部分積分法による動的境界要素解析の精度向上*

足立 忠 晴^{*1}, 河村 正 孝^{*2}
宇治橋 貞 幸^{*1}, 松本 浩 之^{*1}Improvement of the Accuracy of the Dynamic Boundary Element Method
by the Partial Integral MethodTadaharu ADACHI, Masataka KAWAMURA,
Sadayuki UJIHASHI and Hiroyuki MATSUMOTO

A new boundary element method for dynamic viscoelastic problems is suggested to improve the accuracy of numerical results at the vicinity of boundaries. The singular terms in the fundamental solutions are associated with static solutions and are separated from the dynamic solutions. The strong singularities in the fundamental solutions are weakened by the partial integration of the integral equations for internal points. The yielded equations are numerically solved using displacements and tangential differences of displacements on the boundaries in the Laplace transformed domain. The validity of this method is confirmed by the traditional analysis. The numerical results are found to exhibit good accuracy of the stresses at the vicinity of the boundaries. It is shown that the numerical accuracies with this method are improved, compared with the results with the standard method requesting more numbers of boundary elements.

Key Words: Computational Mechanics, Boundary Element Method, Viscoelasticity, Stress Wave, Fundamental Solution, Singularity, Laplace Transform

1. 緒 言

境界要素法において境界近傍で著しく解析精度が低下する。この現象は「境界層効果(Boundary Layer Effect)」と呼ばれ、積分方程式に含まれる特異性を有する基本解の数値誤差が大きく影響すると考えられている。応力集中問題の観点からも境界および境界近傍の応力を精度よく求めることは重要であり境界近傍の解析精度を向上するため次のような種々の方法が試みられている。

(1) 高精度の準特異積分(Quasi Singular Integral)による方法

境界要素法における非対角要素あるいは境界近傍の内点を計算する場合に生じる準特異積分の精度を向上させる方法⁽¹⁾であり、変数変換した後にガウスの数値積分公式を適用する方法^{(2)~(5)}、二重指数関数形積分法⁽⁶⁾⁽⁷⁾、サブエレメント法⁽⁸⁾などがあり、特に高次の境界要素を用いる場合に有効な方法である。

(2) 相対量による方法

変位などの絶対量を用いる代わりに境界上のある点

を基準とした相対量を使用することにより特異積分の次数を一次弱めることができる⁽⁹⁾。

(3) 部分積分による方法

積分方程式を部分積分を行い特異性の次数を下げる方法⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾である。

(4) 間接仮想境界による方法

仮想境界の導入により積分方程式の基本解の特異性を考慮する必要のない方法⁽¹²⁾である。

(1)の方法は汎用性があり高次の境界要素の併用により高精度の結果が得られるが、数値積分に要する時間が長くなる。一方、汎用性にかけるが低次要素を用い境界積分方程式の特異積分を解析的に処理すれば計算時間が短縮される。これから得られる表面力と変位の接線微分から境界上の応力を求める方法⁽¹³⁾を用いれば境界上の数値を良好な精度で求めることができる^{(14)~(16)}。しかし境界近傍の応力を求める場合、内点の積分方程式に含まれる準特異積分を解析的に処理することは困難である。

本研究では内点の積分方程式を部分積分して、特異性の強い表面力の基本解の特異性の次数を一次下げ、準特異性の影響を弱め境界近傍の数値の精度を向上させるを試みる。

二次元線形動粘弾性体を対象とする境界要素解析法

* 原稿受付 平成2年7月3日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

^{*2} 新日本製鐵(株)君津製鐵所 (〒229-11 君津市君津一丁目)。

を定式化し、ラプラス変換と高速フーリエ変換による数値逆変換法を組合せた方法⁽¹⁷⁾を用いて、基本的問題について数値解析し、解析解と比較する。

2. 基礎理論

2.1 境界積分方程式の導出 動弾性問題をより一般的にした線形動粘弾性問題に関する境界要素法は次のように定式化されている。

まず応力の平衡方程式は慣性力以外の物体力を無視して

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,t} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。

