面外荷重をうける直交異方性積層厚板の応力解析*

松本 浩之^{*1}, 小川 義英^{*2}, 足立 忠晴^{*1}Stress Analysis of an Orthotropic Laminated Slab
Subjected to a Transverse Load

Hiroyuki MATSUMOTO, Yoshihide OGAWA and Tadaharu ADACHI

Stresses in a slab with three orthotropic laminated layers are analyzed with the three-dimensional theory of transversely isotropic elasticity. The slab is subjected to a transverse concentrated or distributed load at the center part on the top face. To obtain qualitative knowledge for delamination of CFRP laminates, numerical results of interlaminar stresses are given for $[0^\circ_n/90^\circ_n]_{sym}$ graphite/epoxy square laminates. It is shown that shear stresses on the upper interlaminar boundary are larger than those on the lower one. On each interfacial boundary, shear stresses are maxima just below the concentrated load point or the edge of the distributed load area, though these stresses are zero at the center point.

Key Words: Elasticity, Anisotropy, Composite Materials, Interlaminar Stress, Stress Function, Displacement Potential

1. 結 言

繊維強化複合材料は軽量かつ高強度であるため航空宇宙産業をはじめさまざまな分野で利用されている。しかし、不均質かつ異方性を有し破壊現象は複雑であり、そのため破壊のメカニズムは明らかでないのが現状である。また破壊と密接に関係する応力分布も複雑となり、応力解析は有限要素法に代表される数値解析法により行われることが多い。これに対し解析的方法によればさまざまな条件における応力分布の定性的傾向を容易に明らかにできる。そのため、基本的な問題の解析結果を求めておくことは工学上重要な課題であると考えられる。

繊維強化積層板に対する応力解析は通常、板厚が薄いものとして古典板理論⁽¹⁾、面外せん断変形を考慮した修正板理論⁽²⁾あるいはより精度の高い高次近似理論⁽³⁾に基づいて行われている。これらの理論では積層板が平面応力状態あるいはそれに近い状態にあるとしている。積層板は板厚方向(z 方向)にも不均質である

ことから板厚方向の応力成分($\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$)も破壊現象に関与すると考えられる。これらの応力成分を考慮するために積層板を三次元的に解析することが必要となる。積層板に面外荷重が作用する問題では Pagano⁽⁴⁾は変位を級数和で仮定して積層板の特定な軸上に生じる応力 τ_{xz}, τ_{yz} などを求めた。

本研究では横等方性弾性材料を積層した厚板に面外方向の荷重が作用する問題を様々な条件で解析することのできる Elliot⁽⁵⁾の応力関数を用いて一般的に解析する。特に積層板の層間にはく離に大きな影響を及ぼすと考えられる層間応力に着目して、荷重の分布が界面応力分布に及ぼす影響について考察する。

2. 解 析 法

2・1 横等方性弾性体に関する応力関数 横等方性弾性体の応力状態は、一般に 3 個の応力関数によって決定される。すなわち、 x 軸方向を異方性主軸とすれば、変位成分は直交座標系 (x, y, z) における応力関数を用いて表すと次のようになる。

$$u = k_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi_i}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi_i}{\partial z}, \quad (i=1, 2)$$

$$u=0, \quad v = \frac{\partial \phi_3}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \phi_3}{\partial y} \dots\dots\dots (1)$$

* 平成 2 年 3 月 30 日 第 67 期通常総会講演会において講演。原稿受付 平成 2 年 7 月 3 日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部(〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

^{*2} 学生員、東京工業大学大学院。

ここで応力関数は次式を満足しなければならない。

$$\left(\mu_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \phi_i = 0, (i=1, 2, 3) \dots (2)$$

また、横等方性弾性体の5個の弾性係数を C_{ij} とすると

$$k_i = (\mu_i C_{22} - C_{55}) / (C_{12} + C_{55}), \quad (i=1, 2)$$

であり、 μ_1 および μ_2 は二次方程式

$C_{22}C_{55}\mu^2 + (C_{12}^2 + 2C_{12}C_{55} - C_{11}C_{22})\mu + C_{11}C_{55} = 0$ の相異なる二根で、 $\mu_3 = 2C_{55} / (C_{22} - C_{23})$ である。式(1)に対応する応力成分は、変位とひずみ、ひずみと応力の関係を用いれば、次式のようになる。

$$\sigma_x / C_{55} = (1 + k_i) \mu_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}$$

