高階層極性物質の連続体力学*
(第3報, ひずみおよび変位)志澤 一之*¹, 小林 誠一*², 高橋 邦弘*¹Continuum Mechanics for Higher-Stage Micropolar Materials
(3rd Report, Strain and Displacement)

Kazuyuki SHIZAWA, Seiichi KOBAYASHI and Kunihiro TAKAHASHI

In the previous reports, the authors proposed the concept of a higher-stage micropolar continuum, and then formulated their kinematics and mechanical balance laws. In the present paper, strain tensors characterizing deformation of micropolar materials of stage-2 are newly defined on the basis of the kinematics presented in the 1st report. Some equations are derived, which express relations between material strain tensors and spacial ones, and between the strain rate tensors and the kinematical quantities (e.g., deformation rate tensor, angular velocity vector, etc.) defined in the 1st report. While, new displacement vectors and tensors which are peculiar to micropolar materials of stage-2 are defined, and the relations between strains and displacements are obtained. Furthermore, linearizing the strain-displacement relations, strain tensors defined here are discussed geometrically. The strain tensors are suitable for expressing the constitutive equation of bicoUPLE stress which is the generalized bimoment in the theory of thin walls.

Key Words: Continuum Mechanics, Finite Deformation Theory, Elasticity, Higher Stage, Polar Material, Microstructure, Strain Tensor, Displacement Vector, Strain Rate, Deformation Rate

1. 緒 言

従来の極性体理論^{(1)~(3)(9)(12)}は, 古典連続体力学において一点と考えられていたものに拡がりを持たせ, 物質点に並進のみならず回転の自由度を与えることにより(図1), 内部構造をもつ物質の力学的性質を表現しようとするものである。母材の中で微粒子が一樣に分散する固体あるいは流体は, このような理論でモデル化できる。ところが, 微粒子が母材中で部分的に凝集して集落を形成するような材料の力学的挙動は, 上述の理論では十分に説明できない。

そこで著者の一人は前報⁽¹⁴⁾で, Eringenの極性体理論⁽²⁾の概念を拡張し, 内部構造の中にさらに内部構造が次々に存在するという高階層極性物質の概念(図2)を提唱した。この概念を用いて, 階層零の体積要素 dv を微粒子の集落に, また階層1の体積要素 dv' を微粒子に, さらに微視的体積要素 dv'' を物質点に対応させれば微粒子が凝集する物質を階層2の極性体としてモデル化できる(図3)。この概念に基づく連続体力学を構築するために, 著者らはこれまでに第1報で運

動学⁽¹⁵⁾を, また第2報⁽¹¹⁾で力学的釣合い方程式を定式化し, その基礎を築いた。

次に高階層極性の変形を論じるにあたり, まず従来の高次変形理論と本理論とを比較し, その相違を明ら

図1 従来の極性体の概念

図2 高階層極性体の概念

図3 微粒子の集落

* 原稿受付 平成2年5月25日。

*¹ 正員, 慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。*² 准員, 慶應義塾大学大学院。

かにしておく。変形の自由度が高い物質を扱う従来の理論には、古典連続体力学における1次の変形こう配 $\partial x^i / \partial X^I$ [図4(a)] を拡張し、1次から n 次の変形こう配 $\partial^n x^i / \partial X^{I_1} \partial X^{I_2} \dots \partial X^{I_n}$ までを考える n 次物質理論⁽¹⁰⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾ [図4(b)]。さらに変位場を任意階数の変位テンソル場 $x^{i_1 i_2 \dots i_m}$ に拡張し、一般化された高次の変形こう配 $\partial^n x^{i_1 i_2 \dots i_m} / \partial X^{I_1} \partial X^{I_2} \dots \partial X^{I_n}$ までを考えるマルチポーラ理論⁽⁷⁾⁽⁸⁾ [図4(c)] などがある。ただし大文字は変形前の量、小文字は変形後の量を表す。これらは、物質点に高階のテンソルを付随させることにより、物質の非局所性を表現しようとするものである。また、 n 次物質理論を極性体に応用したものとしては、階層1における高次の変形こう配 $\partial^n \xi^i / \partial \Xi^{I_1} \partial \Xi^{I_2} \dots \partial \Xi^{I_n}$ までを考えることによって体積要素 dv に対する変形の自由度を高めた高次マイクロモルフィック理論⁽⁶⁾ [図4(d)] がある。これらはいずれも、単一階層の変形を対象とし、物質点に多数の情報をもたせることによって物質の変形の自由度を高めようとする理論である。

