動的非線形有限要素法における感度解析法の開発*

久田俊明*¹, 野口裕久*¹, 村山 修*²

Development of Sensitivity Analysis Method in Dynamic Nonlinear FEM

Toshiaki HISADA, Hirohisa NOGUCHI and Osamu MURAYAMA

An analysis method to evaluate the sensitivity of structural dynamic response is developed for nonlinear systems in the context of an implicit time integration scheme. The formulation originates in the perturbation method and retains its advantage. Namely, the decomposed effective stiffness matrix after the iteration for each time increment is efficiently used to compute the sensitivity of any parameter in the system. Because it allows the nonlinearity including load path dependency, the proposed method can be applied to a wide range of nonlinear finite element dynamic analyses. An elastic-plastic truss structure is solved to examine the validity of the method, and satisfactory results are obtained.

Key Words; Finite Element Method, Nonlinear Problem, Plasticity,
Computational Mechanics, Probabilistic Method, Dynamic Problem,
Sensitivity, Perturbation, Stochastic Finite Element Method

1. 緒言

本論文の目的は静的非線形有限要素法において成功を収めた筆者等の感度解析手法^{1),2),3)}を動的時刻歴解析へ拡張することにある。

動的時刻歴解析における直接時間積分法は主として陰解法 (implicit time integration method) と陽解法 (explicit time integration method) に大別される⁴⁾。陰解法は例えばHoubolt法、Newmark- β 法、Wilson- θ 法などとして広く知られるように、差分法や補間法に基づく近似的積分漸化公式を用いるものの、刻々の平衡条件が厳密に満たされるように運動方程式を解き進むものである。これに対し、陽解法は中央差分近似を用い、時刻 t_i での平衡条件式に基づき時刻 t_{i+1} での解を近似的に評価するものであり、時間ステップ Δt を非常に小さくとらねばならない反面、集中質量マトリックスが用いられる場合は連立1次方程式を解く必要がなくなるので、衝突解析などに活用される、やや特殊な方法である。本論文では以下、陰解法に限って議論を進める。

直接時間積分を陰解法によって行なう場合、上記のように刻々の運動方程式を解かねばならないが、非線形問題ではその過程で反復計算が必要となる。したがって有限要素法によって実用規模の問題を解析する際には、演算時間が大きな問題となる。

時刻歴解析における感度 (sensitivity) とは、構造応答を $x(t)$ 、系に関与する任意のパラメータ群を $b_i (i=1 \sim m)$ としたときの $\partial x(t)/\partial b_i$ であり、これがうまく評価されれば、それに基づき最適設計や信頼性解析への途も開けることになると思われる。しかし、上述のような演算時間上の問題を考慮したとき、パラメータの値を実際に僅かに Δb_i だけ変えて時刻歴解析を m 回繰り返し、直接差分的に $\Delta x(t)/\Delta b_i$ によって感度を求めることは実際的でないことが分かる。本論文ではこの問題を解決するための手法を提案する。

なお、周辺のこれまでになされて来た研究について述べると、静的線形有限要素法における感度解析とその確率論的応用に関連しては、Cambou⁵⁾、Handa-Anderson⁶⁾、中桐-久田⁷⁾、ほか多数の研究があり、線

* 原稿受付 平成2年5月29日。

¹⁾ 正員、東京大学先端科学技術研究センター (〒153 東京都目黒区駒場4-6-1)。²⁾ 学生員、東京大学大学院。

形固有値問題に関しては Fox-Kapoor⁹⁾、Collins-Thomson⁹⁾、Hasselman-Hart¹⁰⁾をはじめとする研究が国内外でなされている。しかし非線形有限要素法における感度解析とその応用についての研究はまだ歴史が浅く、静的問題については1985年のRyuらの方法¹¹⁾とその応用^{12),13)}、負荷経路依存性のある非線形問題一般に適用可能な著者らの方法^{12),13)}などが挙げられる程度である。そして動的な非線形問題の感度解析についてはLiuらの報告¹⁴⁾が唯一あるが、これは後述するように、上記のRyuらの静的問題に対する方法¹¹⁾を動的問題に拡張する定式化を試みたものであり、実際の解析結果としては陽解法を反復し、直接差分的に感度を算出したものしか示されていない現状にある。