ひずみと変位についての幾何学的関係式は微小変形の場合

$$\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。

線形粘弾性体の構成方程式⁽¹⁸⁾は

$$\sigma_{ij}(t) = G_{ijkl}(t) \varepsilon_{kl}(0) + \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。ここで式(1)から(3)において u_i , σ_{ij} および ε_{ij} はそれぞれ変位、応力およびひずみ成分である。 ρ および t は密度、時間を示し下付きの添字“,”はその後に続く添字に関する量で微分することを表す。そして G_{ijkl} は応力緩和関数テンソルであり等方性材料では二つの時間関数 $G_1(t)$ および $G_2(t)$ を用いて次式で示される。

$$G_{ijkl}(t) = G_1(t) \delta_{ij} \delta_{kl} + G_2(t) (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl})$$

ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

物体境界での合応力成分(表面力)の x_i 座標方向成

分 T_i は

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで n_j は物体表面の外向き法線方向余弦である。

ラプラス変換法を用いれば線形粘弾性問題は対応原理により弾性問題と同様に扱うことができる⁽¹⁹⁾。そこで $t=0$ において $u_i = u_{i,t} = \varepsilon_{ij} = 0$ としポアソン比 ν が時間に対して一定値を示すものとすれば式(1)および(3)をラプラス変換すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij,j} - \rho p^2 \bar{u}_i &= 0 \\ \bar{\sigma}_{ij}/pG &= (c-2) \bar{u}_{i,l} \delta_{lj} + (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad \dots\dots\dots (5) \\ \bar{T}_i &= \bar{\sigma}_{ij} n_j \end{aligned}$$

ここで

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt$$

また G は $G_{ijkl}(t)$ のラプラス変換されたものであり、

$$c = \begin{cases} 2/(1-\nu) & \text{平面応力} \\ 2(1-\nu)/(1-2\nu) & \text{平面ひずみ} \end{cases}$$

である。

ラプラス像空間における表示式(5)に対して重み付き残差法を適用すれば、次のような境界上および内点に関する積分方程式が得られる。

$$C_{ji} \bar{u}_i = \int_\Gamma [\bar{u}_{ji}^* \bar{T}_i - \bar{T}_{ji}^* \bar{u}_i] d\Gamma \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで

$$\begin{aligned} C_{ji} &= \int_\Gamma \bar{T}_{ji}^* d\Gamma \\ &= \begin{cases} \delta_{ji}/2 & (\text{なめらかな境界上の場合}) \\ 1 & (\text{内点の場合}) \end{cases} \end{aligned}$$

そして変位および表面力の基本解 $\bar{u}_{ji}^*$ および $\bar{T}_{ji}^*$ は次式で示される⁽²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ji}^* &= \frac{1}{2\pi pG} [\psi \delta_{ji} - \chi e_j e_i] \\ \bar{T}_{ji}^* &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ji} + n_j e_i \right) - \frac{2\chi}{r} \left(e_j n_i - 2e_j n_i \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\chi}{dr} e_j e_i \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + (c-2) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) e_j n_i \right] \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \psi &= K_0(a_2 r) + \frac{K_1(a_2 r)}{a_2 r} - \frac{1}{c} \frac{K_1(ar)}{ar}, \quad \chi = -K_2(ar)/c + K_2(a_2 r), \quad a = p/\sqrt{c\lambda}, \quad a_2 = p/\sqrt{\lambda} \\ \lambda &= pG/\rho, \quad r = \overline{YX}, \quad e_i = r_{,i} \end{aligned}$$

であり、 Y および X はそれぞれソース点および境界上あるいは内部領域の点である。 $K_n(z)$ は第2種の変形ベッセル関数である。

式(6)においてラプラス変換された量を示す“ $\bar{}$ ”を除けば静的問題に対する積分方程式となる。

静的問題の基本解は

$$u_{ji}^{s*} = -\frac{1}{4\pi cG} \{ (c+1)\delta_{ji}\ln(r) - (c-1)e_j e_i \} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$T_{ji}^{s*} = -\frac{1}{2\pi cr} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ji} + 2(c-1)e_j e_i \frac{\partial r}{\partial n} + e_i n_j - e_j n_i \right\}$$