これに対して本理論は、単一階層ではなく多重階層にまたがる変形こう配 $\partial^n \xi^{(n)i} / \partial \Xi^{(1)I_1} \partial \Xi^{(2)I_2} \dots \partial \Xi^{(n)I_n}$ を考えるところに特徴がある [図5(a)]。ただし、 $\Xi^{(k)I}$ は第 k 要素 dV_k と第 $(k-1)$ 要素 dV_{k-1} の重心を結ぶベクトルである ($1 \leq k \leq n$)。ここでは扱わないが、階層零における高次の変形こう配 $\partial^n x^i / \partial X^{I_1} \partial X^{I_2} \dots \partial X^{I_n}$ ならびに第 k 階層に限った高次の変形こう配 $\partial^n \xi^{(k)i} / \partial \Xi^{(k)I_1} \partial \Xi^{(k)I_2} \dots \partial \Xi^{(k)I_n}$ をも導入できるように

図4 従来の高次変形理論

理論を修正すれば、本論理に n 次物質理論ならびに高次マイクロモルフィック理論を統合することもできる。上述の概念を階層2の場合 ($1 \leq n \leq 2$, $\xi^{(1)i} = \xi^i$, $\xi^{(2)i} = \lambda^i$, $\Xi^{(1)I_1} = \Xi^I$, $\Xi^{(2)I_2} = \Lambda^I$) に適用し、 $\partial \xi^i / \partial \Xi^I$ のみならず2階層にまたがる変形こう配 $\eta^{i_{II}} \equiv \partial^2 \lambda^i / \partial \Xi^I \partial \Lambda^I$ をも考慮すれば、階層2の体積要素 dv' のねじれ回転変形⁽¹⁵⁾ [図5(b)] およびこれに伴って生ずる階層2の物質に特有な双偶応力⁽¹¹⁾などを表現することができる。ここで双偶応力とは、微視的点到作用する力の多重モーメントアーム (ξ^i と λ^i) に関する高次モーメントの平均量であり、薄肉構造理論におけるバイモーメント⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾を一般化した量であるとなせる。

以上から明らかなように、従来の高次変形理論において定義されるひずみ、ならびに単一階層内の高次変形によって生ずる2次の偶応力では、ここで扱おうとする高階層極性物質が有する多重内部構造に起因する独特の変形機構ならびに一般化されたバイモーメント (双偶応力) を表現することはできない。

そこで本報では、第1報で示した運動学を基礎として、変形前後の微小線素の二乗の差をとることにより、階層2の極性物質を特徴づける独特のひずみテンソルを新たに定義する。また、物質表示によるひずみと空間表示によるひずみの関係式ならびにひずみ速度と第1報ですでに定義されている運動学的諸量との関係式を導出する。さらに、階層2に特有な新たな変位ベク

図5 高階層極性体理論

トルおよび変位テンソルを定義し、ひずみ-変位関係式を与えることにより、ここで定義するひずみの幾何学的意味について考察する。

2. 運動学のまとめ

本報および次報では、第1報で定式化した運動学の結果を引用するため、本章でそれらをまとめておく。

2・1 運動 ある基準時刻 $t=\tau$ で変形前の状態にあった階層2の物質が変形し、任意の時刻 $t=t$ で図6に示すような状態になるものとする。ここで要素 dV , dV' および dV'' をそれぞれ基準巨視的体積要素、第1巨視的体素要素および微視的体積要素とよぶ。また検査体積 V および v 内にそれぞれ基底ベクトル G_i および g_i をもつ一般曲線座標系 O および o を設定し、 O 系で表した要素 dV および dV' の重心をそれぞれ X^i および X'^i , ならびに物質点を X''^i と記す。以後、変形前の諸量を太文字で、またその指標を太文字のラテン添字で表し、変形後の諸量を小文字で、またその指標を小文字のラテン添字で表す。加えて、点 X''^i および X''^i に関する量にはそれぞれすべて'および''をつけて表示する。なお特に断りのない限り、太文字・小文字を問わずすべてのダミー指標に対して総和の規約を適用する。

ベクトル Ξ^i , Λ^i , ξ^i および λ^i を図6のように選べば、物質点 X''^i と空間点 x''^i に対する位置ベクトルの成分 R''^i と r''^i はそれぞれ以下のように表される。

$$R''^i = R^i + \Xi^i + \Lambda^i \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$r''^i = r^i + \xi^i + \lambda^i \quad \dots\dots\dots (2)$$

いま ξ^i を Ξ^i の関数、また λ^i を Λ^i と Ξ^i の関数としてマクローリン展開し、 $|\Lambda^i|$ および $|\Xi^i|$ が小さいことを考慮してこれらの2次以上を無視すれば、式(2)は

$$\begin{aligned} r''^i &= r^i + \chi^i{}_j \Xi^j + x'^i{}_j \Lambda^j \\ &= r^i + \chi^i{}_j \Xi^j + (x'^i{}_j + \eta^i{}_{jl} \Xi^l) \Lambda^j \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

となる。ただし、

図6 階層2の極性体の変形

$$\left. \begin{aligned} x'^i &\equiv \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \Xi^j} \right)_{\Xi^k=0} \\ x'^i{}_j &\equiv \left(\frac{\partial \lambda^i}{\partial \Lambda^j} \right)_{\Lambda^k=0} \\ x'^i &\equiv (x'^i{}_j)_{\Xi^k=0} \\ \eta^i{}_{jl} &\equiv \left(\frac{\partial^2 \lambda^i}{\partial \Xi^j \partial \Lambda^l} \right)_{\Lambda^k=\Xi^k=0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

