半無限板の V 形切欠先端における特異応力場*

陳 玳 珩^{*1}, 西 谷 弘 信^{*2}

Singular Stress Fields near the Tip of a V-Notch in a Semi-Infinite Plate

Dai-heng CHEN and Hironobu NISITANI

The stress fields near the tip of a V-notch have singularities. The order of the stress singularity is dependent on the deformation mode. For the I deformation, the stress singularity is $1/r^{1-\lambda_1}$, and for the mode II deformation, it is $1/r^{1-\lambda_2}$. Thus, the stress fields around the singular point must be described in terms of two pairs of constants $\lambda_1, K_{I,\lambda_1}$ and $\lambda_2, K_{II,\lambda_2}$. Therefore, such numerical stress analysis, in which neither of the stress singularities is taken into account or only one stress singularity is taken into account, are generally not effective. In this study, a new method is presented for analyzing the problem of the V-notch in a semi-infinite plate. In this method, the two singular stress fields are taken into account at the same time, and the parameters K_{I,λ_1} and K_{II,λ_2} are determined by the solutions of the equations. This method is also applicable to the problem of a composite plate because the stress singularity at the corner of the composite plate is essentially the same one as in the present problem.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Stress Concentration, Notch, Semi-Infinite Plate

1. 緒 言

複合材料の強度評価を行う際には、強化材と母材の異材境界の角部での応力分布を知る必要がある。このような角部では、材料および形状の不連続のため、応力の分布には特異性が生じる。特異性を有する問題に数値解析の手法を適用する場合、特異性を考慮した計算法が必要となる。例えば、き裂問題の数値解析にあたっては、有限要素法や境界要素法などの数値解法では、き裂先端の応力特異性を考慮した種々の手法が提案されている。このような応力特異性はき裂問題では一つの指数、 $1/2$ 、だけで規定されるが、異材境界の角部では一つの指数だけでは規定されない。著者らのさきの研究⁽¹⁾によれば、異材境界の角部では、モード I とモード II の変形による応力特異場の指数は異なる。したがってこのような応力特異場を求めるためには、指数が異なる二つの特異応力を同時に考慮する必要がある。

本研究では、そのような計算手法を開発するため、最も単純な異材境界の例として、V 形切欠きの問題を

とりあげ、図 1 に示すような、半無限板の V 形切欠先端での応力場の数値解析を行う。

2. V 形切欠きの頂角近傍での応力場

著者らはさきに、接合異材の角部近傍での応力場について、固有関数展開を用いて、応力の一般式を導いた⁽¹⁾。

両縁応力自由の V 形切欠きの問題は、横弾性定数 $G_2=0$ の材料と接合される場合の接合異材の問題とみなすことができる。したがって、V 形切欠きの頂角近傍での応力場は、さきの研究結果によれば、モード I

図 1 半無限板の V 形切欠き

* 平成 2 年 9 月 14 日 第 68 期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成 2 年 10 月 25 日。

^{*1} 正員、九州工業大学情報工学部(〒820 飯塚市大字川津680-4)。

^{*2} 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

の変形に対して $1/r^{1-\lambda_1}$ 、モード II の変形に対して $1/r^{1-\lambda_2}$ の特異性をもつ形で、二つのパラメータ K_{I,λ_1} と K_{II,λ_2} により一義的に記述できる(座標軸については図 2 参照)。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= f_x^I(\theta) \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} + f_x^{II}(\theta) \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} \\ &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ [2\sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\} - \lambda_1 \sin\{\alpha - \lambda_1(\alpha-\pi)\} - \sin(\lambda_1\pi)] \cos(\lambda_1-1)\theta - (\lambda_1-1) \right. \\ &\quad \times \sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\} \cos(\lambda_1-3)\theta \left. \right\} \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ [2\sin\{\lambda_2(\alpha-\pi)\} - \lambda_2 \sin\{\alpha - \lambda_2(\alpha-\pi)\} + \sin(\lambda_2\pi)] \right. \\ &\quad \times \sin(\lambda_2-1)\theta - (\lambda_2-1) \sin\{\lambda_2(\alpha-\pi)\} \sin(\lambda_2-3)\theta \left. \right\} \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} \\ \sigma_y &= f_y^I(\theta) \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} + f_y^{II}(\theta) \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} \\ &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ [2\sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\} + \lambda_1 \sin\{\alpha - \lambda_1(\alpha-\pi)\} + \sin(\lambda_1\pi)] \times \cos(\lambda_1-1)\theta + (\lambda_1-1) \right. \\ &\quad \times \sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\} \cos(\lambda_1-3)\theta \left. \right\} \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ [2\sin\{\lambda_2(\alpha-\pi)\} + \lambda_2 \sin\{\alpha - \lambda_2(\alpha-\pi)\} - \sin(\lambda_2\pi)] \right. \\ &\quad \times \sin(\lambda_2-1)\theta + (\lambda_2-1) \sin\{\lambda_2(\alpha-\pi)\} \sin(\lambda_2-3)\theta \left. \right\} \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} \\ \tau_{xy} &= f_{xy}^I(\theta) \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} + f_{xy}^{II}(\theta) \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ [\lambda_1 \sin\{\alpha - \lambda_1(\alpha-\pi)\} + \sin(\lambda_1\pi)] \right. \\ &\quad \times \sin(\lambda_1-1)\theta + (\lambda_1-1) \sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\} \sin(\lambda_1-3)\theta \left. \right\} \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ [\lambda_2 \sin\{\alpha - \lambda_2(\alpha-\pi)\} - \sin(\lambda_2\pi)] \right. \\ &\quad \times \cos(\lambda_2-1)\theta + (\lambda_2-1) \sin\{\lambda_2(\alpha-\pi)\} \cos(\lambda_2-3)\theta \left. \right\} \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