2. 静的非線形問題における感度解析法の概要

本論文の主題である動的な非線形問題に対する感度解析手法を示す前に、本節では、その基礎をなす静的非線形問題の感度解析手法について概説する。

まず、静的非線形問題に対する Ryu ら¹¹⁾の感度解析手法は次のようである。即ち、平衡方程式

$$\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{Q}(\mathbf{b}, \mathbf{U}) = 0 \quad (1)$$

を系に含まれるパラメータ $\mathbf{b}$ で微分し

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{b}} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{b}} \quad (2)$$

とする。ここで $\mathbf{F}$ と $\mathbf{Q}$ は外力と内力、 $\mathbf{U}$ は変位を表す。式(2)で $\partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{U}$ は接線剛性マトリックスに相当するから、もしニュートン・ラプソン型のソルバーが用いられ、その前進消去が既に終わっているなら、感度 $d\mathbf{U} / d\mathbf{b}$ が効率良く求められる。しかしここで留意すべき点は、非線形問題では (i) 解が負荷経路に依存したり、また (ii) 場がパラメータに対して不連続に変化することもあるので、線形問題を単に拡張した式(2)の適用にはおのずから限界があるということである。例えば除荷を含む弾塑性問題に式(2)を適用することは困難であろう。

そこで著者らは新たな観点から非線形問題一般に適用可能な構造応答の感度評価のための定式化を以下のようにおこない、また三次元弾塑性解析、シェルの幾何学的非線形解析などを通じてその妥当性を検証した。^{12),13)}

非線形問題の支配方程式が

$$\mathbf{KdU} = d\mathbf{F} \quad (3)$$

の増分形で与えられる場合、変位解 $\mathbf{U}$ は最終荷重 $\mathbf{F}$ に至る負荷経路に依存するため、その経路に沿って

$d\mathbf{U}$ を積分することが厳密であるが、現実には $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \quad (4)$$

のように n 段階に分け、各負荷ステップ $\mathbf{F}_i$ に対して反復解析を実行することが、しばしば行なわれる。これは、ある小さな負荷ステップ $\mathbf{F}_i$ の間では負荷経路の差異は無視できるとみなしていることに相当していると思われる。この観点から次の等式

$$\int_{\mathbf{U}_{i-1}}^{\mathbf{U}_i} \mathbf{KdU} = \mathbf{F}_i \quad (5)$$

を近似的に置くことが可能であろう。つまり $\mathbf{F}_i$ が負荷される前後の変位を $\mathbf{U}_{i-1}$ および $\mathbf{U}_i$ としたとき、左辺の積分は変位経路によらず $\mathbf{F}_i$ を与えるとみなすわけである。なお、本論文での非線形有限要素法およびそれに基づく感度解析は、以上の前提が成り立つ場合に限るものとする。

ここでパラメータ b_j の変動 $\delta b_j (= \alpha b_j, |\alpha| \ll 1)$ を想定し、対応する接線剛性マトリックスを $\mathbf{K}_\alpha$ と表すことにすると、式(5)にならって $i = 1, 2, \dots, n$ に対して次式を得る。

$$\int_{\mathbf{U}_{i-1} + \Delta \mathbf{U}_{i-1}}^{\mathbf{U}_i + \Delta \mathbf{U}_i} \mathbf{K}_\alpha d\mathbf{U} = \mathbf{F}_i$$

または

$$\int_{\mathbf{U}_i}^{\mathbf{U}_i + \Delta \mathbf{U}_i} \mathbf{K}_\alpha d\mathbf{U} = - \int_{\mathbf{U}_{i-1} + \Delta \mathbf{U}_{i-1}}^{\mathbf{U}_i} \mathbf{K}_\alpha d\mathbf{U} + \mathbf{F}_i \quad (6)$$

ただし、 $\Delta \mathbf{U}_i$ は δb_j に起因する $\mathbf{U}_i$ の全変分、すなわち $\Delta \mathbf{U}_i = \delta \mathbf{U}_i +$ (高次項) である。また普通は $\mathbf{U}_0 = \Delta \mathbf{U}_0 = 0$ である。式(6)から、 α の一次項までを考慮して、次式が導かれる。但し $\mathbf{K}(\mathbf{U}_i)$ は変位解 $\mathbf{U}_i$ が得られた時点での基本系の接線剛性を表す。