であり、ここで添字 s は静的問題に対する関数を示す。

式(7)の特異性の強い表面力の基本解 $\bar{T}_{ji}^*$ から特異性を含む項と含まない項に分離する。まず変形ベッセル関数を次のように書き換える。

$$K_1(z) = K_1^D(z) + 1/z, \quad K_2(z) = K_2^D(z) + 2/z^2 - 1/2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで $K_1^D(z)$ および $K_2^D(z)$ は次式で定義される。

$$K_1^D(z) = \{ \gamma + \ln(z/2) \} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!} + \left\{ \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} \right\}$$

$$K_2^D(z) = -\{ \gamma + \ln(z/2) \} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+2}}{k!(k+2)!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+2}}{k!(k+2)!} \left\{ \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k+2} \frac{1}{m} \right\}$$

ここで、 $\gamma = 0.57721566$ (Euler の定数) である。

式(9)を式(7)の第2式に代入して表面力の基本解を次のように変形することができる。

$$\bar{T}_{ji}^* = T_{ji}^{s*} + \bar{T}_{ji}^{D*} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$\bar{T}_{ji}^{D*} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\psi^D}{dr} - \frac{\chi^D}{r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ji} + n_j e_i - \frac{2\chi^D}{r} (e_j n_i - 2e_j n_i \frac{\partial r}{\partial n}) - 2 \frac{d\chi^D}{dr} e_j e_i \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right. \\ \left. + (c-2) \left(\frac{d\psi^D}{dr} - \frac{d\chi^D}{dr} - \frac{\chi^D}{r} \right) e_j n_i \right]$$

$$\frac{d\psi^D}{dr} = \frac{\alpha}{c} \frac{K_2^D(\alpha r)}{ar} - \alpha_2 \left\{ K_1^D(\alpha_2 r) + \frac{K_2^D(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} \right\}$$

$$\chi^D/r = \{ -K_2^D(\alpha r) + K_2^D(\alpha_2 r) \} / c$$

$$\frac{d\chi^D}{dr} = \frac{\alpha}{c} \left\{ K_1^D(\alpha_2 r) + 2 \frac{K_2^D(\alpha r)}{ar} \right\} - \alpha_2 \left\{ K_1^D(\alpha_2 r) + 2 \frac{K_2^D(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} \right\}$$

である。

式(10)において特異性を含む項は T_{ji}^{s*} のみであり $\bar{T}_{ji}^{D*}$ には含まれない。またここでは示さないが変位の基本解についても同様に静的な場合の基本解に相当する項にのみ特異性が含まれる。さらには三次元問題についても同様の結果が得られる⁽¹⁶⁾。よって二次元動粘弾性問題の変位および表面力の基本解の特異性は静的問題と同様にそれぞれ $\ln(r)$ および $1/r$ である。

2.2 内点に関する積分方程式の導出 動的問題における基本解の特異性を含む項は静的な場合の基本解と同じ関数で表示される。式(6)に $C_{ji}=1$ とすれば内点に関する積分方程式となる。しかしこの式では境

界近傍で精度が著しく低下することが知られている。

そこで式(6)に $C_{ji}=1$ および式(10)に代入し静的問題の表面力の基本解 T_{ji}^{s*} を含む項を部分積分すると次式が得られる。

$$\bar{u}_j = \bar{u}_j(y) + \int_{\Gamma} \left[\bar{u}_{ji}^* \bar{T}_i - \bar{T}_{ji}^{D*} \bar{u}_i - W_{ji}^* \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \Gamma} \right] d\Gamma \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$W_{ji}^* = -\frac{1}{2\pi c} \{ c\phi \delta_{ij} + (c-1)\epsilon_{it} e_j e_t + \epsilon_{ji} \ln(r) \}$$

であり、 ϕ および $u_j(y)$ はそれぞれ図1のように座標軸 x_1 と r のなす角および y を通り x 軸に平行な直線と境界 Γ との交点の内 y から最も遠い点の変位を示す。また ϵ_{ji} は交代テンソルである。

上式の基本解 W_{ji}^* は変位の基本解 u_{ji}^{s*} の特異性と同様の $\ln(r)$ を持つことになり、 $1/r$ の特異性を持つ基本解 T_{ji}^{s*} より特異性の次数が小さくなる。よって特異性の弱い積分方程式により精度よく変位が求められることが期待される。式(11)は表面力と境界上の変位の接線微分から内点の変位量が求められる形となり、境界上の変位の接線微分は変位の差分より求めることができる。そのため変位の接線微分を求めるのに要する計算時間がほとんどかからないことから、式