λ_1 と λ_2 は、それぞれモード I とモード II の変形に関係するものであり、次の特性方程式(2)と(3)の根である⁽²⁾⁽³⁾。

$$\text{対称な場合: } \sin(\lambda_1\alpha) = -\lambda_1 \sin\alpha \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{逆対称な場合: } \sin(\lambda_2\alpha) = \lambda_2 \sin\alpha \dots\dots\dots (3)$$

図 3 にその根と α の関係を示す。

式(1)中の $f_{ij}^I(\theta)$ 、 $f_{ij}^{II}(\theta)$ はそれぞれの変形様式および応力成分によって定まる θ の関数である。

以上からわかるように、V形切欠頂角での応力特異場を知るためには、二組のパラメータ λ_1 、 K_{I,λ_1} と λ_2 、 K_{II,λ_2} を求めればよいことになる。ここで、特に注意しておきたいのは、き裂の場合と異なって、応力特異性の指数が変形モードにも関係することである。すなわち、同一 V 形切欠きであっても、モード I およびモード II に対する応力特異性の指数はそれぞれ λ_1-1 および λ_2-1 となり互いに異なっている。

図 2 V 形切欠きの頂角近傍

図 3 V 形切欠頂角での応力特異性の指数と頂角 α との関係

(a) 切欠きを有する半無限板 (b) 切欠きのない半無限板

図 4 体積力法の基本原則

3. 数値解析方法

用いる基本的数値解析方法は体積力法⁽⁴⁾である。

体積力法の原理によれば、図4(a)の切欠きを有する半無限板中の応力場は、図4(b)のように、切欠きのない半無限板中に、適当な体積力を切欠きの縁に相当する仮想境界上に分布させることによって作られる。したがって、図4(a)の応力場を求めるため、切欠きの縁における応力自由の境界条件が満足されるように、図4(b)の仮想境界上分布させるべき体積力の密度を求めればよい。ただし、応力の特異性が生じている問題であるので、離散化数値解析によって解析を行う際、切欠先端付近では、体積力の密度を、重み関数と、応力の特異性を代表する基本密度関数との積で表わさなければならない**。

基本密度関数を導入するため、図4を別の観点から眺めてみよう。図5は、図4をはめ合わせの問題とみなす場合の頂角近傍の様子を示すものである。図5からわかるように、V形切欠きと全く同じ形をもつくさび(b)を考えて、そのくさびに適当な表面力を分布させ、V形切欠き(a)の縁変位と全く同じ表面変位を生じさせれば、そのくさびはちょうどすきまなくV形切欠き(a)に嵌まることになり切欠きのない弾性体

図5 仮想境界上に分布させるべき体積力の物理的意味

(c)が得られる。このことは、体積力法で求めようとする、仮想境界上に分布させるべき体積力が、図5(b)のくさびの縁に作用させるべき表面力であることを意味している。したがって、体積力の基本密度関数を以下のようにして定義することができる。

