不静定弾塑性破壊力学の構造健全性評価への適用*

(軸方向き裂付内圧円筒および回転円筒への適用)

松原 雅昭^{*1}, 曾根田 直樹^{*1}

Application of Statically Indeterminate Fracture Mechanics to Evaluating Structural Integrity (Application to Axially Cracked Internally Pressurized and Spinning Cylinders)

Masaaki MATSUBARA and Naoki SONEDA

This paper describes an application of statically indeterminate fracture mechanics, SIFM, to evaluating the structural integrity of axially cracked internally pressurized and spinning cylinders. The following points were made clear: (1) The J -integral obtained from SIFM agrees well with the conventional fully plastic solution given by Kumar et al. in the case of the internally pressurized cylinder; (2) SIFM can give the J -integral value equivalent to the J -integral keeping path independence in the case of the spinning cylinder; (3) Based on these results, a quantitative study was carried out for the United Kingdom Atomic Energy Authority, UKAEA, test: here, a structural integrity test was performed under pressurized thermal shock (PTS) by using the spinning cylinder.

Key Words: Strength, Fracture, Fracture Mechanics, Indeterminate structure, J -integral, pressurized Cylinder, Spinning Cylinder

1. 緒 言

著者のひとり是不静定破壊力学手法を弾塑性破壊問題にも適用可能となるように拡張し、任意の軸力と曲げを受ける単数および複数の片側き裂部材の J 積分の評価が可能となるようにした⁽¹⁾⁽²⁾。また、同手法と全く等価なコンプリメンタリエネルギー概念を用いた手法を軸方向き裂付回転円筒に適用し、妥当な解析結果が得られることを明らかにした⁽³⁾。本報では、軸方向き裂付内圧円筒および上記回転円筒に不静定破壊力学手法を適用し、得られた J 積分の妥当性を従来の全面塑性解および有限要素法(FEM)により得た $\bar{J}$ 積分との比較によって検討する。また、英国原子力公社(United Kingdom Atomic Energy Authority, UKAEA)で実施中の加圧熱衝撃(Pressurized Thermal Shock, PTS)模擬試験⁽⁴⁾について、上記の結果を踏まえて若干の検討を行う。

2. 不静定弾塑性破壊力学手法の適用

2.1 解析モデル 解析の対象となったモデルを図1および図2に示す。図1は内圧を受ける薄肉円筒

の内表面上に軸方向の二次元き裂が存在するというものである。図2は回転する薄肉円筒の内表面上に同様のき裂が存在するというものである。これらのモデルは上記 UKAEA で実施中の PTS 模擬試験を考慮して設定したものである。

2.2 不静定問題の取扱い 不静定破壊力学の取

図1 内表面軸方向き裂付内圧円筒のモデル

* 原稿受付 平成2年7月12日。

^{*1} 正員、(財)電力中央研究所 (〒201 狛江市岩戸北2-11-1)。

扱いとしては、2・1節で述べたそれぞれのモデルに対して図3および図4に示すように、線形破壊力学における場合と全く同様にき裂断面においてこのモデルをスリットの入った有限のコンプライアンスを有する円筒体と長さ0のき裂材に分離する。き裂断面に作用する軸力 P 、曲げモーメント M とすると、この作用断面にスリットを入れた場合の構造物の軸方向伸び u およびたわみ角 θ はき裂の存在による伸び Δu およびたわみ角 $\Delta \theta$ にそれぞれ等しくなる。

したがって、

$$\left. \begin{array}{l} u = \Delta u \\ \theta = \Delta \theta \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

そこで、スリット付構造物および長さ0のき裂材についてこれらの変形を P および M の関数として求めれば、逆に式(1)より P 、 M を求めることができ、この P 、 M を用いて J 積分を評価することができる。

スリット付構造物に与えられた軸力および曲げモーメントによる変形を求めると、

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ \theta \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} C_P & C_{PM} \\ C_{PM} & C_M \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} P_0 - P \\ M_0 - M \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 C_P ：軸力による伸びのコンプライアンス、 C_M ：曲げモーメントによるたわみ角のコンプライアンス、 C_{PM} ：軸力によるたわみ角および曲げモーメントによる伸びのコンプライアンス、 P_0 、 M_0 ：き裂が存在しない場合の構造物中の内力の軸力および曲げモーメント成分である。