$$\sigma_y / C_{55} = -(1 + k_i) \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \beta_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \right)$$

$$\sigma_z / C_{55} = -(1 + k_i) \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \beta_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right)$$

$$\tau_{yz} / C_{55} = (1 + k_i) \beta_i \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial z}$$

$$\tau_{xz} / C_{55} = (1 + k_i) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial z}$$

$$\tau_{xy} / C_{55} = (1 + k_i) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}, \quad (i=1, 2)$$

$$\sigma_x / C_{55} = 0$$

$$\sigma_y / C_{55} = \frac{2}{\mu_3} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y \partial z}$$

$$\sigma_z / C_{55} = -\frac{2}{\mu_3} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y \partial z}$$

$$\tau_{yz} / C_{55} = -\frac{1}{\mu_3} \left(\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} \right)$$

$$\tau_{xz} / C_{55} = -\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xy} / C_{55} = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial z} \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $\beta_i = (C_{22} - C_{23}) / \{(1 + k_i) C_{55}\}$ である。

したがって、応力関数 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 より得られる変位および応力成分をそれぞれ重ね合わせれば、横等方性弾性体の応力状態となる。また、 y 軸方向が異方性主軸の場合も同様に求めることができる。

2・2 横等方性積層厚板の応力解析

図1に示されるように、辺の長さが $2a$ および $2b$ の長方形の一方方向材が三層に積層された厚板の応力を解析する。積層板の中央に座標 (x, y, z) の原点を定める。上下の層および中央の層の厚さを $h/2$ および h とし、積層板の繊維配向は x 軸を 0° 方向とすれば $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ である。この積層板の周辺を単純支持とし、上面に面外荷重 q_0 が作用する場合を考える。このとき境界条件を次式のように定める。

$$z = h \text{ において } \sigma_z = q_0(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$z = \pm h/2 \text{ において } u, v, w, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz} \text{ は連続}$$

$$z = -h \text{ において } \sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$x = \pm a \text{ において } \sigma_x = v = w = 0$$

$$y = \pm b \text{ において } \sigma_y = u = w = 0 \dots \dots \dots (4)$$

式(4)の境界条件を考えれば、式(2)の変数分離解を用いて応力関数を次のように表すことができる。

$$C_{55} \phi_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ F_i \exp(r_i z) + G_i \exp(-r_i z) \}$$

$$\times \cos(p_m x) \cos(q_n y), \quad (i=1, 2)$$

$$C_{55} \phi_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ F_3 \exp(r_3 z) + G_3 \exp(-r_3 z) \}$$

$$\times \cos(p_m x) \sin(q_n y)$$

$\dots \dots \dots (5)$

ここで、

$$p_m = (2m+1)\pi/(2a), \quad q_n = (2n+1)\pi/(2b)$$

$$r_i^2 = \mu_i p_m^2 + q_n^2, \quad (i=1, 2, 3)$$

であり、 $F_i, G_i (i=1, 2, 3)$ は未定定数である。

式(5)を式(3)に代入することにより変位および応力は次のように表すことができる。

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u^*(z) \sin(p_m x) \cos(q_n y)$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v^*(z) \cos(p_m x) \sin(q_n y)$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w^*(z) \cos(p_m x) \cos(q_n y)$$

$$\sigma_x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_x^*(z) \cos(p_m x) \cos(q_n y)$$

図1 積層板

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_y^*(z) \cos(p_m x) \cos(q_n y) \\
\sigma_z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_z^*(z) \cos(p_m x) \cos(q_n y) \\
\tau_{yz} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{yz}^*(z) \cos(p_m x) \sin(q_n y) \\
\tau_{xz} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{xz}^*(z) \sin(p_m x) \cos(q_n y) \\
\tau_{xy} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{xy}^*(z) \sin(p_m x) \sin(q_n y) \\
&\dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
u^*(z) &= -\sum_{i=1}^2 k_i p_m \{F_i \exp(r_i z) + G_i \exp(-r_i z)\} \\
v^*(z) &= -\sum_{i=1}^2 q_n \{F_i \exp(r_i z) + G_i \exp(-r_i z)\} \\
&\quad + r_3 \{F_3 \exp(r_3 z) - G_3 \exp(-r_3 z)\} \\
w^*(z) &= \sum_{i=1}^2 r_i \{F_i \exp(r_i z) + G_i \exp(-r_i z)\} \\
&\quad - q_n \{F_3 \exp(r_3 z) - G_3 \exp(-r_3 z)\} \\
\sigma_x^*(z) &= \sum_{i=1}^2 (1+k_i) \mu_i p_m^2 \\
&\quad \times \{F_i \exp(r_i z) + G_i \exp(-r_i z)\} \\
\sigma_y^*(z) &= \sum_{i=1}^2 (1+k_i) (p_m^2 - \beta_i r_i^2) \\
&\quad \times \{F_i \exp(r_i z) + G_i \exp(-r_i z)\} \\
&\quad + (2q_n r_3) / \mu_3 \{F_3 \exp(r_3 z) - G_3 \exp(-r_3 z)\} \\
\sigma_z^*(z) &= \sum_{i=1}^2 \{(1+k_i) (p_m^2 + \beta_i q_n^2) \\
&\quad \times \{F_i \exp(r_i z) + G_i \exp(-r_i z)\} \\
&\quad - (2q_n r_3) / \mu_3 \{F_3 \exp(r_3 z) - G_3 \exp(-r_3 z)\}
\end{aligned}$$