である。ここで $x'^i{}_j$ は要素 dV の回転を表す直交テンソル、 $x'^i{}_j$ は要素 dV とその重心を共有する要素 dV' の回転を表す直交テンソル、また $\eta^i{}_{jl}$ は要素 dV' が要素 dV の重心を離れるに従って、その回転がいかに変化するかを表すねじれ回転テンソルである。これらの性質から、 $x'^i{}_j$ と $\eta^i{}_{jl}$ は次の関係を満足する。

$$x'^i{}_j \eta^j{}_{kl} + \eta^i{}_{jl} x'^j{}_k = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

一方、点 x'^i と点 x^i はそれぞれ要素 dv' と要素 dv の重心であるから、

$$\int_{dv} \int_{dv'} \rho'' \lambda^i dv'' = \int_{dv} \rho' \xi^i dv' = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

が成立する。ただし、各要素における平均密度の定義は以下のとおりである。

$$\int_{dv} \int_{dv'} \rho'' dv'' = \int_{dv} \rho' dv' \equiv \rho dv \quad \dots\dots\dots (7)$$

2・2 速度 式(3)の両辺を物質時間微分すれば、空間点 x''^i における速度 v''^i が次のように得られる。

$$v''^i = v^i + \nu^i{}_j \xi^j + (\mu^i{}_j + \zeta^i{}_{jk} \xi^k) \lambda^j \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} v^i &\equiv \dot{r}^i \\ \nu^i{}_j &\equiv \dot{\chi}^i{}_j \chi^j{}_i, \quad \mu^i{}_j \equiv \dot{x}'^i{}_j x'^j{}_i \\ \zeta^i{}_{jk} &\equiv (\dot{x}'^i{}_j \eta^j{}_{kl} + \eta^i{}_{jl} \dot{x}'^j{}_k) \chi^k{}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

である。ここで $\nu^i{}_j$ は要素 dv の回転角速度、 $\mu^i{}_j$ は要素 dv と重心を共有する要素 dv' の回転角速度ならびに $\zeta^i{}_{jk}$ は要素 dv' のねじれ回転角速度を表すテンソルである。式(9)から明らかなように、これらはいずれも指標 i と j について反対称である。したがって、 $\nu^i{}_j$, $\mu^i{}_j$ および $\zeta^i{}_{jk}$ は各々に双対な軸性ベクトルあるいは2階のテンソルをもつ。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \nu^{ij} &= \epsilon^{ijk} \nu_k \\ \mu^{ij} &= \epsilon^{ijk} \mu_k \\ \zeta^{ijk} &= \epsilon^{ijk} \zeta_{lk} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

である。ここで ϵ^{ijk} は Levi-Civita の記号である。

なお、これらの誘導に関する詳細については第1報を参照されたい。

3. ひずみテンソルの定義

3・1 物質表示によるひずみ 微視的体積要素を基準に考えた場合、変形前後の微小線素の二乗の差は、

$ds''^2 - dS''^2 = g_{ij}\delta r^i\delta r^j - G_{IJ}\delta R^I\delta R^J \dots (11)$
 と書ける。ここで G_{IJ} および g_{ij} はそれぞれ O 系および o 系の計量テンソルであり、また d は全微分、 δ は

絶対微分を表す記号とする。式(1), (2)を式(11)に代入すれば、

$$ds''^2 - dS''^2 = g_{ij}(\delta r^i\delta r^j + 2\delta r^i\delta \xi^j + 2\delta r^i\delta \lambda^j + 2\delta \xi^i\delta \lambda^j + \delta \xi^i\delta \xi^j + \delta \lambda^i\delta \lambda^j) - G_{IJ}(\delta R^I\delta R^J + 2\delta R^I\delta \Xi^J + 2\delta R^I\delta \Lambda^J + 2\delta \Xi^I\delta \Lambda^J + \delta \Xi^I\delta \Xi^J + \delta \Lambda^I\delta \Lambda^J) \dots (12)$$

となる。式(3)を用いて式(12)における δr^i , $\delta \xi^i$, $\delta \lambda^i$ を δR^I , $\delta \Xi^I$, $\delta \Lambda^I$ で表現すると

$$\left. \begin{aligned} \delta r^i &= dx^i = x^i_{,I}dX^I \\ \delta \xi^i &= \chi^i_{,I,J}\Xi^JdX^I + \chi^i_{,I}\delta \Xi^I \\ \delta \lambda^i &= \chi^i_{,I,J}\Lambda^JdX^I + \chi^i_{,I}\delta \Lambda^I + \eta^i_{IJ}\Lambda^I\Xi^JdX^K + \eta^i_{IJ}\Xi^I\delta \Lambda^J + \eta^i_{IJ}\Lambda^I\delta \Xi^J \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

