種々の軸方向き裂を有する円筒の応力拡大係数*

(マトリクス表記を用いた統一的解析手法の提案)

高橋 淳^{*1}, 岡村 弘之^{*2}, 酒井 信介^{*2}Stress Intensity Factors for Various Configurations
of Axially Cracked Cylinders
(Proposal of an Approach Based on Matrix Method)

Jun TAKAHASHI, Hiroyuki OKAMURA, and Shinsuke SAKAI

In this paper, a simple procedure based on the matrix method of structural analysis is proposed to estimate the stress intensity factors for various configurations of axially cracked cylinders. General formulation using matrix expression is presented at first. Then, this formulation is reformed by using the hoop stress in the uncracked configuration for the convenience of numerical calculations and analytical considerations. Proposed method enables us to estimate not only the mixed-mode stress intensity factors but also the J -integral for quite various configurations of axially cracked cylinders, and obtained results show good agreement with numerical data in the literature for a number of cracked configurations. In addition, explicit formulation in this study enables us to easily know the characteristic features of axially cracked cylinders; the dependence of internal forces and K -values on mean radius, wall thickness, crack length, and the number of cracks.

Key Words : Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, J -Integral, Cylinder, Axial Crack, Matrix Method, Complimentary Energy, Compliance, Statically Indeterminate

1. 緒 言

き裂を有する円筒の応力拡大係数(以下 K 値と略記)は、圧力容器・配管等の脆性破壊あるいは疲労破壊の予測に不可欠であることから、いくつかの基本的な負荷様式およびき裂形態についてはその解が整備されている^{(1)~(8)}。しかしながら、これらはいずれもケーススタディであり、種々のき裂形態に対する解を総合的に評価することにより初めて明らかとなる共通あるいは特徴的な強度特性についての議論はなされていない。また一方で、実用上問題となるような複雑なき裂形態の解をこれらから推定することも困難であり、一般には目的とする形状に対して新たに有限要素解析を行わざるを得ないのが現状である。このような現状を打開し、設計あるいは保守点検に際しての有用な情報を体系的に調査・整理するためにも、簡易でしかも精度の良い統一的な評価手法の開発が望まれる。

このような中、筆者らは軸方向き裂を有する円筒に対してその応力拡大係数⁽⁹⁾および J 積分値⁽¹⁰⁾を簡

易かつ高精度に評価する手法を提唱し、いくつかの具体的解析を通してその有効性を示してきた⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

本論文では、上述の統一的な評価手法の開発を目的として、筆者らの提唱する簡易解析手法をより一般のき裂形態に対して適用すべく拡張するものである。

以下では、まずマトリクス表記を用いた定式化についての理論的説明を行なうと同時に、具体的問題への適用に便利な形に整理する手順を示す。次に、提案法の利点および適用可能性を考察した後、他者の解析結果との比較を行ない、提案法の解析精度および適用限界に関する詳細な検討を行なう。

2. マトリクス表記を用いた解析手法の定式化

実際の構造物はその多くが不静定構造であり、その力学的挙動の解析は一般には有限要素法などによる大規模な数値計算によらざるを得ない。しかしながら一方で、初期のマトリクス法構造力学⁽¹²⁾における梁の解析に見られるように、適当な静定化(これは有限要素法でいう要素分割に相当する)を行なうことによって、不静定構造物の挙動を既知の解を用いて簡易かつ高精度に解析できることが知られている。

* 平成2年9月23日 第68期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成2年10月15日。

^{*1} 正員、東京大学大学院 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)。

^{*2} 正員、東京大学工学部。

(a) き裂配置と静定化の概念図

(b) \$i\$ 番目のき裂材と作用する内力

図 1 軸方向き裂付き円筒の解析モデル

本論文では、後者の解析手順をコンプリメンタリエネルギーを仲介としてき裂を含む構造物の解析に拡張する手順を示す。具体的には、複数の任意形状の軸方向き裂を有する円筒に対して、その \$K\$ 値 (\$K_I\$ および \$K_{II}\$) を求める手順を一般的な形で定式化する。