図1 二次元粘弾性体

(11)によれば式(6)による場合とほぼ同程度の計算時間でより良好な精度の結果を得ることができる。

また応力に関する積分方程式は式(11)を式(5)に代入することにより $1/r^2$ から $1/r$ へと特異性の弱められた形として求められる。

2.3 境界上の応力の導出 境界上の応力は境界上の変位から求める⁽¹³⁾。各点の応力は式(5)の第2式により求められることから変位の微分値が得られればよいことになる。境界上の変位の微分値は次式のように接線微分の関係から求められる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial \Gamma} = u_{i,j} \frac{dx_j}{d\Gamma} \dots\dots\dots (12)$$

実際の数値計算においては変位の接線微分は境界上の変位の差分近似を用いる。

式(5)の第2式および(12)から境界上の応力を求めることができる。

2.4 積分方程式の離散化および数値計算法 積分方程式を解くにあたって境界を一定要素で離散化する。係数マトリックスの非対角要素の積分については Gauss-Legendre の数値積分公式を用い、対角要素に関する積分は解析的に扱った。

また境界上の変位の接線微分は求める位置の要素と隣合う要素の変位を用いて中央差分により計算される値を用いる。

このようにしてラプラス変換領域において得られたそれぞれの数値を高速フーリエ変換による方法⁽²¹⁾を用いて数値的に逆変換した。計算式は次のとおりである。

$$f_k = \frac{\exp(\gamma k \Delta t)}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}_n \exp(i 2 \pi n k / N) \dots\dots\dots (13)$$

ここで

$$f_k = f(k \Delta t), \quad \bar{f}_n = \bar{f}(\gamma + i n \Delta \omega)$$

$$\Delta \omega = 2\pi / T, \quad \Delta t = T / N$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad i = \sqrt{-1}$$

図2 円孔面に静的内圧をうける無限体

であり f , T および N はそれぞれ逆変換を行う関数、解析の対象とする時間範囲およびサンプリング数である。

この方法によれば複素数計算しなければならないが、安定した数値結果を得ることができる。

この逆変換法の計算は複素数領域で行われるため、基本解の数値を得るのに必要な複素数を引数とするベッセル関数の計算は r -method⁽²²⁾ により行った。

3. 数値計算結果

3.1 二次元弾性問題

a. 円孔面に静的内圧をうける無限体 図2に示されるように無限体中の半径 a の円孔面に一様な内圧が作用する問題を考える。このとき境界条件は次式である。

$r=a$ において

$$T_1 = F_0 \cos \theta, \quad T_2 = F_0 \sin \theta \dots\dots\dots (14)$$

境界要素数 M を 12 あるいは 24 として円孔面を当分割して円周方向の垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ について解析を行った。

この場合の解析解⁽²³⁾ は次式で与えられる。

$$\sigma_{\theta\theta} / F_0 = (a/r)^2 \dots\dots\dots (15)$$

境界上の円周方向の垂直応力は $M=12$ および 24 のとき解析解に対する相対誤差 4.3% および 2.7% で求められた。

内点の円周方向の応力値を本解析方法と式(6)に基づいた従来の方法で求めた場合の精度の比較を図3に示す。従来の方法では要素分割数 $M=12$ および 24 のとき 10% の誤差で求められる範囲は境界から境界要

図3 応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の相対誤差
Present: 式(11)による結果
General: 式(6)による結果

素長さ ($\Delta\Gamma/a=0.52$, $\Delta\Gamma/a=0.26$) の約 2/5 および 1/2 以上離れた範囲である。図 3 により従来の方法では境界要素数を多くしても、一様に計算精度が向上することなく、境界のごく近傍 ($1 \leq r/a \leq 1.05$) で精度の向上の傾向が逆転することもある。これに対し本解析方法では $M=12$ および 24 のとき境界から境界要素長さの約 1/5 および 1/10 より離れた範囲で 10% の誤差以内で結果が求められる。また境界要素数を増加させたとき内点の全範囲において一様に精度向上が認められた。また境界のごく近傍において精度の低下がみられるが $M=12$ および 24 でも解析解に対して 100% 以上の誤差を示すことがなかった。また半径方向の応力についても本解析方法によれば円周方向の応力と同様の精度で数値結果を得ることができた。