となる。式(13)を式(12)に代入して整理すれば、線素の二乗の差は次のような独立な 6 種類のひずみテンソルによって表される。

$$ds''^2 - dS''^2 = 2\mathfrak{z}_{IJ}\delta \Xi^I dX^J + 2\Gamma^L_{K\epsilon IJ}\delta \Xi^I \Xi^J dX^K + 2\mathfrak{q}_{IJ}\delta \Lambda^I \delta \Xi^J + 2\mathfrak{b}^L_{K\epsilon IJ}\delta \Lambda^I \Lambda^J dX^K + 2\mathfrak{u}^L_{K\epsilon IJ}\delta \Lambda^I \Lambda^J \delta \Xi^K + 2\mathfrak{K}^M_{KL\epsilon IJ}\delta \Lambda^I \Lambda^J \Xi^K dX^L + (\text{DEP})_1 \dots (14)$$

ここで $\mathfrak{z}_{IJ}$ および Γ^L_K はそれぞれ階層 1 のマイクロポーラ物質を特徴づける Cosserat のひずみテンソルおよび Kafadar-Eringen によるひずみテンソル⁽⁹⁾ であり

$$\mathfrak{z}_{IJ} \equiv \mathfrak{z}_{IJ} - G_{IJ}, \quad \mathfrak{z}_{IJ} \equiv g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,J} \dots (15)$$

$$\Gamma^L_K \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ILJ}g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,J,K} \dots (16)$$

にて与えられる。ただし式(15)における $\mathfrak{z}_{IJ}$ は Cosserat の変形テンソルである。通常の右 Cauchy-Green テンソル C_{IJ} は $\mathfrak{z}_{IJ}$ を用いて、

$$C_{IJ} = \mathfrak{z}^K_I \mathfrak{z}^K_J$$

のように表されるから、Green のひずみテンソル E_{IJ} は Cosserat のひずみテンソル $\mathfrak{z}_{IJ}$ と独立ではない⁽⁹⁾。さらに、ここで新たに現れた 4 種類のひずみテンソル $\mathfrak{q}_{IJ}$, $\mathfrak{b}^L_K$, $\mathfrak{u}^L_K$ および $\mathfrak{K}^M_{KL}$ は階層 2 のマイクロポーラ物質に特有なひずみテンソルであり、これらは次式にて定義される。

$$\mathfrak{q}_{IJ} \equiv \mathfrak{q}_{IJ} - G_{IJ}, \quad \mathfrak{q}_{IJ} \equiv g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,J} \dots (17)$$

$$\mathfrak{b}^L_K \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ILJ}g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,J,K} \dots (18)$$

$$\mathfrak{u}^L_K \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ILJ}g_{ij}\chi^i_{,I}\eta^j_{,JK} \dots (19)$$

$$\mathfrak{K}^M_{KL} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{IMJ}g_{ij}(\chi^i_{,I}\eta^j_{,JK,L} + \eta^i_{,IK}\chi^j_{,J,L}) \dots (20)$$

また式(14)における $(\text{DEP})_1$ は、Green のひずみテンソルを含む以下のような従属的な 18 種類のひずみテンソルによって作られる多項式である。

$$\begin{aligned} &g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,J}, g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,J,K}, g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,K,L}, g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,J} - G_{IJ}, g_{ij}(\chi^i_{,I}\eta^j_{,JK} + \chi^i_{,K}\chi^j_{,IJ}) \\ &g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,J,K}, g_{ij}(\chi^i_{,I}\chi^j_{,J,K} + \chi^i_{,K}\eta^j_{,IJ}), g_{ij}\chi^i_{,I}\eta^j_{,JK}, g_{ij}\chi_{IJ}\eta^j_{,KL}, g_{ij}(\chi^i_{,I}\eta^j_{,JK,L} + \chi^i_{,K}\chi^j_{,IJ,L}) \\ &g_{ij}(\chi^i_{,I}\eta_{JK,L} + \chi^i_{,I}\eta^j_{,KL}), g_{ij}\eta^i_{,IJ}\eta^j_{,KL}, g_{ij}\chi^i_{,I}\chi^j_{,K,L}, g_{ij}\chi^i_{,I}\eta^j_{,KL} \\ &g_{ij}\chi^i_{,I}\eta^j_{,KL,M}, g_{ij}\eta^i_{,IJ}\eta^j_{,KL,M}, g_{ij}\chi^i_{,I}\eta^j_{,KL,M}, g_{ij}\eta^i_{,IJ}\eta^j_{,KL,M,N} \end{aligned} \dots (21)$$

これら 18 種類のひずみテンソルは、前述の 6 種類の独立なひずみテンソルによってすべて表現できる。

なお著者の一人が文献(14)で定義したひずみは、階層 2 のマイクロモルフィック物質に関するものであるから、ここで定義した階層 2 のマイクロポーラ物質に対するひずみとは異なることに注意されたい。