(a) 上側界面 ($z/h=0.5$)

(b) 下側界面 ($z/h=-0.5$)

図2 垂直応力 σ_z の分布
(集中荷重の場合)

$$\begin{aligned}
\tau_{yz}^*(z) &= -\sum_{i=1}^2 (1+k_i) \beta_i q_n r_i \\
&\quad \times \{F_i \exp(r_i z) - G_i \exp(-r_i z)\} \\
&\quad + (q_n^2 + r_3^2) / \mu_3 \{F_3 \exp(r_3 z) + G_3 \exp(-r_3 z)\} \\
\tau_{xz}^*(z) &= -\sum_{i=1}^2 (1+k_i) p_m r_i \\
&\quad \times \{F_i \exp(r_i z) - G_i \exp(-r_i z)\} \\
&\quad + p_m q_n \{F_3 \exp(r_3 z) + G_3 \exp(-r_3 z)\} \\
\tau_{xy}^*(z) &= \sum_{i=1}^2 (1+k_i) p_m q_n \\
&\quad \times \{F_i \exp(r_i z) + G_i \exp(-r_i z)\} \\
&\quad - p_m r_3 \{F_3 \exp(r_3 z) - G_3 \exp(-r_3 z)\}
\end{aligned}$$

また、 y 軸方向が異方性主軸の場合も変位および応力は同様に求めることができる。

3. 数値計算結果

3・1 計算条件 数値計算例として炭素/エポキシ樹脂の一方方向プリプレグ(トレカ No. 3051-15)を積層した複合材料を対象とした。数値計算に用いた次の弾性係数は一方方向材の引張試験を行い、二軸ひずみゲージによって求めたものである。また、 ν_{TT} については求めることができなかったため ν_{LT} と同じ数値を用いた。

$$E_L = 125[\text{GPa}], E_T = 7.91[\text{GPa}], G_{LT} = 4.21[\text{GPa}]$$

$$\nu_{LT} = 0.3, \nu_{TT} = 0.3$$

ここで添字の L, T は繊維方向および繊維と直角方向を示し、 G_{LT} は次式から算出した。

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{4}{E_{45^\circ}} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \dots\dots\dots (7)$$

積層板の形状は $a/h = b/h = 25$ とした。積層板の上面中央に $2a_0 \times 2b_0$ の四角形領域に合力 F_0 の等分布荷重が作用する場合および中央に大きさ F_0 の集中荷重が作用する場合について計算を行った。式(4)において、分布荷重の場合には

$$\begin{aligned}
q_0(x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_0}{ab} \frac{\sin(p_m a_0)}{p_m a_0} \frac{\sin(q_n b_0)}{q_n b_0} \\
&\quad \times \cos(p_m x) \cos(q_n y) \dots\dots\dots (8)
\end{aligned}$$

集中荷重の場合には

$$q_0(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_0}{ab} \cos(p_m x) \cos(q_n y) \dots\dots (9)$$

となる。

3・2 計算結果の例 図2, 3には集中荷重および $a_0/h = b_0/h = 1.25$ の領域に分布荷重が作用する場合の垂直応力 σ_z の分布を示す。(a)は上側界面における分布を、(b)は下側界面における分布を示す。いずれの荷重が作用する場合にも σ_z は板の中央で最大となる。上側界面の σ_z の値は下側界面の値に比べかなり大きい。また、軸方向の応力分布の傾向を見てみると上