3・2 二次元動粘弾性問題 以下で解析を行った粘弾性体モデルは図 4 で示される三要素標準固体モデル⁽¹⁹⁾である。このモデルのラプラス変換領域における応力緩和関数 G は次式となる。

$$G = \frac{1}{2(1+\nu)\rho} \frac{E_1 E_2 + (E_1 + E_2)\eta p}{E_2 + \eta p} \dots\dots\dots (16)$$

アクリル材 (PMMA 材) を対象とし、それぞれの定数を次のとおりとする。

$$E_1 = 4.23 [\text{GPa}], \quad E_2 = 1.25 [\text{GPa}]$$

$$\eta = 1.00 [\text{MPa} \cdot \text{s}], \quad \nu = 0.365$$

また密度は

$$\rho = 1180 [\text{kg/m}^3]$$

である。

図 4 粘弾性体モデル

図 5 円孔面に衝撃内圧をうける無限体

動的問題において解析する場合、時間間隔 Δt と境界要素の大きさ $\Delta\Gamma$ とを適切に選択しなければ数値結果が不安定となる。このような安定条件を表すパラメータとして次の値を用いる⁽¹⁴⁾。

$$\beta = \frac{C_e \Delta t}{\Delta\Gamma} \geq \frac{1}{2} \dots\dots\dots (17)$$

ここで C_e は弾性波の速度を表す。本研究では式 (17) を満たすように時間間隔 Δt と境界要素の大きさ $\Delta\Gamma$ を設定した。

以下において境界要素解析による結果と比較する解析解は粘弾性体の応答を解析的に求めることが困難であるために、ラプラス変換領域で得られた解析解を 2・4 節で述べた数値的方法により逆変換したものを用いるものとする。このような手法で得られた数値は十分な精度を有することはすでに著者らによって多くの問題に適用され確認されている⁽²⁴⁾。

a. 円孔面に衝撃内圧をうける無限体 図 5 のように無限体中の半径 a の円孔面に一様な衝撃圧力が作用する問題を考える。解析において使用した境界条件は次式である。

$r=a$ において

$$T_1 = F_0 f(t) \cos \theta, \quad T_2 = F_0 f(t) \sin \theta \dots\dots\dots (18)$$

ここで

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\pi t/t_0)/2 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & t_0 \leq t \end{cases}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{E_1 + E_2}{\rho}}, \quad \kappa = \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad t_0 = \frac{4a}{c_1}$$

である。

境界要素数 M を 12 および 24 として円孔面を当分割しラプラス逆変換におけるサンプリング数 N を 32 および 64 とした。解析の対象とする時間範囲 T を $30a/c_1$ とし、 $\gamma=5/T$ として解析を行った。このときの

図 6 応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の時間変化 ($M=12$, $N=32$)

安定条件式 β は

$$M=12, N=32 \text{ のとき } \beta=1.90$$

$$M=32, N=32 \text{ のとき } \beta=3.72$$

$$M=32, N=64 \text{ のとき } \beta=1.86$$

となり式(17)を満たしている。

ラプラス変換領域における円周方向の垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の解析解は二次元動弾性理論より得られる解⁽²⁵⁾ より次式のように求められる。

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{F_0} = \frac{(1-\kappa)K_0(ar)/\kappa + K_1(ar)/ar}{K_0(aa)/\kappa + K_1(aa)/aa} \bar{f}(p) \quad (19)$$

ここで a は式(7)のただし書きと同様である。

図6に円周方向の垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の時間変化を示す。境界要素数は $M=12$ 、サンプリング数は $N=32$ である。図6中の実線は解析解を示す。境界上の応力はやや精度が低下しているが内点においてはほぼ解析解と一致している。この結果は式(6)の従来の方法による結果と一致しており、数値計算時間もほぼ同じであった。例えば HITAC M-660 K により計算した内点の数が9点の場合、いずれも数値計算に約90秒程度を要