3・2 空間表示によるひずみ 空間表示によるひずみテンソルの定義を得るために式(2), (3)を考慮して、式

(12)における dX^I , $\delta \Xi^I$, $\delta \Lambda^I$ を dx^i , $\delta \xi^i$, $\delta \lambda^i$ で表せば線素の 2 乗の差は、

$$ds''^2 - dS''^2 = 2\mathfrak{z}_{ij}\delta \xi^i dx^j + 2\gamma^i_{K\epsilon iU}\delta \xi^i \xi^j dx^K + 2\mathfrak{q}_{ij}\delta \lambda^i \delta \xi^j + 2\delta^i_{K\epsilon iU}\delta \lambda^i \lambda^j dx^K - 2\mathfrak{u}^i_{K\epsilon iU}\delta \lambda^i \lambda^j \delta \xi^K + 2\mathfrak{K}^M_{KL\epsilon iU}\delta \lambda^i \lambda^j \xi^K dx^L + (\text{DEP})_2 \dots (22)$$

$\delta\Lambda'$, Ξ' および Λ' に書き改めれば次式を得る.

$$\begin{aligned} (ds''^2) = & 2(v_{ij} - \nu_{ij})\chi^i x^j \delta\Xi' dX^j + 2\nu^l{}_{;k} x^k \chi^l \epsilon_{ilj} \delta\Xi' \Xi' dX^k \\ & + 2(\nu_{ij} - \mu_{ij})\chi^i \chi^j \delta\Lambda' \delta\Xi' + 2\mu^l{}_{;k} \chi^k x^k \epsilon_{ilj} \delta\Lambda' \Lambda' dX^k + 2\zeta^l{}_{;k} \chi^k \chi^l \epsilon_{ilj} \delta\Lambda' \Lambda' \delta\Xi' \\ & + 2(\zeta^m{}_{;k} \chi^k \chi^m \chi^l{}_{;L} + \mu^l{}_{;k} \eta^m{}_{;k} \chi^k{}_{;L} + \zeta^l{}_{;k} \chi^m \chi^k{}_{;L}) \epsilon_{lmj} \delta\Lambda' \Lambda' \Xi' dX^L + (\text{DEP})_1 \dots \dots \dots (42) \end{aligned}$$

一方, 式(14)の両辺を物質時間微分すると次のようになる.

$$\begin{aligned} (ds''^2) = & 2\dot{\zeta}_{ij} \delta\Xi' dX^j + 2\dot{\Gamma}^L{}_{;K} \epsilon_{ilj} \delta\Xi' \Xi' dX^K + 2\dot{\chi}_{ij} \delta\Lambda' \delta\Xi' \\ & + 2\dot{\zeta}^L{}_{;K} \epsilon_{ilj} \delta\Lambda' \Lambda' dX^K + 2\dot{\mu}^L{}_{;K} \epsilon_{ilj} \delta\Lambda' \Lambda' \delta\Xi' + 2\dot{\chi}^M{}_{;KL} \epsilon_{lmj} \delta\Lambda' \Lambda' \Xi' dX^L + (\text{DEP})_1 \dots \dots \dots (43) \end{aligned}$$

式(42)と式(43)を比較することにより, ひずみ速度テンソルと第1報で定義した運動学的諸量との関係が以下のように得られる.

$$d_{ij} + (\omega_{ij} - \nu_{ij}) = \chi^i \dot{\zeta}_{ij} X^j \dots \dots \dots (44)$$

$$\nu^l{}_{;k} = \chi^l \dot{\Gamma}^L{}_{;K} X^K \dots \dots \dots (45)$$

$$\nu_{ij} - \mu_{ij} = \chi^i \dot{\chi}_{ij} X^j \dots \dots \dots (46)$$

$$\mu^l{}_{;k} = \chi^l \dot{\zeta}^L{}_{;K} X^K \dots \dots \dots (47)$$

$$\zeta^l{}_{;k} = \chi^l \dot{\chi}^L{}_{;K} X^K \dots \dots \dots (48)$$

$$\zeta^m{}_{;k;l} = \chi^m \dot{\chi}^M{}_{;KL} X^L \dots \dots \dots (49)$$

$$+ \eta^m{}_{LM} \chi^M X^K \dot{\zeta}^L{}_{;K} + \chi^m \dot{\chi}^M{}_{;KL} X^K \dots \dots \dots (49)$$

ここで $d_{ij} \equiv v_{(i;j)}$ および $\omega_{ij} \equiv v_{[i;j]}$ はそれぞれ変形速度テンソルおよび角速度テンソルである. これらの関係式は, 階層2の極性物質に対するエネルギー方程式およびエントロピー不等式を得る際に必要となる.

