ダイナミックメッシュによる三次元弾性接触問題の境界要素解析*

梶 井 邦 彦^{*1}Boundary Element Analysis of Three-Dimensional Contact Problems
by the Method Called Dynamic Mesh

Kunihiko KAKOI

Three-dimensional elastic contact problems are analyzed by the boundary element method. The boundary line of the contact area is calculated accurately by the method called "dynamic mesh". For such calculation, linear triangular elements are used. These elements are integrated analytically to estimate the singular integrals accurately. Inner stresses of contact bodies are calculated by numerical differentiation of displacements. The conclusion of this report is compared with the results of other methods which have already been reported in public. The effectiveness of "dynamic mesh" is certified by practical examples.

Key Words: Contact Problem, Boundary Element Method, Dynamic Mesh, Linear Triangular Element, Analytical Integral

1. ま え が き

三次元の接触問題は、境界非線形問題であり、有限要素法または境界要素法で解析する場合、接触面の形を求めるためにこれらの繰返し計算を必要とする。このための計算量は膨大なものである。接触面が平坦で Hertz の方法を適用することができる三次元の接触問題について、接触面のみを要素分割し、繰返しのたびに分割形状を変形する一般的な数値計算法については、Paul, Hashemi⁽¹⁾、小野⁽²⁾の報告があり、著者も前報⁽³⁾において報告した。ここでは前報の方法を半無限体近似を適用することができない一般の形状にも適用できるように拡張した。汎用境界要素法を使用し、特異積分を正確に評価するために線形三角形要素を解析的に積分した。繰返しのたびに節点座標を移動して接触面境界で接触圧が正確に零となる点を見出す方法(ダイナミックメッシュと呼ぶ)は前報と同様であり、多変数の非線形連立方程式を Newton 法に類似した方法で解いている。ダイナミックメッシュと呼ぶこの方法では、従来法と比較して粗い要素分割で精度の高

い解答を得ることができる。この方法はなんらかの初期形状を必要とするが、初期形状を得る方法として、前報の方法による計算結果を使うなどいくつかの方法がある。

以下では、次の記号を使用する。

S : 弾性体表面

P_i : 表面力の成分

u_i : 変位の成分

x : 計算点の座標

ξ : 積分点の座標

n_i : 面法線の成分

E : 縦弾性係数

G : 横弾性係数

ν : ポアソン比

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$$

$$R = \sqrt{r^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

δ_{ij} : クロネッカのデルタ

ε_{ij} : ひずみの成分

σ_{ij} : 応力の成分

また原則として添字についての縮約の規則を使用する。添字 a, b, c, d は 1 または 2 を示し、 i, j, k, l, m, n は 1 または 2 または 3 を示す。

* 原稿受付 平成 2 年 6 月 25 日。

^{*1} 正員、(株)テクノダイヤ (〒170 東京都豊島区北大塚 1-22-3)。

2. 基礎方程式系

弾性体内部の変位は次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S u_{ij}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot P_j(\boldsymbol{\xi}) dS - \int_S P_{ij}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot u_j(\boldsymbol{\xi}) dS \quad (1)$$

$$u_{ij}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)GR} \times \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial R}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \xi_j} \right] \quad (2)$$

$$P_{ij}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = S_{ij}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + A_{ij}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad (3)$$

$$S_{ij}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)R^2} \times \frac{\partial R}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3 \frac{\partial R}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \xi_j} \right] \quad (4)$$

$$A_{ij}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_i} n_j - \frac{\partial R}{\partial \xi_j} n_i \right) \quad (5)$$

u_{ij}^* , P_{ij}^* は Kelvin の基本解であり, S_{ij}^* , A_{ij}^* は P_{ij}^* のそれぞれ対称部分と反対称部分である。計算点 $\mathbf{x}$ を弾性体の表面に近付けることによって次の積分方程式が得られる。