C_P 、 C_{PM} および C_M は本論文で取扱うような $\lambda^2 \ll 1$ (λ については式(4)参照) の場合には次式で与えられる⁽⁵⁾。

$$\left. \begin{array}{l} C_P = \frac{3\pi R_m^3}{E'I} \left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2\right) \\ C_{PM} = -\frac{2\pi R_m^2}{E'I} \left(1 - \frac{4}{15}\lambda^2\right) \\ C_M = \frac{2\pi R_m}{E'I} \left(1 - \frac{4}{15}\lambda^2\right) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

上式中の E' 、 I および λ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} E' = \frac{E}{1-\nu^2} \\ I = \frac{W^3}{12} \\ \lambda = \frac{W}{2R_m} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 E ：ヤング率、 ν ：ポアソン比および I ：断面二次モーメントである。

また、 P_0 および M_0 はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} P_0 = \int_0^w \sigma(z) dz \\ M_0 = \int_0^w \sigma(z) \left(z - \frac{W}{2}\right) dz \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで z ：内表面からの距離および $\sigma(z)$ ：周方向の応力であり、それぞれ材料力学に基づき容易に与えら

図 2 内表面軸方向き裂付回転円筒のモデル

図 3 内圧円筒の不静定破壊力学モデル

図 4 回転円筒の不静定破壊力学モデル

れ、内圧円筒では

$$\sigma(z) = \left(R_m - \frac{W}{2} \right) \frac{p}{W} = \frac{R_i p}{W}$$

回転円筒では

$$\sigma(z) = \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)} \left\{ (R_i^2 + R_o^2) + \frac{R_i^2 R_o^2}{R^2} - 3R^2 \right\} + \rho \omega^2 R^2 \quad (6)$$

で与えている。ここで ρ : 密度, ω : 角速度である。そして

$$R = R_i + z \quad (7)$$

である。したがって、内圧円筒では $M_0 = 0$ である。回転によって発生する応力を図5に示すような応力成分に分類する。すなわち、膜応力、曲げ応力および壁厚方向に自己平衡を保つ非線形分布応力成分である。線形破壊力学における不静定破壊力学の取扱いの類推から⁽⁵⁾、自己平衡非線形分布応力成分は後述する J 積分の弾性成分にのみ寄与するものと仮定し、不静定破壊力学の取扱いでは考慮しないこととする。なお、図5において縦軸は式(6)で与えられる $\sigma(z)$ を $\rho \omega^2$ で除したものである。

それぞれき裂断面で生ずる変形 Δu および $\Delta \theta$ は

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta C_P & \Delta C_{PM} \\ \Delta C_{PM} & \Delta C_M \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} \quad (8)$$

となる。ここで、 $\Delta C_P, \Delta C_{PM}, \Delta C_M$ はき裂の存在によるコンプライアンスの増加分であり、通常弾性成分 $\Delta C_P^e, \Delta C_{PM}^e, \Delta C_M^e$ と塑性成分 $\Delta C_P^p, \Delta C_{PM}^p, \Delta C_M^p$ の和として与えられる。すなわち、

図5 回転円筒に生じる応力成分

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_P = \Delta C_P^e + \Delta C_P^p \\ \Delta C_{PM} = \Delta C_{PM}^e + \Delta C_{PM}^p \\ \Delta C_M = \Delta C_M^e + \Delta C_M^p \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式(9)において、 $\Delta C_P^e, \Delta C_{PM}^e, \Delta C_M^e$ は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_P^e = \frac{2}{E'} \int_0^a \left(\frac{K_P}{P} \right)^2 da \\ \Delta C_{PM}^e = \frac{2}{E'} \int_0^a \left(\frac{K_P}{P} \right) \left(\frac{K_M}{M} \right) da \\ \Delta C_M^e = \frac{2}{E'} \int_0^a \left(\frac{K_M}{M} \right)^2 da \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ここで K_P, K_M はそれぞれ軸力、曲げモーメントを受ける場合の片側き裂材の応力拡大係数である。

$\Delta C_P^p, \Delta C_{PM}^p, \Delta C_M^p$ は Parks ら⁽⁶⁾によるコンプレキソ・エネルギー概念により次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_P^p = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 W^2 \left\{ \frac{AP^2 + \frac{2B}{W}PM + \frac{C}{W^2}M^2}{P_c^2} \right\}^{(n-1)/2} \frac{A}{P_c^2} \\ \Delta C_{PM}^p = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 W \left\{ \frac{AP^2 + \frac{2B}{W}PM + \frac{C}{W^2}M^2}{P_c^2} \right\}^{(n-1)/2} \frac{B}{P_c^2} \\ \Delta C_M^p = \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 \left\{ \frac{AP^2 + \frac{2B}{W}PM + \frac{C}{W^2}M^2}{P_c^2} \right\}^{(n-1)/2} \frac{C}{P_c^2} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 $\varepsilon_0, \sigma_0, \alpha, n$ は Ramberg-Osgood 則における参照ひずみ、参照応力、係数、べき数である。すなわち、