4. ひずみ-変位関係式

4.1 ひずみ-変位関係式 一般に微視的変位ベクトル $\mathbf{u}''$ は空間点と物質点の位置ベクトルの差として $\mathbf{u}'' = \mathbf{x}'' - \mathbf{X}''$ のように定義される. 式(1)および式(2)を用いれば $\mathbf{u}''$ は

$$\mathbf{u}'' = (r^i + \xi^i + \lambda^i) \mathbf{g}_i - (R^i + \Xi^i + \Lambda^i) \mathbf{G}_i \dots (50)$$

のように表される. 物質座標と空間座標の基底ベクトルを関係づけるシフト⁽⁴⁾ g_{ij} あるいは g_{ji} :

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{G}^j, \quad \mathbf{G}_i = g_{ji} \mathbf{g}^j$$

を用いて, 式(50)を物質座標における基底ベクトル $\mathbf{G}_i$ のみで書けば,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'' = & \{U^i + \Phi^j g^i_j \xi^j + \Psi^j g^i_j \lambda^j \\ & + (\mathcal{Y}^j_{jk} - \mathcal{Y}^j_{jL} \Phi_{Lk}) g^i_j g^k \lambda^j \xi^k\} \mathbf{G}_i \dots \dots \dots (51) \end{aligned}$$

となる. ここで, U^i , Φ^j , Ψ^j および $\mathcal{Y}^j_{jk}$ は階層2の物質の変位を表す基本的な量であり, 次式にて定義される.

$$U^i \equiv r^i g^i_j - R^i \dots \dots \dots (52)$$

$$\Phi_{ij} \equiv G_{ij} - g_{ij} \chi^j_i \dots \dots \dots (53)$$

$$\Psi_{ij} \equiv G_{ij} - g_{ij} \chi^j_i \dots \dots \dots (54)$$

$$\mathcal{Y}_{ijk} \equiv -\eta^j_{ik} g_{ij} \dots \dots \dots (55)$$

式(52)~(55)を式(15)~(20)に代入すれば, 物質表示によるひずみ-変位関係式が次のように得られる.

$$3_{ij} = U_{i;j} - \Phi_{ij} - \Phi_{ik} U^k{}_{;j} \dots \dots \dots (56)$$

$$\Gamma^L{}_{;K} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\Phi_{IJ;K} + \Phi^M_{IK} \Phi_{JM;K}) \dots \dots \dots (57)$$

$$\chi_{ij} = -\Phi_{ij} - \Psi_{ij} + \Psi_{ik} \Phi^k{}_j \dots \dots \dots (58)$$

$$\zeta^L{}_{;K} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\Psi_{IJ;K} + \Psi^M_{IK} \Psi_{JM;K}) \dots \dots \dots (59)$$

$$\mu^L{}_{;K} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathcal{Y}_{IJK} + \Psi^M_{IK} \mathcal{Y}_{JMK}) \dots \dots \dots (60)$$

$$\begin{aligned} \chi^M{}_{;KL} = & \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathcal{Y}_{IJK;L} + \Psi^N_{IK} \mathcal{Y}_{JNK;L} + \mathcal{Y}_{INK} \Psi^N_{;L}) \\ & \dots \dots \dots (61) \end{aligned}$$

同様に, 空間表示によるひずみ-変位関係式は以下のようになる.

$$3_{ij} = u_{i;j} - \phi_{ij} + \phi_{ik} u^k{}_j \dots \dots \dots (62)$$

$$\gamma^l{}_{;k} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\phi_{ij;k} - \phi^m_{ik} \phi_{jm;k}) \dots \dots \dots (63)$$

$$\chi_{ij} = -\phi_{ji} - \phi_{ij} - \phi_{ik} \phi^k{}_j \dots \dots \dots (64)$$

$$\delta^l{}_{;k} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\psi_{ij;k} - \psi^m_{ik} \psi_{jm;k}) \dots \dots \dots (65)$$

$$\mu^l{}_{;k} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathcal{Y}_{ijk} - \psi^m_{ik} \mathcal{Y}_{jmk}) \dots \dots \dots (66)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^m{}_{;kl} = & \frac{1}{2} \epsilon^{ij} (\mathcal{Y}_{ijk;l} - \psi^n_{ik} \mathcal{Y}_{jmk;l} \\ & - \mathcal{Y}_{ink} \psi^n_{;l}) \dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$

ただし, 空間表示による変位の定義は以下のとおりである.

$$u^i \equiv r^i - g^i_j R^j \dots \dots \dots (68)$$

$$\phi_{ij} \equiv \chi^j_i g_{ij} - g_{ij} \dots \dots \dots (69)$$

$$\psi_{ij} \equiv \chi^j_i g_{ij} - g_{ij} \dots \dots \dots (70)$$

$$\mathcal{Y}_{ijk} \equiv \eta^j_{ik} g_{ij} \chi^j_i \dots \dots \dots (71)$$

4.2 ひずみの幾何学的意味 次に微小変形を仮定して前節で得たひずみ-変位関係式を線形化することにより, 本報で定義したひずみがもつ幾何学的意味を明らかにする. 基準巨視的要素 dV および第1巨視的要素 dV' の回転を表す χ^i_i および χ'^i_i はともに直交テンソルであるから, それぞれの回転角 θ および θ' と回転面の単位法線ベクトル N_i および N'_i を用いて次のように表現できる⁽⁵⁾.