2.1 一般的定式化 以下では、平均半径 \$r_m\$、肉厚 \$W\$ の軸方向き裂付き円筒を図 1(a) のようにモデル化して考える。すなわち、円筒の一断面を切断してその上側の面 (\$\phi=0\$) を固定し、下側の面 (\$\phi=2\pi\$) に不静定力 \$\{R\}=\{F, P, M/r_m\}^T\$ を作用させる。また、き裂はそれぞれ \$\phi=\phi_i\$ の位置に合計 \$n\$ 個あるものとし、外力 (\$Q\$) として内外圧 (\$p_i, p_o\$) および回転による遠心力を考え、また熱ひずみ (\$S\$) の影響も考慮する。

まず、\$\phi=\phi_i\$ なる断面に作用する内力を \$\{R_i\}=\{F_i, P_i, M_i/r_m\}^T\$ とするとき、\$i\$ 番目のき裂材†のコンプリメンタリエネルギー (\$\Omega_i^c\$) は図 1(b) に示されるように \$\{R_i\}\$、自己平衡力 (\$\sigma_L\$)⁽¹⁰⁾ およびき裂面に作用する圧力 (\$p_s\$) の関数として表わされ、マトリクス表記すると

$$\Omega_i^c = \frac{1}{2} \left[\{R_i\}^T [\lambda_i] \{R_i\} + 2\{R_i\}^T \{L_i\} + 2\{R_i\}^T \{H_i\} p_s + f_i^c(\sigma_L, p_s) \right] \quad (1)$$

† 本論文では、「き裂の存在による \$\times\times\$ の増加分」と呼ぶべきものを、単に「き裂材の \$\times\times\$」と呼ぶことにする。ここで、き裂材とは図 1(b) に示すように、長さゼロの仮想的なき裂要素を指すものである。

となる。ここで、\$[\lambda_i]\$ は \$i\$ 番目のき裂材のコンプライアンスマトリクス、\$\{L_i\}\$、\$\{H_i\}\$、\$f_i^c\$ はいずれも自己平衡力およびき裂表面力の影響項である。式 (1) の一般的導出方法および実用上重要な内外面き裂に対する具体形を付録 (1) に示す。

また、内力 \$\{R_i\}\$ は不静定力と外力の関数となり

$$\{R_i\} = [D_i] \{R\} + \{G_i\} Q \quad (2)$$

と表わせる。ここで、

$$[D_i] = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & 1 - \cos \phi_i & 1 \end{bmatrix},$$

$$\{G_i\} = \begin{Bmatrix} \sin \phi_i \\ 1 - \cos \phi_i \\ \cos \phi_i - 1 \end{Bmatrix},$$

$$Q = p_i r_i - p_o r_o + \frac{\rho \omega^2}{3} (r_o^3 - r_i^3)$$

であり、\$r_i\$、\$r_o\$、\$\rho\$、\$\omega\$ はそれぞれ円筒の内外径、密度および角速度である。さて、式 (2) を用いて式 (1) の \$\{R_i\}\$ を消去すると次式を得る。

$$\Omega_i^c = \frac{1}{2} \left[\{R\}^T [D_i]^T [\lambda_i] [D_i] \{R\} + 2\{R\}^T [D_i]^T [\lambda_i] \{G_i\} Q + 2\{R\}^T [D_i]^T (\{L_i\} + \{H_i\} p_s) + 2\{G_i\}^T (\{L_i\} + \{H_i\} p_s) Q + \{G_i\}^T [\lambda_i] \{G_i\} Q^2 + f_i^c \right] \quad (3)$$

ここで、上式の展開には

$$\{R_i\}^T = \{R\}^T [D_i]^T + \{G_i\}^T Q$$

なる関係式を用いた。

一方、各き裂間の曲がり梁は合計 \$(n+1)\$ 個あり、それぞれのコンプリメンタリエネルギーは \$\Omega_i^c\$ の場合と同様にして不静定力 (\$\{R\}\$)、外力 (\$Q\$) および熱ひずみ (\$S\$) の関数として求められる。ところが、この場合にはそれらの合計が長さ \$2\pi r_m\$ の曲がり梁のコンプリメンタリエネルギーと等しくなり、次式で表される。

$$\Omega^s = \frac{1}{2} \left[\{R\}^T [A] \{R\} + 2\{R\}^T \{B\} Q + 2\{R\}^T \{C\} S + f(Q, S) \right] \quad (4)$$