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (12)$$

ここで、 ε は真ひずみ、 σ は真応力である。式(11)における A, B, C はき裂長さ a 、上記のべき数 n の関数であり、例えば全面塑性解⁽⁷⁾を用いて評価することができ、それらは次式で与えられる。

$$A = \left\{ \frac{h_P^u \xi (1-\xi)}{(1.445\eta)^n} \right\}^{2/(n+1)}, B = \frac{h_P^u A^{-2/(n+1)} (1-\xi)}{(1.445\eta)^n}, C = \left\{ \frac{h_M^u}{0.364^n (1-\xi)^{n-1}} \right\}^{2/(n+1)} \quad (13)$$

ここで h_P^u は軸力を受ける片側き裂材の伸びに対する全面塑性解、 h_P^u はたわみ角に対する全面塑性解、 h_M^u は曲げを受ける片側き裂材のたわみ角に対する全面塑性解である。 ξ, η はそれぞれ次式のごとくなる。

$$\xi = \frac{a}{W}, \eta = \left\{ 1 + \left(\frac{\xi}{1-\xi} \right)^2 \right\}^{1/2} - \frac{1}{1-\xi} \quad \dots\dots\dots (14)$$

また, P_c は次式のごとくなる。

$$P_c = \sigma_o(W-a) \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(2), (8)を適合条件式(1)に代入すると次式で与えられる P および M を求める方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} C_P + \Delta C_P^e + \Delta C_P^p & C_{PM} + \Delta C_{PM}^e + \Delta C_{PM}^p \\ C_{PM} + \Delta C_{PM}^e + \Delta C_{PM}^p & C_M + \Delta C_M^e + \Delta C_M^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_P & C_{PM} \\ C_{PM} & C_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

この非線形連立方程式を解くことによって, P および M が求まる⁽¹⁾。

2.3 J 積分の評価 本論文において取扱っている近似的薄肉円筒構造ではこのようにして得られた P, M が作用する場合の片側き裂材に対する J 積分評価式⁽⁸⁾によって J 積分値が求められる。さらに, 回転円筒については前述のごとく自己平衡非線形分布応力成分の J 積分への寄与をその弾性成分についてのみ考慮することとする。この場合, J 積分は次式のごとくなる。

$$J = J_e + J_p, J_e = \frac{1}{E'}(K_P + K_M + K_n)^2$$

$$J_p = \frac{1}{2} \alpha \varepsilon_o \sigma_o W^2 \left(\frac{AP^2 + \frac{2B}{W}PM + \frac{C}{W^2}M^2}{P_c^2} \right)^{(n-1)/2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{P_c^2} \left(\frac{\partial A}{\partial a} P^2 + 2 \frac{\partial B}{\partial a} \cdot \frac{PM}{W} + \frac{\partial C}{\partial a} \cdot \frac{M^2}{W^2} \right) - \frac{2}{P_c^3} \cdot \frac{\partial P_c}{\partial a} \cdot \left(AP^2 - \frac{2B}{W}PM + \frac{C}{W^2}M^2 \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで, J_e と J_p はそれぞれ J 積分の弾性および塑性成分である。 K_n は回転円筒における自己平衡非線形分布応力 σ_n に対する応力拡大係数であり, 例えば次式で与えられる⁽⁵⁾。

$$K_n = \frac{2}{\sqrt{\pi a(1-\xi)^{3/2}}} \int_0^a \frac{\sigma_n(c)G}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}} dc \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで, G は図6に示すようにき裂表面上に集中力が作用する場合の応力拡大係数に対する有限幅補正係数である⁽⁹⁾。

3. 解析結果および考察

3.1 内圧円筒 図7は表1に示す解析条件で本手法で得た解析結果と Kumar らによって全面塑性解⁽¹⁰⁾として与えられている内表面に軸方向二次元き裂を有する内圧薄肉円筒に対する J 積分を比較したものである。図から明らかなように両者の結果は比較的良好に一致していることから, 本手法によって得られるこの問題に対する J 積分の値の妥当性が確認された。Kumar らによって与えられる本問題に対する解は Ramberg-Osgood 則のべき数 n が1から10まで, R_i/W が5から20までに限られる。しかし, 本手法で