$$C_{ij}u_j = \int_S u_{ij}^* P_j dS - \int_S P_{ij}^* u_j dS \quad (6)$$

ここで右辺の積分は Cauchy の主値積分であり, C_{ij} は剛体運動を表すことによって間接的に求められる。表面力の釣合いから次式が成立する。

$$\int_S P_i(\boldsymbol{\xi}) dS = 0 \quad (7)$$

この方程式に見合う未知数として式(1), (6)に次のように誤差ベクトル e_i を導入する。

$$u_i = \int_S u_{ij}^* P_j dS - \int_S P_{ij}^* u_j dS + e_i \quad (1)'$$

$$C_{ij}u_j = \int_S u_{ij}^* P_j dS - \int_S P_{ij}^* u_j dS + e_i \quad (6)'$$

式(6)'と(7)を連立させて積分方程式を解けば、弾性体表面の変位と表面力を求めることができる。力の釣合いは、要素分割の良し悪しに関係なく、厳密に保証される。二つの弾性体が摩擦なしで接触している場合の接触条件は次式で与えられる。

$$[(\boldsymbol{\xi}_I + \mathbf{u}_I) - (\boldsymbol{\xi}_{II} + \mathbf{u}_{II})] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_I = 0, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (9)$$

ここで $\boldsymbol{\xi}_I$ と $\boldsymbol{\xi}_{II}$ は、弾性体 I と II の接触対応点であり, $\mathbf{u}_I$ と $\mathbf{u}_{II}$ はその変位, $\mathbf{P}$ は表面力, $\mathbf{n}$ は共通法線であり, $\mathbf{n}_I$, $\mathbf{n}_2$ は $\mathbf{n}$ の二つの直交成分である。

接触面では変位以外に表面力も未知であるが、これは式(8), (9)を連立させて解くことによって求められる。接触面境界 C では、接触圧が零でなければならない。

$$\mathbf{x} \in C \text{ に対し } \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (10)$$

ここで $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は点 $\mathbf{x}$ での表面力と面法線である。この条件から接触面の境界すなわち接触面の形状を求めることができる。弾性体内部のひずみ ϵ_{ij} は式(1)'を微分して式(11)のように求められ、応力 σ_{ij} はこれから式(12)のように求められる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) \quad (11)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G\epsilon_{ij} \quad (12)$$

3. 離散化

式(6)'を三角形要素によって次のように離散化する。

$$C_{ki}u_i = \sum_{\Delta} u_{k\Delta} + e_k = \sum_{\Delta} \int_{\Delta} (u_{ki}^* P_i - P_{ki}^* u_i) dS + e_k \quad (13)$$

ここで $u_{k\Delta}$ を式(13)のように定義した。変位と表面力を三角形内部で次のように線形補間する。

$$u_i(\boldsymbol{\xi}) = u_i^l a_{il} \xi_l \quad (14)$$

$$P_i(\boldsymbol{\xi}) = P_i^l a_{il} \xi_l \quad (15)$$

ここで u_i^l , P_i^l は三角形の l 番目の頂点での変位と表面力の成分であり, a_{il} は三角形の形によって決まる定数, ξ_1 , ξ_2 は三角形の重心を原点とする座標, ξ_3 は 1 である。三角形の重心を原点とする要素座標系から見た $u_{k\Delta}$ は次のように表される。

$$u_{k\Delta} = P_i^l a_{il} \int_{\Delta} \xi_j u_{ki}^* dS - u_i^l a_{il} \int_{\Delta} \xi_j P_{ki}^* dS = P_i^l a_{il} V_{ki} - u_i^l a_{il} Q_{ki} \quad (16)$$

ここで V_{ki} , Q_{ki} を式(16)のように定義した。計算点 $\mathbf{x}$ から三角形を含む平面に垂ろした足が原点となるよう三角形の要素座標系を平行移動すれば、係数 a_{il} の値が変化するだけで、式(16)はそのまま成立する。また一般に次式が成立するから、式(16)の積分の計算では三角形は Δ_{012} であるとして計算することができる。

$$\int_{\Delta_{123}} = \int_{\Delta_{012}} + \int_{\Delta_{023}} + \int_{\Delta_{031}} \quad (17)$$

4. 積分の計算

V_{jk} , Q_{jk} の計算で必要となる積分は、次のように求められる。

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_c}{R} dS = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \csc \theta \left(Rr - z^2 \log \frac{R+r}{|z|} \right) d\theta \quad (18)$$

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_c \xi_a \xi_b}{R^3} dS = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \csc \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta$$

$$\times \left(Rr - 3z^2 \log \frac{R+r}{|z|} + \frac{2rz^2}{R} \right) d\theta \quad \dots\dots (19)$$