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}_i) \delta \mathbf{U}_i = - \delta \mathbf{R}_i \quad (7)$$

または

$$\delta \mathbf{U}_i / \delta b_j = - \mathbf{K}(\mathbf{U}_i)^{-1} \delta \mathbf{R}_i / \delta b_j \quad (8)$$

ここで

$$\delta \mathbf{R}_i = \int_{\mathbf{U}_{i-1} + \delta \mathbf{U}_{i-1}}^{\mathbf{U}_i} \mathbf{K}_\alpha d\mathbf{U} - \mathbf{F}_i \quad (9)$$

なお $\mathbf{U}_{i-1} + \delta \mathbf{U}_{i-1}$ から $\mathbf{U}_i$ までの区間で $\mathbf{K}$ の一次変分 $\delta \mathbf{K}$ は常に存在するとは限らず、したがって式(9)を $\int \delta \mathbf{K} d\mathbf{U}$ のような形であらわすことはできない。上式を $i = 1, 2, \dots, n$ の順で解いていくことにより数値的に $\delta \mathbf{U}_1, \delta \mathbf{U}_2, \dots, \delta \mathbf{U}_n$ ひいては $\delta \mathbf{U}_i / \delta b_j = \partial \mathbf{U}_i / \partial b_j$, $\delta \mathbf{U}_2 / \delta b_j = \partial \mathbf{U}_2 / \partial b_j, \dots, \delta \mathbf{U}_n / \delta b_j = \partial \mathbf{U}_n / \partial b_j$ が連鎖的に求まる。もし非線形問題の反復解法としてニュートン・ラプソン法が用いられ、 $\delta b_j = 0$ の系(基本系)の変位 $\mathbf{U}_i$ における前進消去済の接線剛性マトリックスが求まっているなら、式(8)右辺の演算は極めて効率よく行

図1 負荷、除荷、負荷に対する弾塑性応答の履歴と本手法の原理

なえることになる。つまり、非線形方程式は基本系について一回解くだけでよく、その結果を利用して $\delta U / \delta b_j$ を求めることができる。図1は弾塑性問題において、負荷 F_1 、除荷 F_2 、負荷 F_3 が連続して与えられる場合の本手法の説明図である。式(7)右辺の δR_i および左辺に相当するベクトル 1 と 2 、 $1'$ と $2'$ 、 $1''$ と $2''$ をそれぞれ相殺する本手法の原理が理解できる。なお、説明は省くが、式(9)における接線剛性の積分は、例えば弾塑性問題の場合、ラジアルリターンなどの通常の積分のルーチンを用いて計算することができる¹⁾。

3. 動的非線形問題における感度解析手法の開発

緒言で述べたように、動的非線形問題に対する感度解析はこれまでのところ唯一、Liuら¹⁴⁾によって式(2)を拡張することにより試みられている。しかし前節で述べたように、その方法は負荷経路依存性のあるような場合も含めた非線形問題一般には適用可能ではない。実際その報告ではパラメータを変えて陽解法を反復し、直接的に解の差分をとることで感度を求め、その後確率的な処理を施した弾塑性トラス構造の解析結果が示されているに過ぎない。このような実情に鑑み、前節で概要を述べた筆者らの静的非線形問題に対する一般的な手法を以下のように動的問題へと拡張する。

動的問題における運動方程式は次式で与えられる。

$$M\ddot{U}_i + Q_i = \sum_{l=1}^i F_l \quad (10)$$

ここで $\ddot{U}_i$ と Q_i は第 i 負荷ステップ後の加速度と内力ベクトルである。内力 Q_i は、接線型の減衰と剛性が与えられる場合、次のように表される。

$$Q_i = \sum_{l=1}^i \left(\int_{\dot{U}_{l-1}}^{\dot{U}_l} C d\dot{U} + \int_{U_{l-1}}^{U_l} K dU \right) \quad (11)$$

K は、これまでも述べて来たように負荷履歴に依存することがあるので、上式のように履歴に対応した積分を繰り返して和をとる必要があるが、 C については、もしヒステリシスを描かないなら、単に $\dot{U}_0$ から $\dot{U}_i$ までの1回の積分で代用される。