側界面では y 軸方向で、下側界面では x 軸方向で引張応力になりやすいことがわかる。すなわち、層間における σ_z は層間の下側の層の繊維方向で引張りとなる。図 4, 5 および図 6 には集中荷重が作用する場合の τ_{yz} , 集中荷重が作用する場合の τ_{xz} , および $a_0/h = b_0/h = 1.25$ の荷重が作用する場合の τ_{xz} の分布を示す。

図 3 垂直応力 σ_z の分布
(分布荷重の場合)

図 4 せん断応力 τ_{yz} の分布
(集中荷重の場合)

す。いずれの図においても (a) は上側界面における分布を、(b) は下側界面における分布を示す。集中荷重が作用する場合には τ_{yz} は荷重点直下より少し離れた y 軸上で、 τ_{xz} は荷重点直下より少し離れた x 軸上で

図 5 せん断応力 τ_{xz} の分布
(集中荷重の場合)

図 6 せん断応力 τ_{xz} の分布
(分布荷重の場合)

(a) 集中荷重の場合

(b) 分布荷重の場合 ($z/h = 0.5$)図7 せん断応力 τ_{xz} , τ_{yz}

最大となる。また、分布荷重が作用する場合には荷重領域端の下で最大となる。集中荷重が作用する場合には下側界面のせん断応力の最大値は上側界面の値に比べかなり小さく、分布状態も異なる。しかし分布荷重が作用する場合には上下の界面で似たような分布を示す。図7に層間上におけるせん断力の分布を示す。図7(a), (b)には集中荷重, $a_0/h = b_0/h = 1.25$ および 2.5 の荷重条件のときの結果を示している。いずれの図においても破線は x 軸上の τ_{xz} , 実線は y 軸上の τ_{yz} を表す。それぞれの応力は $x/h = y/h = 0$ で零で

ある。集中荷重では荷重点直下より少し離れた点で最大値を示す。これに対して荷重領域が広がるにつれて積層板の中心から離れた荷重領域端の下で最大値を示し、その最大値は小さくなるのがわかる。さらに、せん断応力の最大値は集中荷重が作用する場合、下側の層間 ($z/h = -0.5$) 上の値に比較して上側の層間 ($z/h = 0.5$) 上のほうが大きな値を示すこともわかる。ここで図に示していないが分布荷重が作用する場合にも同様な結果が得られた。また集中荷重の場合、せん断力 τ_{xz} , τ_{yz} の最大値は同一面内で比べると上側の層間では τ_{yz} , 下側の層間では τ_{xz} の値が大きくなっている。これらの関係は荷重領域の拡大に伴って変化し、 $a_0/h = b_0/h = 2.5$ ではどちらの層間においても τ_{xz} が τ_{yz} より大きな値をとることがわかる。

5. 結 言

横等方性弾性材料を積層した板の上面に面外荷重が作用する問題を、Elliot によって導入された3個の応力関数を用いて解析した。数値計算例として、炭素/エポキシ樹脂の一方向プリプレグを積層した板を採用し、荷重分布に対する層間における応力状態を示した。結果を要約すると以下ようになる。

(1) 層間におけるせん断応力の最大値は集中荷重が作用する場合には荷重点直下より少し離れた点で、分布荷重が作用する場合には荷重領域の端の下で最大値をとる。

(2) 垂直応力 σ_z は上側の層間では y 軸方向に、下側の層間では x 軸方向に引張応力が生じる。また、積層板に集中荷重が作用する場合にはせん断力 τ_{xz} , τ_{yz} の最大値は同一面内で比べると上側の層間では τ_{yz} , 下側の層間では τ_{xz} の値が大きくなっている。すなわち繊維配向が z 方向応力に影響を及ぼす。

(3) 積層板に作用する荷重領域を変化させると荷重領域の拡大に伴い各応力の最大値は減少する。

文 献

- (1) Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, (1975), 147, McGraw-Hill Kogakusha.
- (2) Dobyns, A. L., Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subject to Static and Dynamic Loads, *AIAA J.*, **19**(1980), 642.
- (3) Lo, K. H., A High-Order Theory of Plate Deformation, *J. Appl. Mech.*, **44**(1977), 669.
- (4) Pagano, N. J., Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates, *J. Composite Mat.*, **4**(1970), 20.
- (5) 奥村・道端, 直交座標における横等方性弾性問題の Elliot の解の一変換, 機論, **54**-504, A(1988), 1512.