図6 き裂面上に集中力が作用する片側き裂部材

表1 内圧円筒に対する解析条件

Inner radius (m)	2.0
Wall thickness (m)	0.2
Internal pressure (MPa)	15
Young's modulus (GPa)	207
Poisson's ratio	0.3
Constants of Ramberg-Osgood's law	
Coefficient	1.12
Power's number	9.71
Reference stress (MPa)	414
Reference strain	0.002

図7 全面塑性解と不静定破壊力学による内圧円筒の J 積分の比較

は n が 1 から 20 まで、 $\lambda^2 \ll 1$ を満足すれば R_i/W が 5 以下でも解が得られ、 R_i/W について上限がない。したがって、本手法の適用によって内圧を受ける軸方向二次元き裂を有する薄肉円筒に対する J 積分についてはより広範囲の条件で解を得ることができるようになった。

図 8 は表 2 の解析条件を用いて J 積分における円筒殻コンプライアンスの影響を調べた結果である。式 (3) から明らかなように円筒殻のコンプライアンスは円筒径に比例するが、図から円筒殻コンプライアンスの増加、すなわち円筒径(図中では内半径寸法を表示)の増加に伴って同一き裂深さに対する J 積分の値が大きくなることわかる。このように構造物中のき裂に対する J 積分におけるコンプライアンスの影響も本手法を用いれば、極めて容易に明らかにすることができる。

3・2 回転円筒 いわゆる Rice によって提案された J 積分⁽¹¹⁾ は回転円筒に適用する場合には物体力の影響により経路独立性が保てなくなるために有効なパラメータではないとされてきた。そして物体力の影響を考慮して経路独立性を保ち、この種の問題に有効

な破壊力学パラメータが提案されており、そのひとつとして坂田ら⁽¹²⁾⁽¹³⁾によって提案された $\hat{J}$ 積分が挙げられる。そこで、本手法によって求められた J 積分の値が妥当なものであるかどうかの検証を $\hat{J}$ 積分との比較および両者の等価性の検討により行う。 $\hat{J}$ 積分の評価には二次元弾塑性破壊力学解析コード GTDF を使用した⁽¹⁴⁾。降伏条件としては Mises の降伏条件を用い、平面ひずみ条件を仮定し、応力-ひずみ関係は 2 直線で近似した。弾塑性計算ではひずみ増分理論に基づくこととした。使用した要素は 8 節点アイソパラメトリック要素であり、要素数は 840、節点数は 2 645 とした。解析条件は表 2 のそれらを用いた。ただし、降伏応力は 544 MPa、塑性加工硬化係数は 9 080 MPa とした。

図 9 は表 2 の解析条件を用いて本手法によって得た J 積分と FEM によって得た $\hat{J}$ 積分を比較したものである。図から両者はよく一致しており、2・2 節で述べた方法によって不静定破壊力学手法を用いれば、回転円筒についても経路独立積分と等価な J 積分値を評価することができる。一般に、 $\hat{J}$ 積分のような特殊な経路独立積分は FEM のような数値解析のみによって得られるものが多く、構造健全性評価に使い難いものとなっている。不静定破壊力学によって J 積分が従来使用できなかった問題にも適用可能となったことが明らかとなった。

次に、UKAEA で実施中の回転円筒による PTS 模擬試験について検討する。同試験においては回転による遠心力によって加圧水型原子炉(Pressurized Water Reactor, PWR)の内圧による膜応力を模擬している。表 1 および表 2 で与えている内圧 15 MPa は PWR の運転時の圧力に相当する。図 10 は内圧円筒と回転円筒の J 積分を比較したものである。回転数 2 200

表 2 回転円筒に対する解析条件

Inner radius (m)	0.5; 2.0**
Wall thickness (m)	0.2
Internal pressure (MPa)	15
Young's modulus (GPa)	193
Poisson's ratio	0.275
Constants of Ramberg-Osgood's law	
Coefficient	0.0208
Power's number	11.5
Reference stress (MPa)	386
Reference strain	0.002
Density (kg/m ³)	7757