陰解法による非線形系の直接時間積分においては、次式で示されるような反復を $\bar{\Delta U}_i^{(k)}$, $\bar{\Delta U}_i^{(k)}$, $\bar{\Delta U}_i^{(k)}$ が十分小さくなるまで行なう。

$$M\ddot{U}_i^{(k)} + C\bar{\Delta U}_i^{(k)} + K\bar{\Delta U}_i^{(k)} = \sum_{l=1}^i F_l - Q_i^{(k-1)} \quad (12)$$

$$U_i^{(k)} = U_i^{(k-1)} + \bar{\Delta U}_i^{(k)} \quad (13)$$

$$\dot{U}_i^{(k)} = \dot{U}_i^{(k-1)} + \bar{\Delta \dot{U}}_i^{(k)} \quad (14)$$

$$\ddot{U}_i^{(k)} = \ddot{U}_i^{(k-1)} + \bar{\Delta \ddot{U}}_i^{(k)} \quad (15)$$

次に式(10)に対応する摂動系の運動方程式は次式で与えられる。

$$M_\alpha (\ddot{U}_i + \Delta \ddot{U}_i) + Q_{\alpha i} = \sum_{l=1}^i F_{\alpha l} \quad (16)$$

ここで $\Delta \ddot{U}_i$ は系に含まれるパラメータの摂動 δb_j に起因して生じる応答加速度の全変分である。

式(11)に基づき、摂動系の内力 $Q_{\alpha i}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Q_{\alpha i} &= \sum_{l=1}^i \left(\int_{\dot{U}_{l-1} + \Delta \dot{U}_{l-1}}^{\dot{U}_l + \Delta \dot{U}_l} C_\alpha d\dot{U} + \int_{U_{l-1} + \Delta U_{l-1}}^{U_l + \Delta U_l} K_\alpha dU \right) \\ &= \sum_{l=1}^{i-1} \left(\int_{\dot{U}_{l-1} + \Delta \dot{U}_{l-1}}^{\dot{U}_l + \Delta \dot{U}_l} C_\alpha d\dot{U} + \int_{U_{l-1} + \Delta U_{l-1}}^{U_l + \Delta U_l} K_\alpha dU \right) \\ &\quad + \int_{\dot{U}_{i-1} + \Delta \dot{U}_{i-1}}^{\dot{U}_i} C_\alpha d\dot{U} + \int_{U_{i-1} + \Delta U_{i-1}}^{U_i} K_\alpha dU \\ &\quad + \int_{\dot{U}_i}^{\dot{U}_i + \Delta \dot{U}_i} C_\alpha d\dot{U} + \int_{U_i}^{U_i + \Delta U_i} K_\alpha dU \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)を式(16)に代入し、前節の静的問題にならって1次変分項をとると次のようになる。

$$\mathbf{M} \delta \ddot{\mathbf{U}}_i + \mathbf{C} \delta \dot{\mathbf{U}}_i + \mathbf{K} \delta \mathbf{U}_i = -\delta \mathbf{R}_i \quad (18)$$

$$\delta \mathbf{R}_i = \sum_{l=1}^{i-1} \left(\int_{\dot{\mathbf{U}}_{l-1} + \delta \dot{\mathbf{U}}_{l-1}}^{\dot{\mathbf{U}}_l + \delta \dot{\mathbf{U}}_l} \mathbf{C}_\alpha d\dot{\mathbf{U}} + \int_{\mathbf{U}_{l-1} + \delta \mathbf{U}_{l-1}}^{\mathbf{U}_l + \delta \mathbf{U}_l} \mathbf{K}_\alpha d\mathbf{U} \right) + \int_{\dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \delta \dot{\mathbf{U}}_{i-1}}^{\dot{\mathbf{U}}_i} \mathbf{C}_\alpha d\dot{\mathbf{U}} + \int_{\mathbf{U}_{i-1} + \delta \mathbf{U}_{i-1}}^{\mathbf{U}_i} \mathbf{K}_\alpha d\mathbf{U} - \sum_{l=1}^i \mathbf{F}_{\alpha l} + \mathbf{M}_\alpha \ddot{\mathbf{U}}_i \quad (19)$$

