreement with the SIF determined from Newman-Raju's equation necessary for both the applied stress and the surface crack shape.

Key Words: Elasticity, Fracture Mechanics, Stress Intensity Factors, Crack Opening Displacement, Internal Elliptical Crack, Surface Crack

1. 結 言

機械・構造物の安全性評価には、表面き裂や内部き裂などの三次元き裂が問題とされる場合が多い。その応力拡大係数の計算には、き裂が挿入される位置での応力分布とき裂の形状寸法(だ円形状として扱われる場合が多い)を知る必要がある⁽¹⁾。一般に、任意応力分布下の三次元き裂の応力拡大係数を理論的に計算することは容易ではない。最近、実用的な立場から表面き裂を対象として、一様でない応力分布と半だ円状き裂が与えられた場合の応力拡大係数に関する計算方法および数値計算例が報告されている^{(2)~(4)}。しかし、実際に複雑な形状を有する機械・構造物において、き裂発見場所の応力分布(残留応力も含む)の状態を正確に知ることは難しいことが多い。その上、奥行のある三次元き裂の寸法を精度よくその場で知ることは簡単ではなく、現在その計測法の検討が種々行われている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

一方、著者らは前報の二次元き裂解析において、応力分布が不明でもき裂開口変位分布が与えられればき裂開口応力分布が計算でき、それを用いて応力拡大係

数(モード I)が評価できることを報告した⁽⁷⁾。また、Irwin も指摘しているように⁽⁸⁾、三次元き裂の応力拡大係数も結局き裂開口変位分布の状態に支配されていると考えられる。ここでは、一様引張応力下の無限体中の内部だ円き裂の応力拡大係数が、平面的(平面ひずみ条件下)に捉えたき裂開口変位分布から、前報⁽⁷⁾の方法を用いて評価できるか否かを解析的に検討した。さらに、表面き裂について、試料表面上では平面応力状態(一般化された)が成立すると仮定して、同様に前報⁽⁷⁾の方法を用いて表面上のき裂開口変位分布の実測値から応力拡大係数(表面上)を評価した。そして、その値の妥当性を実際によく使用される Newman-Raju の式⁽⁴⁾による応力拡大係数と比較した。

2. 評価法および解析的検討

2.1 評価法 図1のように、(a)の無限体中の内部だ円き裂と(b)の表面き裂に対し、(c)のように xy 平面を抽出して、それぞれ平面ひずみ条件下および平面応力条件下の二次元き裂モデルを考える^{**1}。このき裂モデルにおいて、き裂開口変位分布 $V(x)$ が与

* 原稿受付 平成2年6月4日。

*1 正員、岡山大学工学部 (〒700 岡山市津島中 3-1-1)。

*2 岡山大学大学院。

**1 変位法に基づく表面き裂の応力拡大係数の解析において、内部は平面ひずみおよび表面上では平面応力の条件を用いて検討されている⁽²⁾⁽⁹⁾。

えられれば、前報⁽⁷⁾で導出した式(1)を用いてモード I 形き裂の開口応力分布 $\sigma_{yy}(t)$ を計算できる。

$$\sigma_{yy}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-c}^c \frac{E'}{x-t} \left(\frac{dV}{dx} \right) dx \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで、 $2c$ はき裂長さであり、 E' は縦弾性係数 E およびポアソン比 ν を用いて式(2)のように表される。

$$E' = \begin{cases} E/(1-\nu^2) & (\text{平面ひずみ}) \\ E & (\text{平面応力}) \end{cases} \quad \cdots \cdots (2)$$

前報では上式の妥当性を数値計算により検討したが⁽⁷⁾、以下のように解析的に調べることができる。例えば、無限板中の貫通き裂が一様引張応力 σ_0 を受ける場合、き裂開口変位分布 $V(x)$ は、式(3)により表されている⁽¹⁰⁾。

$$V(x) = \frac{4\sigma_0}{E} \sqrt{c^2 - x^2} \quad \cdots \cdots (3)$$

さらに、式(3)を式(1)に代入して、積分すれば式(4)が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(t) &= -\frac{\sigma_0}{\pi} \int_{-c}^c \frac{x}{(x-t)\sqrt{c^2 - x^2}} dx \\ &= -\sigma_0, (|t| < c) \quad \cdots \cdots (4) \end{aligned}$$