一般の変形はモードIとIIの変形の合成したものとみなせるので、ここではそれらを別々に議論する。

モードIの変形に対し、V形切欠きの先端付近での縁変位 u_r , u_θ は、式(1)中のパラメータ K_{I,λ_1} を用いて次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= r^{\lambda_1} \frac{(k+1)(\cos\lambda_1\alpha + \cos\alpha)\sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\}}{2\sqrt{2\pi}\cos\left\{\frac{\alpha(\lambda_1+1)}{2}\right\}} K_{I,\lambda_1} \\ 2Gu_\theta &= r^{\lambda_1} \frac{\{(k-1)\sin\lambda_1\alpha - (k+2\lambda_1+1)\sin\alpha\}\sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\}}{2\sqrt{2\pi}\cos\left\{\frac{\alpha(\lambda_1+1)}{2}\right\}} K_{I,\lambda_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

このような表面変化を、図5(b)のくさび縁に生じさせるのに必要な表面力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= r^{\lambda_1-1} \cdot \left\{ \frac{\lambda_1 \left[\frac{2Gu_r}{r^{\lambda_1}} \{ (k-1)\sin(2\lambda_1\pi - \lambda_1\alpha) + (k+2\lambda_1+1)\sin\alpha \} + \frac{2Gu_\theta}{r^{\lambda_1}} (k+1) \{ \cos(2\lambda_1\pi - \lambda_1\alpha) + (\cos\alpha) \} \right]}{-2\{k\sin(2\lambda_1\pi - \lambda_1\alpha) + \lambda_1\sin\alpha\}} \right\} \\ \tau_{r\theta} &= r^{\lambda_1-1} \cdot \left\{ \frac{\lambda_1 \left[\frac{2Gu_r}{r^{\lambda_1}} (k+1) \{ \cos(2\lambda_1\pi - \lambda_1\alpha) - \cos\alpha \} + \frac{2Gu_\theta}{r^{\lambda_1}} \{ -(k-1)\sin(2\lambda_1\pi - \lambda_1\alpha) + (k-2\lambda_1+1)\sin\alpha \} \right]}{-2\{k\sin(2\lambda_1\pi - \lambda_1\alpha) + \lambda_1\sin\alpha\}} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

であり、 r^{λ_1-1} の特異性をもつ。したがって、モードIの変形による応力特異場を表現するためには、切欠きとなるべき上下の仮想境界に分布させるべき体積力を、図6(a)に示すように一つのペアとして考え、その r 方向と θ 方向の密度を次式

$$F_\theta^I(r) = W_\theta^I(r) \cdot r^{\lambda_1-1}, \quad F_r^I(r) = W_r^I(r) \cdot r^{\lambda_1-1} \dots\dots\dots (6)$$

のように仮定すればよい。離散化数値解析で求めるのは、体積力密度 $F_\theta^I(r)$, $F_r^I(r)$ そのものではなく、式(6)中の基本密度関数 r^{λ_1-1} にかけるべき重み関数 $W_\theta^I(r)$, $W_r^I(r)$ の値である。その重み関数は切欠先端付近での変化が緩やかとなるので、高精度な解析が可能となる。また、この際、特異応力場の強さを表すパラメータ K_{I,λ_1} は、切欠先端

** その理由は、き裂問題の数値解析における体積力法の基本密度関数⁽⁵⁾の考え方と基本的に同様である。

図 6 切欠きの上, 下両縁に分布させる体積力を一つのペアとして考える

における重みの値 $W_r^I(0)$ または $W_\theta^I(0)$ から次のように求まる。

$$K_{I,\lambda_1} = \frac{-4\sqrt{2\pi}(km_3 + \lambda_1 m_1) \cos\left\{\frac{\alpha(\lambda_1+1)}{2}\right\}}{\lambda_1(k+1)\sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\}[(l_1+l_2)\{(k-1)m_3 + (k+2\lambda_1+1)m_1\} + (l_1+l_3)\{(k-1)m_2 - (k+2\lambda_1+1)m_1\}]} \\ \times W_\theta^I(0) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$K_{I,\lambda_1} = \frac{-4\sqrt{2\pi}(km_3 + \lambda_1 m_1) \cos\left\{\frac{\alpha(\lambda_1+1)}{2}\right\}}{\lambda_1 \sin\{\lambda_1(\alpha-\pi)\}[(k+1)^2(l_1+l_2)(l_3-l_1) - \{(k-1)m_2 - (k+2\lambda_1+1)m_1\}\{(k-1)m_3 + (k-2\lambda_1+1)m_1\}]} \\ \times W_r^I(0) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos\alpha, \quad l_2 = \cos\lambda_1\alpha, \quad l_3 = \cos(2\lambda_1\pi - \lambda_1\alpha) \\ m_1 &= \sin\alpha, \quad m_2 = \sin\lambda_1\alpha, \quad m_3 = \sin(2\lambda_1\pi - \lambda_1\alpha) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