$$\begin{aligned} \chi^i_i = & \{N_i N_j + (G_{ij} - N_i N_j) \cos \theta \\ & - \epsilon_{ikj} N^k \sin \theta\} g^{ij} \dots \dots \dots (72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi'^i_i = & \{N'_i N'_j + (G'_{ij} - N'_i N'_j) \cos \theta' \\ & - \epsilon_{ikj} N'^k \sin \theta'\} g'^{ij} \dots \dots \dots (73) \end{aligned}$$

いま物質の変形が小さいものと考え、 $\theta \ll 1$, $\theta' \ll 1$ を仮定すれば $\cos \theta \approx 1$, $\cos \theta' \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, $\sin \theta' \approx \theta'$ となる。このとき式(72), (73)は次のように書ける。

$$x^{i'} = (G_{ij} - \varepsilon_{ikj} \Phi^k) g^{ij} \quad (74)$$

$$x^{i'} = (G_{ij} - \varepsilon_{ikj} \Psi^k) g^{ij} \quad (75)$$

ただし、

$$\Phi^k \equiv N^k \theta \quad (76)$$

$$\Psi^k \equiv N^k \theta' \quad (77)$$

である(図7参照)。 Ψ^k は $\Psi^k = \Psi^k(X^i, \Xi^i)$ であるから、 Ψ^k を Ξ^i についてマクローリン展開し Ξ^i の1次までとると、

$$\Psi^k = \Psi^k + \mathcal{K}^k_{\ell} \Xi^{\ell} \quad (78)$$

を得る。ただし

$$\Psi^k \equiv H^k \Theta \equiv (\Psi^k)_{\Xi^i=0} \quad (79)$$

$$\mathcal{K}^k_{\ell} \equiv \left(\frac{\partial \Psi^k}{\partial \Xi^{\ell}} \right)_{\Xi^i=0} \quad (80)$$

である。式(76), (79)および式(80)から明らかなように、 Φ^i は要素 dV の回転角ベクトル、 Ψ^i は要素 dV とその重心を共有する要素 dV' の回転角ベクトル、また $\mathcal{K}^k_{\ell}$ は要素 dV' が要素 dV の重心を Ξ^i だけ離れることにより、その回転角がいかに変化するかを表す回転角勾配テンソルであることがわかる(図7参照)。式(78)を式(75)に代入すると、 $x^{i'}$ は

$$x^{i'} = (G_{ij} - \varepsilon_{ikj} \Psi^k) g^{ij} - \varepsilon_{ikl} \mathcal{K}^k_{\ell} g^{il} \Xi^{\ell} \quad (81)$$

と表される。式(81)と式(3)を比較すると、次式を得る。

$$x^{i'} = (G_{ij} - \varepsilon_{ikj} \Psi^k) g^{ij} \quad (82)$$

$$\eta^{i'j} = -\varepsilon_{ikl} \mathcal{K}^k_{\ell} g^{il} \quad (83)$$

式(74), (82)および式(83)を式(53)~(55)に代入すれば次のような双対な関係が得られる。

$$\Phi_{ij} = \varepsilon_{ikj} \Phi^k \quad (84)$$

図7 階層2の極性体の回転変位

$$\Psi_{ij} = \varepsilon_{ikj} \Psi^k \quad (85)$$

$$\mathcal{K}_{ij} = \varepsilon_{ikj} \mathcal{K}^k_{\ell} \quad (86)$$

式(84)~(86)を前節で得たひずみ-変位関係式(56)~(61)に代入し、微小変形であることを考慮して非線形項を省略すれば、以下になる。

$$3_{ij} = E_{ij} + \varepsilon_{ikj} (W^k - \Phi^k) \quad (87)$$

$$\Gamma^L_k = \Phi^L_{\ell; k} \quad (88)$$

$$\mathcal{U}_{ij} = \varepsilon_{ikj} (\Phi^k - \Psi^k) \quad (89)$$

$$\mathcal{B}^L_k = \Psi^L_{\ell; k} \quad (90)$$

$$\mathcal{U}^L_k = \mathcal{K}^L_{\ell; k} \quad (91)$$

$$\mathcal{K}^M_{kl} = \mathcal{K}^M_{k; \ell} \quad (92)$$

ここで $E_{ij} \equiv U_{(i; j)}$, $W_{ij} = \varepsilon_{ikj} W^k = U_{[i; j]}$ である。式(87)~(92)から明らかなように、本報で定義したひずみテンソルの主な幾何学的意味は以下のとおりである。Cosserat のひずみ 3_{ij} は物質の伸縮・せん断変形および要素 dV の公転と自転の相対回転を表すひずみであり、Kafadar-Eringen によるひずみ Γ^L_k は要素 dV の回転こう配を表すひずみであるといえる。また、階層2の物質に特有な4種類のひずみ $\mathcal{U}_{ij}$, $\mathcal{B}^L_k$, $\mathcal{U}^L_k$ および $\mathcal{K}^M_{kl}$ はそれぞれ要素 dV と dV' の相対回転、要素 dV' の回転こう配、要素 dV' のねじれ回転および要素 dV' のねじれ回転こう配を表すひずみであることがわかる。