図7 応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の時間変動
Present: 式(11)による結果
General: 式(6)による結果

図8 応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の相対誤差
Present: 式(11)による結果

した。

図7に境界近傍の円周方向の垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の時間変化について本解析方法と従来の方法による結果とを比較したものである。本解析方法ではほぼ実線の解析解に一致しているけれども従来の方法によれば全く異なる応力変化の波形が求められることになる。

サンプリング数 N を変化させたときの境界近傍の円周方向の垂直力に関する本解析方法の相対誤差を図8に示す。動的問題の相対誤差評価は各時間の誤差の平均値を用いるものとする。境界要素数 M を増加させたときのように顕著な精度向上が見られない。図8には示していないが境界から離れた $r/a \geq 1.5$ の範囲において本解析方法と従来の方法による結果とは、ほぼ同様の数値が得られた。

b. 円孔面に衝撃ねじりをうける無限体 図5と同様の解析モデルの円孔面に衝撃せん断力が作用した場合(図9)について考える。解析した境界条件は次のとおりである。

$r=R$ において

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= F_0 f(t) \sin(\theta) \\ T_2 &= -F_0 f(t) \cos(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

図9 円孔面に衝撃ねじりをうける無限体

図10 応力 $\sigma_{\theta\theta}$ の時間変動
Present: 式(11)による結果
General: 式(6)による結果

ここで

$$f(t) = \begin{cases} \{1 - \cos(\pi t/t_0)\}/2 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & t_0 \leq t \end{cases}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{2+\nu} \frac{E_1 + E_2}{\rho}}, \quad t_0 = 4a/C_2$$

である。

境界要素数 M を 12 および 24 としサンプリング数 N を 32 とした。また解析の対象とする時間の範囲 T を $30a/c_2$ とし、 $\gamma=5/T$ として解析を行った。このような条件のとき安定条件式(17)を満足している。

ラプラス変換領域における無限体に生じるせん断応力の解析解は二次元動弾性理論より得られる解⁽²⁶⁾に式(16)を代入すれば次のように求められる。

$$\frac{\bar{\sigma}_{r\theta}}{F_0} = \frac{K_2(\alpha_2 r)}{K_2(\alpha_2 a)} \bar{f}(p) \dots\dots\dots (20)$$

ここで α_2 は式(7)のただし書きと同様である。

境界近傍の $r/a=1.05$ におけるせん断応力 $\sigma_{r\theta}$ の時間変動を図 10 に示す。図 10 中の実線は解析解による結果を示す。この点においては従来の方法では解析解とかなり異なった結果となっている。これに比較して本解析方法では境界要素数 M を増加することによりさらに精度が向上することがわかる。

4. 結 言

動的境界要素法における境界近傍の解析精度の低下を防ぐための方法を考察した。動的境界要素法ではかなりの数値計算時間を必要とするため、計算時間を増加させることなく精度のよい数値結果を得なければならない。そこで本研究では内点に関する積分方程式において部分積分により基本解の特異性のオーダーを下げ境界上の変位と変位の接線方向の差分近似値より内点の応力および変位を求める方法を用いた。動的問題の場合、基本解を特異性を含む項と含まない分離し特異性を含む項が静的問題の基本解に一致することに着目し静的問題と同様の過程により計算することができることを示した。

このようにして得られた内点に関する積分方程式を静弾性問題および動粘弾性問題に適用した結果、境界近傍の応力が精度よく求められることがわかった。また本解析方法では境界要素数を向上させたときその効果が顕著に現れ、境界のごく近傍でも従来の方法のように著しい精度低下を起こすことがなかった。そして静的問題および動粘弾性問題のいずれについても本解析方法を用いたために生じる計算時間の増加はほとんど無視できる程度であった。