これより、式(3)のようにだ円を表す $V(x)$ に対してはき裂開口応力分布 $\sigma_{yy}(t)$ は一定値となり、重ね合わせの原理から予想されるように負荷応力 σ_0 に等しいことがわかる。なお、負の符号はき裂線上 ($x=0$) の上縁で $y>0$ 、下縁で $y<0$ の方向に作用する応力を示す。すなわち、き裂は開口し、応力拡大係数 K (モード I 形) は式(5)のようによく知られた表示となる⁽¹⁰⁾。

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c |\sigma_{yy}(t)| \sqrt{\frac{c+x}{c-x}} dx = \sigma_0 \sqrt{\pi c} \quad \cdots (5)$$

2.2 内部だ円き裂の応力拡大係数 無限遠方

図1 三次元き裂の平面モデル化

一様な引張応力 σ_0 を受ける内部だ円き裂を、図2のように x 軸上長さ $2c$ および z 軸上長さ $2a$ とすれば、 p 点の応力拡大係数 K は式(6)のように導出されている⁽⁸⁾⁽¹¹⁾。

$$K = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{E(k)} (\sin^2 \phi + k'^2 \cos^2 \phi)^{1/4} \quad \cdots \cdots (6)$$

ここで、 $E(k)$ はき裂のアスペクト比 $k' (=a/c < 1)$ を用いて表される $k^2 (=1 - k'^2)$ の関数となる第2種完全だ円積分であり、 ϕ は p 点の離心角である。

さて、式(6)において、 c 点 ($\phi=0$) と a 点 ($\phi=\pi/2$) の応力拡大係数をそれぞれ K_c と K_a とすれば、式(7)のようになる。

$$K_c = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{E(k)} \cdot \sqrt{\frac{a}{c}}, K_a = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad \cdots \cdots (7)$$

一方、 xz 面 ($y=0$) 上のき裂開口変位 $V(x, z)$ は式(8)により表される⁽¹²⁾。

$$V(x, z) = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{\sigma_0 a}{E(k)} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 - \left(\frac{z}{a}\right)^2} \quad \cdots \cdots (8)$$

これより、 x 軸上および z 軸上のき裂開口変位分布は式(9)となる。

$$\left. \begin{aligned} V(x) &= \frac{4(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{\sigma_0}{E(k)} \cdot \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - x^2} \\ V(z) &= \frac{4(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{\sigma_0}{E(k)} \sqrt{a^2 - z^2} \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (9)$$

式(9)を平面ひずみ条件下の式(1)に代入して、式(3)~(5)と同様の計算を行うと、 x 軸上および z 軸上のき裂開口応力分布 $\sigma_{yy}(x)$ および $\sigma_{yy}(z)$ 、さらに c 点および a 点の応力拡大係数 K_c および K_a は、それぞれ式(10)および式(11)のように誘導される。

$$\sigma_{yy}(x) = -\frac{\sigma_0}{E(k)} \cdot \frac{a}{c}, \sigma_{yy}(z) = -\frac{\sigma_0}{E(k)} \quad \cdots (10)$$

$$K_c = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{E(k)} \sqrt{\frac{a}{c}}, K_a = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{E(k)} \quad \cdots \cdots (11)$$

式(11)と式(7)を比較すれば、両式は完全に一致することがわかる。これより、内部だ円き裂において、両軸上の応力拡大係数は各軸を含む平面内のき裂開口変位分布を平面ひずみ条件下の二次元き裂とみなして評価

図2 内部だ円き裂と座標系

できること、すなわち、図 1(a)→(c)のモデル化が妥当であることがわかる。なお、式(10)のき裂開口応力 $|\sigma_{yy}|$ は負荷応力 σ_0 よりも小さく、またその値はき裂のアスペクト比 a/c の影響を受けることがわかる。