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_c \xi_a}{R^3} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_c \theta \cdot \text{cs}_a \theta \left(R + \frac{z^2}{R} - 2|z| \right) d\theta \quad \dots\dots (20)$$

$$\int_{\Delta} \frac{z \xi_c}{R^3} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_c \theta \cdot z \left(\log \frac{R+r}{|z|} - \frac{r}{R} \right) d\theta \quad \dots\dots (21)$$

$$\int_{\Delta} \frac{1}{R} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (R - |z|) d\theta \quad \dots\dots (22)$$

$$\int_{\Delta} \frac{z}{R^3} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\text{sign}(z) - \frac{z}{R} \right) d\theta \quad \dots\dots (23)$$

$$\int_{\Delta} \frac{z \xi_c \xi_a \xi_b}{R^5} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_c \theta \cdot \text{cs}_a \theta \cdot \text{cs}_b \theta \cdot z \times \left(\log \frac{R+r}{|z|} - \frac{r}{R} - \frac{r^3}{3R^3} \right) d\theta \quad \dots\dots (24)$$

$$\int_{\Delta} \frac{z \xi_c \xi_a}{R^3} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_c \theta \cdot \text{cs}_a \theta \times \left[\frac{2}{3} \text{sign}(z) - \frac{z}{3R} \left(2 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] d\theta \quad \dots\dots (25)$$

$$\int_{\Delta} \frac{z^2 \xi_c}{R^5} dS = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_c \theta \cdot \frac{r^3}{R^3} d\theta \quad \dots\dots (26)$$

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_b}{R^3} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_b \theta \left(\log \frac{R+r}{|z|} - \frac{r}{R} \right) d\theta \quad \dots\dots (27)$$

$$\int_{\Delta} \frac{z^3}{R^5} dS = \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\text{sign}(z) - \frac{z^3}{R^3} \right) d\theta \quad \dots\dots (28)$$

ただし, $\text{cs}_1 \theta = \cos \theta$, $\text{cs}_2 \theta = \sin \theta$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ であり, r , θ , θ_1 , θ_2 は図1のとおりである。

$z \neq 0$ の時, 式(18)~(28)の右辺は解析的に積分することができる。 $z=0$ での主値積分は次のように求められる。

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_c}{r} dS = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_c \theta \cdot r^2 d\theta \quad \dots\dots (29)$$

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_c \xi_a \xi_b}{r^3} dS = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_c \theta \cdot \text{cs}_a \theta \cdot \text{cs}_b \theta \cdot r^2 d\theta \quad \dots\dots (30)$$

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_c \xi_a}{r^3} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_c \theta \cdot \text{cs}_a \theta \cdot r d\theta \quad \dots\dots (31)$$

$$\int_{\Delta} \frac{1}{r} dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta \quad \dots\dots (32)$$

図1 三角形積分領域

図2 扇形領域 F

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_b}{r^3} dS \sim \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_b \theta \cdot \log r d\theta \quad \dots\dots (33)$$

これ以外の積分の値は零である。式(29)~(33)の右辺は解析的に積分することができる。式(33)が等式でないことの意味は次章で述べる。

5. 特異積分の評価

式(33)に表れる主値積分は,

$$\int_{\Delta} \frac{\xi_b}{r^3} dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{cs}_b \theta \cdot \log \frac{r}{\epsilon} d\theta \quad \dots\dots (34)$$

であるから $\epsilon \rightarrow 0$ の時, 対数的に発散する。しかしこの発散は見かけのものであり, 次のようにして避けることができる。まずこの積分が反対称項 A_{ik}^* に $\xi_3 (= 1)$ を掛けた変位の定数項に対応するものであることに注意する。 A_{ik}^* を次のように表現する。

$$A_{ik}^* = f \cdot \left[\frac{\partial R}{\partial \xi_i} n_k - \frac{\partial R}{\partial \xi_k} n_i \right] \quad \dots\dots (35)$$

$$\text{ただし } f = (1-2\nu)/8\pi(1-\nu)R^2$$

計算点 x が $(0, 0, 0)$ であり, 面法線ベクトルが $(0, 0, 1)$ である時, A_{ik}^* は次のように表される。

$$A_{31}^* = -f \xi_1 / r \quad \dots\dots (36)$$

$$A_{32}^* = -f \xi_2 / r \quad \dots\dots (37)$$

$$A_{33}^* = f \xi_1 / r \quad \dots\dots (38)$$

$$A_{11}^* = A_{22}^* = A_{12}^* = A_{21}^* = A_{33}^* = 0 \quad \dots\dots (39)$$