今後、さらに精度を向上させるために本解析方法と

他の精度向上のための方法を併用することが必要であると思われる。

文 献

- (1) 結城, BEM における特異積分の高精度化・効率化, 境界要素法論文集, 5(1988).
- (2) 結城・佐藤, 2次元 BEM の特異積分の高精度化, 生産研究, 39-8 (1987), 351-354.
- (3) Hayami, K. and Brebbia, C. A. (Brebbia, C. A., Wendland, W. L. and Kuhn, G. 編), A New Coordinate Transformation Method for Singular and Near Singular Integrals over General Curved Boundary Elements, *Boundary Elements IX 2* (1987), 375-398, Springer-Verlag.
- (4) Koizumi, M. and Utamura, M. (Tanaka, M. and Brebbia, C. A. 編) A New Approach to Singular Kernel Integration for General Curved Elements, *Boundary Elements V III 2* (1986), 665-675, Springer-Verlag.
- (5) 仙波・谷・佐藤, 平面弾性ならびに熱弾性 BEM の高精度・高能率化について, 機論, 51-470, A (1985), 2384-2391.
- (6) 東町・江沢・岡本・相沢, 境界要素法による構造解析の高精度化と実用化, 機論, 51-468, A (1985), 1967-1972.
- (7) Jun, L., Beer, G. and Meek, L. (Brebbia, C. A., ほか 2 名編), The Application of Double Exponential Formulas in the Boundary Element Method, *Boundary Element V II*, (1985), 13-3~13-16, Springer-Verlag.
- (8) Lachat, J. C. and Watson, J. O., Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations, A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics, *Int. J. Num. Methods Eng.* 10(1976), 991-1005.
- (9) 木須・河原, 境界要素法の高精度化に関する研究, 機論, 55-514, B (1989), 1562-1568.
- (10) Weaver, J., Three-Dimensional Crack Analysis, *Int. J. Solids Struct.* 13 (1977), 321-330.
- (11) Ghosh, N., Rajiyah, H., Ghosh, S. and Mukherjee, S., A New Boundary Element Method Formulation for Linear Elasticity, *J. Appl. Mech.* 53(1986), 69-76.
- (12) 岸田・藤村, 三次元線形弾性境界値問題の一解法(間接仮想境界積分法), 機論, 48-427, A (1982), 358-366.
- (13) Hartmann, F. (Brebbia, C. A. 編), Elastostatics, *Progress in Boundary Element Methods*, 1, Chapter 4, (1981), 113, Pentech Press.
- (14) 松本・足立・角濱・福澤, 二次元境界要素法による動的応力集中係数の解析, 機論, 54-501, A (1988), 1024-1029.
- (15) Manolis, G. D. and Beskos, D. E., Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform, *Int. J. Num. Methods Eng.* 17 (1981), 573-599.
- (16) 松本・足立・吉田・宇治橋, 三次元境界要素法による動的応力集中係数の解析法, 機論, 55-514, A (1989), 1400-1406.
- (17) Manolis, G. D., Comparative Study on Three Boundary Element Methods Approaches to Problems in Elastodynamics, *Int. J. Num. Methods Eng.* 19(1983), 73-91.
- (18) Fun, Y. C., (大橋・村上・神谷訳), 固体の力学/理論, (1981), 417, 培風館.
- (19) 松本, 線形粘弾性体の衝撃応答(材料特性の同定法と応力解析とのリンケージ), 機論, 48-436, A (1982), 1475-1480.
- (20) Doyle, J. M., Integration of the Laplace Transformed Equations of Classical Elastokinetics, *J. Math. Analysis Appl.* 13(1966), 118-131.

- (21) Krings, W. and Waller, H., Contribution to the Numerical Treatment of Partial Differential Equations with the Laplace Transformation-An Application of the Algorithm of the Fast Fourier Transformation, *Int. J. Num. Methods Eng.* **14**(1979), 1183-1196.
 - (22) 吉田, τ -method による複素変数のベッセル関数 $K_n(z)$ の数値計算, 情報処理, **14**-8(1973), 569-575.
 - (23) 中原, 応用弾性学, (1980), 53, 実教出版.
 - (24) 例えば, 足立・宇治橋・松本, 水撃をうける有限長円筒殻の衝撃応答の解析, 機論, **51**-467, A, (1985), 1886-1892.
 - (25) 松本・中原, 内外面に等分布衝撃圧力を受ける有孔円板および円筒, 機論, **32**-237, A(1966), 709-717.
 - (26) Goodier, J. N. and Jahsman, W. E., Propagation of a Sudden Rotary Disturbance in an Elastic Plates, *J. Appl. Mech.* **23**(1956), 284-286.
-