さて、直接時間積分法としては、本手法との組み合わせの観点からは、どの手法を用いても構わないが、ここでは代表的陰解法の1つである Newmark- β 法を使う場合についての定式化を示す。すなわち、速度と変位について次式を仮定する。

$$\dot{\mathbf{U}}_i^{(k)} = \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \dot{\mathbf{U}}_i^{(k)}) \Delta t \quad (20)$$

$$\mathbf{U}_i^{(k)} = \mathbf{U}_{i-1} + \dot{\mathbf{U}}_{i-1} \Delta t + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \beta \dot{\mathbf{U}}_i^{(k)} \right\} \Delta t^2 \quad (21)$$

ここで Δt は時刻歴積分における時間ステップである。また右肩の (k) は第 k 回目の反復を意味する。パラメータの摂動 δb_j に起因する式(20)、(21)の1次変分は次式で与えられる。

$$\delta \dot{\mathbf{U}}_i = \delta \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \frac{1}{2} (\delta \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \delta \dot{\mathbf{U}}_i) \Delta t \quad (22)$$

$$\delta \mathbf{U}_i = \delta \mathbf{U}_{i-1} + \delta \dot{\mathbf{U}}_{i-1} \Delta t + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \delta \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \beta \delta \dot{\mathbf{U}}_i \right\} \Delta t^2 \quad (23)$$

式(22)、(23)を式(18)に代入し、加速度変分 $\delta \ddot{\mathbf{U}}_i$ のみを未知量とする次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \right) \delta \ddot{\mathbf{U}}_i \\ &= -\delta \mathbf{R}_i - \mathbf{C} \left(\delta \dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta t \delta \ddot{\mathbf{U}}_{i-1} \right) \\ & \quad - \mathbf{K} \left\{ \delta \mathbf{U}_{i-1} + \delta \dot{\mathbf{U}}_{i-1} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \delta \ddot{\mathbf{U}}_{i-1} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

上式における実効的な剛性マトリックス

$(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \equiv \mathbf{K}^*$ は基本系 ($\delta b_j = 0$) でのそれに等しい。従って、基本系における反復解析にニュートン・ラプソン型のソルバーが用いられ、収束解に対応する $\mathbf{K}^*$ の前進分解が行なわれているなら、それを用いて効率良く $\delta \ddot{\mathbf{U}}_i$ 、ひいては式(22)、(23)から $\delta \dot{\mathbf{U}}_i$ 、 $\delta \mathbf{U}_i$ が評価できることになる。この利点は静的解析の場合と全く同様である。以上のように求められた $\delta \dot{\mathbf{U}}_i$ 、 $\delta \mathbf{U}_i$ を δb_j で割ることにより、近似的な感度が刻々と求められることになる。

4. 数値例と結果の検証

前節で定式化した新たな感度解析手法の妥当性を検証するため、図2に示すような弾塑性トラス構造を例にとり数値計算を行なった。負荷条件を含む諸元も図中に併記されている。なお、塑性域に入る要素は要素1, 3, 7, 8の4つである。基本系についての解析結果の代表例として、節点2の垂直方向変位 V_2 、および最も大きい引張応力が加わる要素7の応力 σ_7 の時刻 $t=0.5$ [sec] までの応答を図3, 4に示す。

次に、前節での定式化に基づく代表的感度解析結果を図5～8にまとめる。

まず、図5は要素1, 7の降伏応力 σ_{y1} , σ_{y7} に対する V_2 の感度を示す。ただし、以後の解析結果を含め、感度は $\partial V_2 / \partial \sigma_n$ そのものではなく、変数を $\sigma_{yi}(1 + \alpha_{\sigma_n})$ と与えたときの α_{σ_n} に対する感度、すなわち $\partial V_2 / \partial \alpha_{\sigma_n}$ の形で表示する。このような、いわばパラメータの変動率に対する感度の表示を用いることにより、異なるパラメータに対する感度を直接比較することが可能となる。なお、図には描かれていないが $\partial V_2 / \partial \alpha_{\sigma_{y3}}$ と $\partial V_2 / \partial \alpha_{\sigma_{y8}}$ についてはそれぞれ $\partial V_2 / \partial \alpha_{\sigma_{y1}}$, $\partial V_2 / \partial \alpha_{\sigma_{y7}}$ とは