図2の半径 a の扇形下を積分領域として式(36)~(39)を積分すると,

$$\int_F A_{31}^* dS = - \int_F A_{33}^* dS = -2\tilde{f} \sin \frac{\theta}{2} \quad \dots\dots (40)$$

ただし

$$\tilde{f} = \int_0^a f r dr$$

となり, これ以外の成分の積分は零である。この扇形が図3のように空間に配置された i 番めの扇形であると考え, 原点 O' での変位を $\mathbf{g}$ とし, ベクトル $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ を図3のように定めるとき, この変位の $\mathbf{m}$ 成分, $\mathbf{n}$ 成分はそれぞれ, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{m}$, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ で与えられるから, 定数ベクトル $\mathbf{g}$ による反対称項への寄与

$$\int_{F_i} A_{ik}^* g_k dS$$

を C_{ii} と表すとき, ベクトル $\mathbf{C}_i$ は次式で与えられる。

図3 計算点を囲む扇形の一つ F_i

$$C_i = 2\tilde{f} \sin \frac{\theta}{2} [(g \cdot m) \cdot n - (g \cdot n) \cdot m]$$

$$= 2\tilde{f} \sin \frac{\theta}{2} g \times n \times m = \frac{\tilde{f}}{a} g \times l_i \quad \dots\dots\dots (41)$$

ゆえに計算点 O' を囲むすべての扇形について加え合わせると、計算点が角点である場合でも次式が成立する。

$$\sum_i C_i = \frac{\tilde{f}}{a} g \times \sum_i l_i = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

すなわち式(33)の左辺の積分では、計算点まわりの半径 $a (=1)$ の球と交差する部分の積分を無視することができて、式(33)の右辺のように表すことができる。これが式(33)が等式でないことの原因である。ここで述べた特異積分の評価の方法は廣瀬の報告⁽⁵⁾を具体的に表現したことになると思われる。

6. 収束法

収束法すなわち接触面境界の計算法は接触面が三次元の曲面であること、接触面以外の領域も要素分割されていることが異なるだけで、基本的に前報の方法と同じである。接触面の曲面を二つのパラメータ u と v によって $x(u, v)$ と表現し、接触面付近の要素分割を u, v 空間で図4のように表現する。

P_{i1} と P_{iE} は一つの基準線の始点と終点であり、位置を固定する。接触面境界上の点 P_{iN} は P_{iN} での接触圧が零となるように P_{i1} と P_{iE} を結ぶ線上を移動する。基準線上の他の点は点 P_{iN} の移動に従って比例的に移動する。接触面をその境界点 P_{iN} に依存して図4のように要素分割する。すなわち i 番めの基準線に対して始点 P_{i1} と方向ベクトル v_i を固定し、境界点までの距離 l_i が与えられた時、始点と境界点の間の節点の座標を次式で計算する。

$$P_{ij} = P_{i1} + l_i \cdot v_i \cdot r_j \quad \dots\dots\dots (43)$$

($j=1 \sim N, i$ について縮約しない)

ここで比 r_j は次式を満足するように固定する。

$$0 = r_1 < r_2 < \dots < r_N = 1 \quad \dots\dots\dots (44)$$

図4 u, v 空間上の要素分割

境界点 P_{iN} と終点 P_{iE} の間の節点についても終点 P_{iE} を固定して同様に計算する。接触面の形すなわち l_i を求める手順は次のとおりである。

① l_i の初期値を仮定する。

② l_i によって要素分割が決まるから式(6)', (7), (8), (9)を離散化して連立方程式を求め、これを解いて変位 u_i^j , 表面力 P_i^j , 誤差ベクトル e_j を求める。

③ 接触面境界上の接触圧 P_i の法線成分 P_i について判定する。すべての P_i を零とみなすことができるならば繰返し処理を打切る。そうでなければ現在の l_i と P_i から新しい l_i' を仮定して②の処理から繰返す。 l_i' の計算法は次のとおりである。点 $P_{i,j}$ での接触圧の法線成分を $P_{i,j}$ とする時、線形補間によって接触圧が零となる l' を求める。

$$l' = (P_{i,N} r_{N-1} - P_{i,N-1} r_N) l_i / (P_{i,N} - P_{i,N-1}) \quad \dots\dots\dots (45)$$