3. 表面き裂に関する実験的検討

3.1 試験片 供試材は 2 種類の S 45 C 材である。その化学成分と機械的性質は若干異なるので、表 1 のようにタイプ A, B と区別した。試験片の形状寸法は図 3 のように板幅が多少異なる 2 種類を用いタイプ 1, 2 と区別した。例えばタイプ 1 と A の組合せでは 1 A と表示した。なお、タイプ 2 は深さに沿って変化する残留応力場を利用して、焼なまし材(タイプ 1 による)では得られない表面き裂のアスペクト比を得るために前報⁽¹³⁾と同様の形状寸法とした。また、試験片の片側表面中央には、き裂を発生させるために非貫通の微小穴(直径 0.5 mm, 深さ 0.8 mm)をあけた。さらに、機械加工後、真空中にて 1123 K, 1 h 保持の焼なましを行った。最後に試験片中央の平行部を電解研磨により約 30 μm 除去して表面を仕上げた。

表面き裂の大部分は焼なまし材を用い応力振幅 $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, 応力比 $R = -0.5$ および繰返し速度 20 Hz の条件で疲労き裂を作製し、疲労によって生じたき裂周辺残留応力を消失させるために、その後 873 K,

表 1 供試材の化学成分と機械的性質

Type	C	Si	Mn	P	S
A	0.47	0.22	0.70	0.015	0.019
B	0.45	0.18	0.78	0.012	0.006

Type	Yield point O _y MPa	Tensile strength O _B MPa	Elongation δ %	Microvickers hardness Hv
A	319	622	25.4	170
B	356	614	22.4	168

図 3 試験片の形状寸法

1 h 保持の真空中低温焼なましを行った。このような焼なまし材で得られる表面き裂アスペクト比の範囲は、後述するように狭いので、深さ方向に変化する残留応力分布によってき裂のアスペクト比が大幅に変化する前報の結果を利用して⁽¹³⁾, さらに広範囲のアスペクト比が得られるようにした。なお、その残留応力発生の方法と測定結果は前報で報告しているのでここでは省略する⁽¹³⁾。

3.2 表面き裂の開口変位分布と形状の測定法

き裂開口変位分布の測定には、2 種類の方法を用いた。まず、従来の方法として⁽⁷⁾き裂を狭む約 60 μm の標点間の目印にマイクロビッカース圧痕を、約 0.1 mm 間隔(き裂先端付近では 0.05 mm 間隔)でき裂に沿って付けた。そして、負荷時と除荷時の圧痕間距離を接眼移動測微計(1 目盛 0.24 μm)を用いて測定し、その差を各位置でのき裂開口変位量とした。この方法を以下の図では Microscope と表示した。次に、新しく画像処理を用いる方法として、き裂を光学顕微鏡にて拡大(対物レンズ 40 倍)し、カメラを通してビデオ入力、さらにモニタと I/O ボードを介してパーソナルコンピュータ PC 9801 VM 上で画像処理を行った。この方法を以下の図では Image と表示した。図 4 はその画像の例(表面上 $2c=6.20$, 深さ $a=2.17 \text{ mm}$ の表面き裂表面上でき裂中央からの距離 $x=1.0 \text{ mm}$ の位置でのき裂開口状態)である。すなわち、(a)負荷前、(b)引張応力 $\sigma_0=100 \text{ MPa}$, (c) $\sigma_0=150 \text{ MPa}$ および(d)除荷時の画像から、引張負荷によりき裂は大きく開口していることがわかる。画像上でき裂上の位置 x を定め、負荷時と除荷時のドット数で表されるき裂開口量の差をき裂開口変位量とした。なお、1 ドット長さの較正は、10 μm 間隔で刻まれた図 5 のようなマ

図 4 き裂開口状態の画像例

イクロスケール(市販)を用いて行い、その結果 $0.1 \mu\text{m}/\text{ドット}$ の較正値を得た。また、画像処理用の試験片としては、き裂周辺の汚れをとるため、低温焼なましを行う前に酸化アルミニウムで軽く研磨し明りょうなき裂縁となるようにした。

き裂開口変位分布を測定した後、疲労試験において応力振幅を低下し(疲労き裂作製時の半分以上)、ビーチマークを破面につけた。疲労破断後、破面を投影機(50倍)で観察し表面き裂形状を測定した。