同様に、モード II の変形による応力特異場を表現するためには、切欠きとなるべき上下の仮想境界に分布させる体積力を、図 6(b) のように一つのペアとして考え、その r 方向と θ 方向の密度を次式

$$F_\theta^{II}(r) = W_\theta^{II}(r) \cdot r^{\lambda_2-1}, \quad F_r^{II}(r) = W_r^{II}(r) \cdot r^{\lambda_2-1} \quad \dots\dots\dots (10)$$

のように仮定すればよい。この際、式(1)中のパラメータ K_{II,λ_2} は、切欠先端における重みの値 $W_\theta^{II}(0)$ または $W_r^{II}(0)$ から次のように求まる。

$$K_{II,\lambda_2} = \frac{4\sqrt{2\pi}(km_5 - \lambda_2 m_1) \sin\left\{\frac{\alpha(\lambda_2+1)}{2}\right\}}{\lambda_2(k+1)\sin\{\lambda_2(\alpha-\pi)\}[(l_1-l_4)\{(1-k)m_5 + (k+2\lambda_2+1)m_1\} - (l_5-l_1)\{(1-k)m_4 - (k+2\lambda_2+1)m_1\}]} \\ \times W_\theta^{II}(0) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$K_{II,\lambda_2} = \frac{4\sqrt{2\pi}(km_5 - \lambda_2 m_1) \sin\left\{\frac{\alpha(\lambda_2+1)}{2}\right\}}{\lambda_2 \sin\{\lambda_2(\alpha-\pi)\}[(k+1)^2(l_4-l_1)(l_5+l_1) + \{(1-k)m_4 - (k+2\lambda_2+1)m_1\}\{(k-1)m_5 + (k-2\lambda_2+1)m_1\}]} \\ \times W_r^{II}(0) \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos\alpha, \quad l_4 = \cos\lambda_2\alpha, \quad l_5 = \cos(2\lambda_2\pi - \lambda_2\alpha) \\ m_1 &= \sin\alpha, \quad m_4 = \sin\lambda_2\alpha, \quad m_5 = \sin(2\lambda_2\pi - \lambda_2\alpha) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

結局、切欠先端付近の区間では、体積力の密度を次式

$$\begin{aligned} F_\theta(r) &= W_\theta^I(r)r^{\lambda_1-1} + W_\theta^{II}(r)r^{\lambda_2-1} \\ F_r(r) &= W_r^I(r)r^{\lambda_1-1} + W_r^{II}(r)r^{\lambda_2-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

のように仮定したときの重みを未知数とし、それ以外の区間では、体積力密度そのものを未知数とする。

具体的数値解析を行う際には、切欠きの縁を $2n$ 個の区間に分割し、各区間における未知の関数(先端付

近の区間では式(14)の重み関数、それ以外の区間では体積力密度そのものを)を折れ線関数で近似する。そして、半無限板に集中力が作用するときの応力場を基本解として、切欠きの両縁における応力自由の境界条件が満足されるように各区間における未知数を求める。

4. 解析結果

切欠先端における応力特異場を表すパラメータ K_{I,λ_1} と K_{II,λ_2} は、先端点 ($r=0$) における重みの値 $W_\theta^I(0)$ と $W_\theta^{II}(0)$ から求まる [式(7), (11)] が、 $W_r^I(0)$ と $W_r^{II}(0)$ から求めることもできる [式(8), (12)]。有限な分割による数値解析の誤差をのぞけば、両者による K_{I,λ_1} と K_{II,λ_2} の値はそれぞれ一致するはずである。そ

これらの値が一致するかどうかをみることは、本法の有効性を理解する一つの間接的な手段と考えられる。図7に、 $\gamma=60^\circ$, $\beta=0^\circ$ の切欠きにおける K_{I,λ_1} の値と分割数 n との関係を示す。 $W_0^I(0)$ と $W_r^I(0)$ から計算されたそれぞれの K_{I,λ_1} の値(図中の○と●)は、生の値でも、3けたまで互いに一致している。また、それらの誤差は、いずれも $1/n$ に比例し、直線外そう性がよい。両者の $n=40, 100$ からの外そう値は、図7に示すように、ほとんど一致している。このことから、本解析