この l' を l_i' とするとほとんどの場合行きすぎとなるので、減衰係数 η を掛けて次のように l_i' を求める。

$$l_i' = l_i + (l' - l_i) \eta \quad \dots\dots\dots (46)$$

ただし上記処理を二度繰返した後は、過去3回のループでの l_i と $P_{i,N}$ を使って二次補間によって l_i' を求める。

7. 弾性体内部の変位と応力

弾性体内部の変位は式(1)'によって求められる。弾性体内部のひずみはこの変位を計算点付近で二次補間し、数値微分によって求める。二次補間の方式は次のとおりである。計算点を $x_0 = (x_1, x_2, x_3)$ とし、 ε を微小量として、 x_0 に隣る二点を $x_- = (x_1 - \varepsilon, x_2, x_3)$, $x_+ = (x_1 + \varepsilon, x_2, x_3)$ とする。変位 $u_i(x_0)$, $u_i(x_-)$, $u_i(x_+)$ を求め、これを x_1 の二次曲線で補間して、 $\partial u_i / \partial x_1$ を求める。他の成分の計算も同様である。ひずみは式(11)から応力は式(12)から求められる。

8. 計算例

計算例を二つ示す。一つは計算精度を示すものであり、他の一つはダイナミックメッシュの有効性を示すものである。図5～図9と表1に二つの球が接触する場合の計算条件と計算結果を示す。表1は接触円半径、最大接触圧、へこみ量の解析解および前報の方法との精度の比較を示す。図7～図9は変位 W と応力 σ_x , τ_{yz} についての前報の方法との比較を示す。図7～図9は図6の位置で弾性体表面から深さ6mmまでの変位と応力の変化を示したものである。変位は正確であると考えて良いが、応力については汎用境界要素法に個々の弾性体表面付近での誤差が見られる。

表 1 接触面形状, 接触圧, へこみ量の計算精度

ITEM		Analytical	Previous Report	Current Report
Radius of Contact Circle	Value (mm)	3.19125	3.29885	3.2840
	Error (%)	0.	3.37	2.91
Maximum Contact Pressure	Value (kg/mm ²)	46.8634	48.1314	47.5476
	Error (%)	0.	2.66	1.42
Depression	Value (mm)	0.020368	0.020565	0.020188
	Error (%)	0.	0.97	-0.88

図 8 応力 σ_x

図 5 計算条件

図 9 応力 τ_{yz}

図 6 内部変位応力の計算点

図 10 計算条件

図 7 変位 W

図 11 メッシュ図 (接触面)

図 12 メッシュ図 (接触面詳細)

図 10～図 14 はローラの接触問題の計算結果である。図 11, 図 12 はダイナミックメッシュによる収束計算の結果である。図 13, 図 14 は前報のプログラムによる計算結果との比較を示す。接触面形状, 接触圧共, ほとんど重なり合っている。

二つの計算例共, 初期形状として, 前報による計算結果を使用した。収束に必要な繰返し回数はいずれの場合も 4 回であった。前報による計算と比較して 100 倍程度の処理時間を必要とする。

9. む す び

半無限体近似を適用することができない一般的な三次元弾性接触問題に対してダイナミックメッシュと呼ぶ方法の有効性を示した。汎用の境界要素法を使用し, 特異積分を正確に評価するために線形三角形要素を解析的に積分した。ここで述べた方法は情報処理振興事業協会 (略称 IPA) からの委託により昭和 63 年度の特定期間として (株) テクノダイヤが製品化した。情報処理振興事業協会に感謝申し上げる。

図 13 接触面形状

図 14 接触圧

文 献

- (1) Paul, B. and Hashemi, J., *ASME AMD*, 30 (1978), 165.
- (2) 小野, 機論, 51-470, A (1985), 2309.
- (3) 梶井, 機論, 53-492, A (1987), 1631.
- (4) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C. (田中訳), 境界要素解析—理論と応用, (1984), 180, 丸善.
- (5) 廣瀬, 境界要素法論文集, 5 (1988), 69.