3.3 表面き裂形状の観察結果 前報において⁽¹³⁾、残留応力の有無によらず表面き裂はほぼ半円形状となることを写真を用いて示した。図6は、本実験で得たビーチマークを投影機上でトレースした結果をまとめたものである。図において、(O.Q.)表示以外の焼なまし材では、 a/c が $0.8 \sim 0.9$ 程度の表面き裂形状となることがわかる。一方、前報の方法により 1123 K から油焼入れを行った(O.Q.)材では、すでに報告しているように⁽¹³⁾、表面で引張りの変態応力が重畳し $z \approx 1 \sim 2 \text{ mm}$ で圧縮を経て板厚中央($z \approx 2 \sim 4 \text{ mm}$)で再び引張りとなる残留応力分布が生じるため、き裂が浅い場合は a/c は小さく、逆にき裂が深い場合は a/c は大きくなることから、焼なまし材の結果と比較してわかる。これらの観察結果から、表面き裂の表面はだ円の長軸とみなされるので、内部だ円き裂の主軸を含む平面内き裂と同様に、二次元き裂として扱うことがで

One scale = $10 \mu\text{m}$

図5 マイクロスケールによる画像上の長さの較正法

図6 ビーチマークをトレースした表面き裂の形状

きると考えた。ただし、内部き裂との違いでは、図1(b)→(c)のように平面応力条件とする必要がある。

3.4 き裂開口変位分布と応力拡大係数 図7は、引張応力 $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$ あるいは 150 MPa を受ける表面き裂($c=3.5 \text{ mm}$, $a/c=0.89$)に対し、接眼移動測微計を用いて表面上のき裂開口変位分布を測定した結果である。なお、図には負荷前の値を基準にした除荷後のき裂開口変位測定値も示している。また、図8は、 $c=3.9 \text{ mm}$ ($a/c=0.84$)について表面上のき裂開口変位分布を画像処理を用いて測定した結果である。これより、図7において測定値の変動幅は少し大きい、両図とも最小二乗法により描いた実線のだ円曲線を用いて測定値をよく近似できること、き裂開口量は引張応力 σ_0 とともに増大することがわかる。また、除荷後の値はほぼ零付近にあり、引張負荷時にき裂先端で生じるかもしれない引張塑性変形がき裂開口変位測定値に及ぼす影響は小さいものと思われる。

さて、図7、8中の実線で示すだ円曲線のき裂開口変位分布を式(1)の $V(x)$ に代入し、平面応力条件下でき裂開口応力分布 $\sigma_{yy}(t)$ を計算した。その値は一定値となるので σ_1 と表示し、 σ_1/σ_0 を求めると図中の表のように1より小さい値となった。その σ_1 から式(5)を用いて同様に評価した応力拡大係数 K と、き裂の形状寸法と負荷応力から評価したNewman-Rajuの式⁽⁴⁾による応力拡大係数 K を、 K/σ_0 の値を用いて比較した。その結果、双方の値はいずれのき裂開口変位計測法においてもほぼ等しく、その K/σ_0 の値はNewman-Rajuの式による値に近いことがわかる。なお、

Type	1A	c(mm)	3.5	a/c	0.89	Method	Microscope
	σ_0	σ_1/σ_0	Estimated values	Values of Newman-Raju	Error(%)		
■	150	0.84	$(K/\sigma_0) \times 10^{-3} \sqrt{\text{m}}$	8.519	8.263		+3.1
○	100	0.84	8.519				+3.1
●	Unloading						

図7 接眼移動測微計によるき裂開口変位分布の測定例と応力拡大係数の評価例

式(1)の計算に必要な E の値は 206 GPa とした。

図 9 は、表面上のき裂長さ c がほぼ等しく深さ a が異なる表面上のき裂開口変位分布の測定値と応力拡大係数を比較したものである。ただし、 σ_0 は 150 MPa でき裂開口変位は画像処理を用いて測定した。これより、両き裂の開口変位実測値は、実線のだ円曲線によりよく近似できること、さらにき裂が深くなるとその影響を反映して、表面上でのき裂開口変位は増大し結果として応力拡大係数も大きくなるのがわかる。そしてその推定値は、Newman-Raju の式⁽⁴⁾による応力拡大係数ともほぼ一致していることがわかる。