表1 計算結果

$$(F_{I,\lambda_1} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{\sigma^\infty \sqrt{\pi l^{1-\lambda_1}}}, F_{II,\lambda_2} = \frac{K_{II,\lambda_2}}{\sigma^\infty \sqrt{\pi l^{1-\lambda_2}}})$$

γ	β	F_{I,λ_1}	F_{II,λ_2}
0° ($\lambda_1=0.500$ $\lambda_2=0.500$)	0°	1.122	0.000
	5°	1.118	0.060
	15°	1.088	0.177
	30°	0.989	0.329
	45°	0.838	0.433
30° ($\lambda_1=0.501$ $\lambda_2=0.598$)	0°	1.148	0.000
	5°	1.140	0.075
	15°	1.107	0.218
	30°	1.000	0.397
	45°	0.834	0.505
60° ($\lambda_1=0.512$ $\lambda_2=0.731$)	0°	1.225	0.000
	5°	1.218	0.113
	15°	1.176	0.326
	30°	1.040	0.577
	45°	0.824	0.684
90° ($\lambda_1=0.544$ $\lambda_2=0.909$)	0°	1.336	0.000
	5°	1.327	0.331
	15°	1.266	0.946
	30°	1.065	1.576

図7 $W_0^I(0)$ と $W_r^I(0)$ から計算されたそれぞれの K_{I,λ_1} の値

図8 垂直切欠先端での x 軸にそう応力 σ_y の分布

図9 σ_θ が最大となる角度 θ

図10 切欠先端の水平方向にそう応力 σ_y の分布

の有効性が理解される。この検討結果に基づき、数値計算で K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} を求める際、両者 [K_{I,λ_1} を求めるとき $W_\theta^{(1)}(0)$ と $W_r^{(1)}(0)$, K_{II,λ_2} を求めるとき $W_\theta^{(2)}(0)$ と $W_r^{(2)}(0)$] の $n=40, 100$ からの外そう値を平均して最終結果を求めた。

表1に種々の γ , β についての数値計算の結果を示す。それらの値を用いて、式(1)から応力特異場の分布を計算することができる。角度 γ が異なる場合特異性の指数 λ_1 , λ_2 も異なるので、異なる角度 γ のV形切欠先端における力学状態の厳しさを、パラメータ K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} だけで評価することはできない。図8は、垂直切欠先端での x 軸にそう応力 σ_y の分布を、角度 γ が異なる場合について比較したものである。

ななめ切欠きの場合 ($\beta \neq 0$)、モードIIの応力特異場も生じ、その応力特異性の指数はモードIのそれと異なる。したがって、この場合モードIとモードIIの応力成分の割合は、先端からの距離 r によって変化する。例えば、図9に示すように、 σ_θ が最大となる角度 θ は、き裂の場合(図中の $\gamma=0$ の場合) r によらず一定となるが、V形切欠きの場合 r によって変化する。 $1-\lambda_1 > 1-\lambda_2$ であることを反映して、 r が小さいほど、モードIによる応力成分の割合が大きい。図10に、 $\beta=30^\circ$ のななめ切欠きの場合、切欠先端の水平方向にそう応力 σ_y の分布を示す。

5. 結 論

V形切欠先端近傍での応力特異場は、モードIとモードIIの二つの変形様式に分けてかくことができる。この際、特異応力場は、式(1)のように、二組のパラメータ λ_1 , K_{I,λ_1} と λ_2 , K_{II,λ_2} により一義的に記述できる。数値解析でこのような応力分布を求める際、指数が異なる二つの特異応力を同時に考慮する必要がある。例えば、体積力法を用いて数値解析を行う際、体積力の密度定義については、式(14)のような、切欠先端における二つの応力特異性を代表する基本密度関数を導入する必要がある。特異性を考慮せず、単純に分割数をふやすことによる解析はもちろん、二つの特異応力中の一つだけを用いる解析でも、切欠先端での応力分布を正確に知ることはできない。

また、本論文で開発した、モードI, IIの応力特異性を同時に考慮した数値解法は、異材境界の数値解析に対してもそのまま使用できるものである。

文 献

- (1) 陳・西谷, 機論, 57-534, A(1991), 366.
- (2) Williams, M. L., *Trans. ASME*, 74(1952), 526.
- (3) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (金多監訳), 弾性論, 第5版, (1979), 148, コロナ社.
- (4) 西谷, 機誌, 70-580(1967), 627.
- (5) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 第3章, 培風館.