ここで、\$[A]\$、\$[B]\$ はそれぞれ不静定力および外力に対するコンプライアンスマトリクス、\$\{C\}S\$ は熱ひずみの影響項であり、\$f(Q, S)\$ は外力と温度のみの関数である。これらは材料力学あるいは二次元弾性論⁽¹³⁾の手法から導かれるものであり、付録 (2) にその具体形を示す。

以上の結果を用いることにより、図1(a)の円筒全体のコンプリメンタリエネルギーは

$$\Omega^{total} = \Omega^s + \sum_{i=1}^n \Omega_i^c \quad (5)$$

と表わせる。ここで、不静定力作用点における上下面の変形の連続条件はカスティリアーノの定理から

$$\left\{ \frac{\partial \Omega^{total}}{\partial R} \right\} = \{0\} \quad (6)$$

と書け、これは「不静定力はそれが系全体になす仕事が最小になるように定まる」といういわゆる最小仕事の原理を表わしている。式(3)、(4)を式(5)および式(6)に代入すると

$$[A]\{R\} + \{B\}Q + \{C\}S + \{\Delta^c\} = \{0\} \quad (7)$$

を得る。ここで、 $\{\Delta^c\}$ はき裂部分の変形による不静定力作用点の変形を表しており、

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta^c\} &= [\Delta A]\{R\} + \{\Delta B\}Q + \{\Delta C\}S \\ [\Delta A] &= \sum_{i=1}^n [D_i]^T [\lambda_i] [D_i] \\ \{\Delta B\} &= \sum_{i=1}^n [D_i]^T [\lambda_i] \{G_i\} \\ \{\Delta C\} &= \sum_{i=1}^n [D_i]^T (\{L_i\} + \{H_i\} p_s) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

である。式(7)は三元の連立方程式であり、これを解くことによって不静定力 $\{R\}$ が得られ、また式(2)から任意の断面における内力 $\{R_i\}$ を知ることができる。さらに、き裂のある断面の $\{R_i\}$ と式(23)の第2、第3式から個々のき裂の K 値が計算できる。

なお、付録(1)ではき裂材のコンプライアンスとして線形弾性体のもののみ示してあるが、既報⁽¹⁰⁾に示した非線形弾性体に対するき裂材のコンプライアンスを用いれば、同様の手順で J 積分値を求めることも可能である。

2.2 き裂のない場合の解の利用 き裂がない場合の不静定力 $\{R_0\}$ を利用することにより、式(7)から $\{B\}$ と $\{C\}$ の項が消去でき、見通しの良い解析が可能となる⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。すなわち、き裂がないときには式(7)において $\{\Delta^c\} = \{0\}$ であるから、同式は

$$[A]\{R_0\} + \{B\}Q + \{C\}S = \{0\} \quad (9)$$

となる。これと式(7)から $\{B\}$ 、 $\{C\}$ を消去すると

$$\{\Delta^c\} = [A](\{R_0\} - \{R\}) \quad (10)$$

となり、さらに数値計算に便利ように変形すると

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta^c\} &= ([A] + [\Delta A])(\{R_0\} - \{R\}) \\ \text{or } \{R\} &= \{R_0\} - ([A] + [\Delta A])^{-1} \{\Delta^c\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。ただし、

$$\{\Delta^c\} = [\Delta A]\{R_0\} + \{\Delta B\}Q + \{\Delta C\}S$$

である。式(10)あるいは式(11)は、その表記が簡潔であるばかりでなく、内力の変化($\{R_0\} \rightarrow \{R\}$)という観点から現象をとらえることができる点で優れている。このことは、特に弾塑性領域における J 積分の有効条件の考察などにおいて威力を発揮する⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

ところで、 $\{R_0\}$ は材料力学の手法で求まる円筒の円周方向応力(σ_θ)を用いて容易に計算でき、またこの時に $\{L_i\}$ の計算に必要な自己平衡力(σ_L)も同時に得られる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \{R_0\} &= \left\{ F_0 \quad P_0 \quad \frac{M_0}{r_m} \right\}^T \\ F_0 &= 0 \\ P_0 &= \int_{-W/2}^{W/2} \sigma_\theta dz \\ M_0 &= \int_{-W/2}^{W/2} \sigma_\theta z dz \\ \sigma_L &= \sigma_\theta - \frac{P_0}{W} - \frac{6M_0}{W^2} \cdot \frac{2z}{W} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。ここで、 z は平均半径から外向きにとった半径方向の距離である。このとき P_0 が式(2)の Q に一致することが確認できる。