最後に、図 10 は本研究で用意した表面き裂すべてについて、表面上のき裂開口変位分布の測定値から推

定した応力拡大係数と、半だ円状き裂の寸法と負荷応力から評価した Newman-Raju の式⁽⁴⁾による応力拡大係数(表面上)の相関をグラフにまとめたものである。なお、図中*印は接眼移動測微計により、一方無印は画像処理によりそれぞれき裂開口変位分布を測定したものである。これより、いずれの測定法を用いても推定した応力拡大係数(表面上)は、全体的に Newman-Raju の式⁽⁴⁾による値に近いことがわかる。

4. 結 言

二次元き裂の開口変位分布に基づく応力拡大係数評価法が、三次元き裂に適用できるか否かを無限体中の内部だ円き裂について解析的に検討した。さらに、表面き裂の応力拡大係数(表面上)の評価に対して、き裂深さの値を必要としない本方法を適用した。すなわち、表面上のき裂開口変位分布の測定値から推定した応力拡大係数を、一般に用いられる Newman-Raju の式⁽⁴⁾による値と比較した。主な結果は以下のようにまとめられる。

(1) 一様引張りを受ける無限体中の内部だ円き裂において、主軸を含む平面内のき裂に対して、著者らが前報⁽⁷⁾で導出したき裂開口変位分布とき裂開口応力分布の関係式を平面ひずみ条件下で使用した。得られたき裂開口応力分布を用いて二次元的に誘導した応力拡大係数は、三次元き裂の応力拡大係数として導出されている理論式に一致した。

(2) 一様引張りを受ける表面き裂において、表面上のき裂開口変位分布を画像処理により測定した結果

図 8 画像処理によるき裂開口変位分布の測定例と応力拡大係数の評価例

図 9 表面上のき裂開口変位分布と応力拡大係数に及ぼすき裂深さの影響

図 10 応力拡大係数の本評価法による推定値と Newman-Raju の式による値の相関

は、従来の接眼移動測微計による実測値と同様に、だ円曲線によく近似できることが確認できた。

(3) 一様引張りを受ける表面き裂の開口変位分布の実測値から平面応力条件下でき裂開口応力分布を求め、それより二次元的に評価した応力拡大係数(表面上)は、Newman-Rajuの式⁽⁴⁾による応力拡大係数に近い値となった。すなわち、本評価法は、表面き裂を有する物体に負荷される応力およびき裂深さが不明な場合、表面上に限られるけれどもその応力拡大係数を評価する方法として有効であると考えられる。

終わりに、実験上の援助をいただいた文部技官・徳田勝氏、当時学生・池永修志君、塩川勝重君および今城輝政君に謝意を表する。

文 献

- (1) Shah, R. C. and Kobayashi, A. S., *Eng. Fract. Mech.*, **3**

- 1(1971), 71.
 (2) 白鳥・ほか2名, 機論, **51**-467, A(1985), 1828.
 (3) Mattheck, C., Munz, D. and Stamm, H., *Eng. Fract. Mech.*, **18**-3(1983), 633.
 (4) Newman, J. C. Jr. and Raju, I. S., *Eng. Fract. Mech.*, **15**-1, 2(1981), 185.
 (5) 久保・ほか4名, 機論, **54**-498, A(1988), 218.
 (6) 林・ほか4名, 材料, **35**-395(1986), 936.
 (7) 鳥居・ほか3名, 機論, A, **55**-515(1989), 1525.
 (8) Irwin, G. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **29**-4(1962), 651.
 (9) 浅野・ほか3名, 機論, **51**-465, A(1985), 1515.
 (10) 例えば, 岡村, 線形破壊力学入門, (1976), 191, 培風館.
 (11) Kassir, M. K. and Sih, G. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **33**-3(1966), 601.
 (12) Green, A. E. and Sneddon, I. N., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **46**(1950), 159.
 (13) 鳥居・ほか2名, 機論, **56**-524, A(1990), 745.