Young's modulus	$E = 200$ [GPa]
Tangent modulus	$E_T = 2$ [GPa]
Yield stress	$\sigma_y = 100$ [MPa]
Sectional area	$A = 3600$ [mm ²]
Mass density	$\rho = 0.008$ [g/mm ³]

図2 弾塑性トラス構造と諸元

とんどの結果が得られた。この解析によって、感度が負になっていることから降伏応力が大きい材料を使うことにより V_2 を低減できることがわかる。また、このとき、より大きな応力が加わる要素7,8に対する感度が要素1,3に対する感度より大きいという予想通りの結果が得られている。

次に、図6は要素1,2,7の断面積 A_1 , A_2 , A_7 に対する V_2 の感度を示す。 $\partial V_2/\partial \alpha_{A_3}$ は $\partial V_2/\partial \alpha_{A_1}$ と、 $\partial V_2/\partial \alpha_{A_8}$ は $\partial V_2/\partial \alpha_{A_7}$ とほとんど同じ結果であり、それ以外の要素4,5,6,9,10については $\partial V_2/\partial \alpha_{A_2}$ と同様に感度がほぼ零となっている。図5では省略したが、降伏しない要素2,4,5,6,9,10の σ_y に対する V_2 の感度は当然のことながら零であったので、図5と6は定性的には類似の傾向を示していることになる。このことは、ある要素の断面積が変化することによる影響はその要素が降伏した後に強く現われることを示唆している。

図7は要素7,8の降伏応力に対する σ_y の感度を、

図8は要素3,7,8の断面積に対する σ_y の感度を示す。図7で、相対的に $\partial \sigma_7/\partial \alpha_{\sigma_{y8}}$ が負の、 $\partial \sigma_7/\partial \alpha_{\sigma_{y7}}$ が正の値を取る傾向にあることは興味深い。なぜなら、前者については直観的にも納得できるが、後者については、最も厳しい条件化にある要素7の応力を低減するためには、その要素自身に降伏応力の低い材料を使用すればよい可能性のあることを示しているからである。

また、図8で、 σ_y が最大値をとる $t=0.228$ [sec] 付近での $\partial \sigma_7/\partial \alpha_{A_3}$ もまた正である。これは要素7の最大応力を低減するためには要素3の断面積を小さくすればよいことを示している。直感では推定が困難なこの種の知見を定量的に提示できることが、このような感度解析の1つの意義であろう。

以上の感度解析を行なうに当たっては、前節での説明から分かるように、具体的に微小な $\delta b_i = \alpha b_i$ の値を与えて計算を行なう必要があり、実際図5～8の解析結果は $\alpha=10^{-6}$ を用いて得られたものである。静的解析においては、この α の値の設定は解析結果の感度に十分

図3 節点2の垂直方向変位の時刻歴応答

図4 要素7の応力の時刻歴応答

図5 降伏応力に対する節点2の垂直方向変位の感度

図6 断面積に対する節点2の垂直方向変位の感度

図7 降伏応力に対する要素7の応力の感度

図8 断面積に対する要素7の応力の感度

鈍感であることがすでに確認されているが^{1),2),3)}、本研究においても α の値を 10^1 から 10^{13} まで変化させて図 5～8 の解析結果に及ぼす影響を調べてみた。その結果、図上で比較するかぎりでは 10^3 から 10^{12} までの範囲の α の変化に対しては全く影響を受けず、一方数値で比較しても実用上満足すべき結果を得た。ただし $10^1, 10^2$ については誤差が大きく、 10^{12} より小さい α では計算中に桁落ちが起きるため、やはり正しい感度を求めることはできなかった。なお、以上の計算はすべて倍精度で行なっている。参考のため、図 8 の $t=0.228$ [sec] における感度について数値で比較した結果を表 1 に示す。

最後に図 5～8 の感度解析結果と、実際にパラメータの値を僅かに変えて解析を繰り返し、結果の差をとることによって差分的に求めた感度（直接差分分解）とを比較してみた。その結果、少なくとも図上で比較する限り全く同一の解を得、また、数値で比較してみても、一例として図 8 の $t=0.099, 0.228, 0.300$ [sec] における感度 ($\alpha=10^6$) について表 2 に示されるように、良好な一致を見た。なお、本表の直接差分分解はパラメ