同様にして、空間表示によるひずみ-変位関係式を線形化すれば次式を得る。

$$3_{ij} = \varepsilon_{ikj} (w^k - \phi^k) \quad (93)$$

$$\gamma^L_k = \phi^L_{\ell; k} \quad (94)$$

$$\mathcal{U}_{ij} = \varepsilon_{ikj} (\phi^k - \psi^k) \quad (95)$$

$$\mathcal{B}^L_k = \psi^L_{\ell; k} \quad (96)$$

$$\mathcal{U}^L_k = \mathcal{K}^L_{\ell; k} \quad (97)$$

$$\mathcal{K}^M_{kl} = \mathcal{K}^M_{k; \ell} \quad (98)$$

ただし、

$$\phi_{ij} = \varepsilon_{ikj} \phi^k \quad (99)$$

$$\phi^k = n^k \theta \quad (100)$$

$$\psi_{ij} = \varepsilon_{ikj} \psi^k \quad (101)$$

$$\phi^k \equiv (\phi^k)_{\theta^i=0} = u^k \Theta \quad (102)$$

$$\mathcal{K}^M_{kl} = \varepsilon_{ikj} \mathcal{K}^M_{k; \ell} \quad (103)$$

$$\mathcal{K}^L_k \equiv (\partial \psi^L / \partial \xi^k)_{\theta^i=0} \quad (104)$$

である。これらの各量は物質表示について論じたものと同様の幾何学的意味をもつ。

5. 結 言

前報で示した高階層極性物質の運動学に基づき、階層2のマイクロポーラ物質を特徴づけるひずみを定義し、さらにひずみ-変位関係式を定式化した結果以下の結論を得た。

(1) 階層2のマイクロポーラ物質は、独立な6種類のひずみによって特徴づけられる。それらは通常の極性体に対する Cosserat のひずみ, Kafadar-Eringen によるひずみおよび階層2に特有な新たな4種類のひずみである。

(2) 独立な6種類のひずみに対する物質表示と空間表示の関係は式(32)~(37)で、またひずみ速度と運動学的諸量との関係は式(44)~(49)で与えられる。

(3) 階層2のマイクロポーラ物質の変形を表す独立な変位は、基準巨視的要素 dV の並進変位, dV の回転変位, 第1巨視的要素 dV' の回転変位および dV' のねじれ回転変位の4種類である。

(4) 独立な6種類のひずみをもつ主な幾何学的意味は、伸縮・せん断変形および要素 dV の公転と自転の相対回転, 要素 dV の回転こう配, 要素 dV と dV' の相対回転, 要素 dV' の回転こう配, 要素 dV' のねじれ回転および要素 dV' のねじれ回転こう配である。

階層2の極性物質が有する多重内部機構を表現する本ひずみおよび変位を用いれば、階層2に特有な双偶応力を特徴づけることができる。その構成式ならびにここで定義したひずみのつくる不変量については次報において議論する。

文 献

- (1) Ericksen, J. L. and Truesdell, C., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1(1958), 295.
- (2) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S., *Int. J. Eng. Sci.*, 2(1964), 189.
- (3) Eringen, A. C., 文献(2)の205ページ.
- (4) Eringen, A. C., *Continuum Physics*, 2(1976), 10, Academic Press.
- (5) Eringen, A. C., *Continuum Physics*, 4(1976), 4, Academic Press.
- (6) Eringen, A. C., 文献(5)の63ページ.
- (7) Green, A. E. and Rivlin, R. S., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16(1964), 325.
- (8) Green, A. E. and Rivlin, R. S., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17(1964), 113.
- (9) Kafadar, C. B. and Eringen, A. C., *Int. J. Eng. Sci.*, 9(1971), 271.
- (10) Mindlin, R. D. and Tiersten, H. F., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11(1963), 415.
- (11) 志澤・高橋, 機論, 55-519, A(1989), 2363.
- (12) Suhubi, E. S. and Eringen, A. C., 文献(2)の389ページ.
- (13) 高橋・水野, 機論, 44-378, A(1978), 460.
- (14) 高橋, 機論, 55-515, A(1989), 1519.
- (15) 高橋・志澤, 文献(11)の2356ページ.
- (16) Truesdell, C. and Noll, W. (Flügge, S. 編), *Encyclopedia of Physics, The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, 3, pt.3, (1965), 63, Springer.
- (17) Toupin, R. A., 文献(10)の385ページ.