*: Spinning cylinder, **: Pressurized cylinder

図 8 内圧円筒の J 積分におけるコンプライアンスの影響

図 9 不静定弾塑性破壊力学によって求めた J 積分と $\hat{J}$ 積分の比較

図 10 内圧円筒と回転円筒の J 積分の比較 図 12 回転円筒を用いた内圧円筒の J 積分の模擬例 図 11 回転円筒の J 積分におけるコンプライアンスの影響

r. p. m. で式 (6) の第 1 式で与えられる $\sigma(z)$ を用いて得られる式 (5) の P_0 は内圧 15 MPa の場合の式 (6) の第 2 式で与えられる $\sigma(z)$ を用いて得られる P_0 にほぼ等しくなる。模擬精度では、 $a/W < 0.25$ までは内圧円筒の J 積分とよく一致するが、それより深いき裂では回転円筒の J 積分値は低くなってしまいうので、回転数を増加させる必要がある。図 11 は内圧円筒の場合と同様にコンプライアンスの影響を調べたものである。内圧円筒よりも回転円筒のほうがコンプライアンスの影響を受けやすいことがわかる。これはき裂がない場合の応力を考えると、回転円筒ではき裂に対して正の曲げ応力があるのに対して、内圧円筒ではこれがなく、したがって回転円筒のほうが円筒殻コンプライアンスの中で最大となる C_M の影響を強く受けることが原因と考えられる。図 10 および 11 から回転円筒の回転数や円筒径の変更によって内圧円筒の J 積分を定性的には模擬可能なことがわかる。

しかし、 J 積分の模擬精度の向上策としては図 12 に示すき裂深さに応じて回転数を変化させる方法が、UKAEA の試験装置では自動き裂深さ測定が可能なことから⁽⁴⁾、最良の試験方法であると言える。

このように、不静定破壊力学手法によって延性破壊評価のために必要な J 積分値が簡単かつ高精度に求めることができるばかりでなく、模擬試験の検討も容易に行えることがわかる。

4. 結 言

本論文では、既報⁽¹⁾において提案した不静定弾塑性破壊力学手法を軸方向二次元き裂を有する内圧円筒および回転円筒に適用して以下の知見を得た。

(1) 内圧円筒に適用した結果では、得られた J 積分の値が GE-EPRI 法の全面塑性解として与えられる J 積分の値とよく一致することが確認できた。また、本手法の適用により従来よりも広範囲の条件に対して J 積分の評価が可能となった。

(2) 回転円筒に適用した結果では、得られた J 積分の値がこの種の問題において有効とされる経路独立積分 $\tilde{J}$ 積分とほぼ等価であることが確認され、本手法の有効性が示された。

(3) 内圧円筒および回転円筒への不静定破壊力学の適用結果を基にして UKAEA で実施中の回転円筒試験体を用いた PTS 模擬試験に関して定量的検討を行った。

不静定破壊力学の回転円筒問題への適用に関してその理論的妥当性を検証していただいたことに対して東京大学工学部舶用機械工学科、岡村弘之教授および同学大学院生、高橋淳君および二次元弾塑性破壊力学解析コード GTDF の使用を快く許可していただいたことに対して同学工学部原子力工学科、矢川元基教授および吉村忍助教授に深甚なる謝意を表す次第である。

文 献

- (1) 松原、機論、56-525, A (1990), 1396.
- (2) 松原、機論、57-534, A (1991), 281.

- (3) 高橋・松原・岡村, 機論, 57-533, A (1991), 11.
 - (4) Lacey, D. J. and Leckenby, R. E., *Trans. 10th SM iRT*, Vol. F(1989), 1.
 - (5) 松原・岡村, 材料, 37-420, (1988), 1029.
 - (6) Parks, D. M., Rodin, G. J. and Lockett, R. R., unpublished manuscript.
 - (7) Shih, C. F. and Needleman, A., *Trans. ASME., Appl. Mech.*, 51 (1984), 48.
 - (8) 三好・吉田・白鳥, 第2回破壊力学シンポジウム講演論文集, (1983-6), 284.
 - (9) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., *THE STRESS ANALYSIS OF CRACKS HANDBOOK*, (1985), 2, 27, Del Research Corporation.
 - (10) Kumar, V., German, M. D. and Shih, C. F., *EPRI NP-3607*, (1984), 2-1.
 - (11) Rice, J. R., *Trans. ASME, Appl. Mech.*, 35 (1968), 379.
 - (12) 坂田・青木・石井, 機論, 44-383, A (1977), 2238.
 - (13) 坂田ほか4名, 機論, 45-391, A (1979), 236.
 - (14) 吉村・矢川・Atluri, S. N., 機論, 54-498, A (1988), 212.
-