表 1 α の変化に対する感度の変化

α	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_3}$	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_7}$	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_8}$
10^1	-6.1700×10^2	-5.0354×10^2	-1.5193×10^1
10^2	5.8579×10^1	-1.3562×10^2	-5.8605×10^1
10^3	3.8069×10^1	-1.3900×10^2	-9.2066×10^1
10^6	3.8080×10^1	-1.3900×10^2	-9.2066×10^1
10^9	3.8080×10^1	-1.3900×10^2	-9.2066×10^1
10^{12}	3.8147×10^1	-1.3903×10^2	-9.2030×10^1
10^{13}	3.7849×10^1	-1.3858×10^2	-9.1791×10^1

単位 [MPa]

表 2 直接差分分解との比較

t [sec]		本手法による解	直接差分分解
0.099	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_3}$	-1.4484×10^0	-1.4484×10^0
	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_7}$	-1.7895×10^1	-1.7895×10^1
	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_8}$	-1.9218×10^1	-1.9218×10^1
0.228	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_3}$	3.8080×10^1	3.8080×10^1
	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_7}$	-1.3900×10^2	-1.3900×10^2
	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_8}$	-9.2066×10^1	-9.2066×10^1
0.300	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_3}$	3.3455×10^2	3.3455×10^2
	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_7}$	-4.1584×10^2	-4.1583×10^2
	$\partial\sigma_1/\partial\alpha_{A_8}$	-2.4353×10^2	-2.4354×10^2

単位 [MPa]

ータの変化量を $\Delta b_j = b_j \times 10^5$ と与えたときのものである。直接差分分解を求めるにあたっては Δb_j の値が十分小さいことを確認する必要があるが、本例については $\Delta b_j \leq b_j \times 10^4$ であれば直接差分分解の相対誤差は 10^5 未満に収束していた。これにより本手法の妥当性が確認された。

5. 結言

本論文では非線形系の動的時刻歴解析に適用可能な感度解析の手法を新たに提案し、数値解析例を通じてその妥当性を確認した。本手法によれば、直接時間積分の陰解法にニュートン・ラブソン型のソルバーが用いられる場合、前進分解された実効的剛性マトリックスをもとに、新たに解析をし直すことなく効率良く任意パラメータに対する構造応答の感度の時刻歴を求めることができる。また、本手法は負荷経路依存性のある弾塑性問題を含む非線形問題に広く応用できる。ただし、本論文における数値計算例は簡単なモデルに関するものであり、今後実用規模の問題を通じて本手法の妥当性をさらに検証し、また演算効率を定量的に論じたいと考える。

本研究の一部は、文部省科学研究費補助金（一般研究 B、No. 01460093）によって行なわれた。

文 献

- (1) Hisada, T. and Noguchi, H., Proc. ASME PVP Conference, Vol. 177, (1989), 175.
- (2) Hisada, T. and Noguchi, H., Proc. 5th Int. Conference on Structural Safety and Reliability, (1989), 1097.
- (3) 久田, 機論, 56-524, (平 2), 957.
- (4) 例えば、Bathe, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, (1982), 499, Prentice-Hall
- (5) Cambou, B., Proc. 2nd Int. Conference on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, (1975), 67.
- (6) Handa, K. and Anderson, K., Proc. 3rd Int. Conference on Structural Safety and Reliability, (1981), 409.
- (7) Hisada, T. and Nakagiri, S., ibid, 395.
- (8) Fox, R.L. and Kapoor, M.P., AIAA Journal, 6-12, (1968), 2426.
- (9) Collins, J.D. and Thomson, W.T., AIAA Journal, 7-4, (1969), 642.

- (10) Hasselman T.K. and Hart, G.C., J. Engineering Mechanics Division, Proc. the ASCE, 98-EM3, 561
- (11) Ryu, Y.S. 他 2 名, Computers and Structures, Vol. 21, No. 1/2, (1985), 245.
- (12) Liu, W-K., 他 2 名, Proc. ASME PVP Conference, 98-5, (1985) ,243.
- (13) Liu, P-L. and Der Kiureghian, A., Proc. 5th Int. Conference on Structural Safety and Reliability, (1989) , 1081.
- (14) Liu, W-K., 他 2 名, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.56, (1986), 61.
-