3. 具体的問題への適用

ここでは、前章に示した手法(以下提案法と呼ぶ)の適用可能性を検討するとともに、提案法の特徴であるマトリクス表示の利点について述べる。

3.1 提案法の汎用性と適用限界 式(11)、(12)および式(8)を用いることにより、極めて広範囲の軸方向き裂問題を統一的に取り扱うことができる。すなわち、まず対応するき裂形状についての平板に対する K 値(式(23))さえ与えられれば、任意の内外径比の円筒に対し、軸方向の内外面、両側および内部に存在する二次元および三次元き裂の(さらにはそれらの干渉がある場合についても) K 値を計算することができる。また、式(8)は種々のき裂が任意の位置(ϕ)に複数個配置された場合に対応できるものであることを示しており、式(12)は任意の軸対称な周方向応力に対応できるものであることを示している。さらに、前述したように非線形弾性体への拡張も容易であり、極めて汎用性・拡張性に富んだ手法であるといえる。

一方、本手法はそもそも不静定梁の解析に用いられていた考え方を拡張したものであることからわかるとおり、円筒が厚肉になるとその精度に問題が生じると考えられる。具体的には、曲がり梁の端部変形⁽¹³⁾

がき裂部分の変形に及ぼす影響およびき裂の存在による応力場の乱れが曲がり梁の変形に及ぼす影響がその原因となるものと考えられる。ところが、これらの影響度を定量的に示すことは一般には困難である。そこで、次章では厚肉円筒に対する信頼度の高い他者の解析結果と提案法による解析結果とを比較し、提案法の適用限界を定性的に示すことを試みる。

3.2 マトリクス表示の活用 提案法の大きな特徴はマトリクス表示にある。その利点としては、まず解くべき方程式が式(8)および式(11)のように計算機を用いた数値解析に適した形で整理されている点があげられる。すなわち、これによって前節で述べた汎用性と拡張性を強力にサポートする汎用プログラムの作成が容易となるばかりでなく、有限要素法等では困難であった種々のパラメータの感度解析などを繊細に行なうことが可能となる。

さらに、もう一つの利点として解析過程を陽な形で示すことができる点があげられる。これは、個々のパラメータが相互に作用しつつ結果に影響を及ぼす過程を知り、現象のメカニズムを明らかにするうえで非常に有用である^{(9)~(11)}。以下ではこの顕著な例として、き裂が軸対称に複数($n \geq 2$)ある場合の内力および K 値の陽な表示方法を示す。

同一形状のき裂が軸対称に配置されているような場合には、内力 $\{R_i\}$ が例外的に簡単な形になることが知られている⁽¹⁴⁾。ところが、文献⁽¹⁴⁾ではこの事実を仮定したうえでの議論を行なっているため、現象の考察等の目的でこの事実を用いるには根拠が不十分である。そこで、ここではこのことを陽に導き、き裂形状および荷重条件によらない一般解を示しておく。

複数のき裂が同一形状である場合には、式(8)において $[\lambda_i] = [\lambda]$, $\{L_i\} = \{L\}$, $\{H_i\} = \{H\}$ とおけ、またき裂の配置が等間隔であることから、同式は具体的に

$$\left. \begin{aligned} [\Delta A] &= \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & m_i \beta_2 \\ a_{2i} & a_{3i} & l_i \beta_2 + \lambda_M \\ m_i \beta_2 & l_i \beta_2 + \lambda_M & \lambda_M \end{bmatrix} \\ a_{1i} &= l_i^2 \lambda_F + m_i^2 \beta_1 \\ a_{2i} &= l_i m_i (\beta_1 - \lambda_F) + m_i \beta_2 \\ a_{3i} &= m_i^2 \lambda_F + l_i^2 \beta_1 + 2l_i \beta_2 + \lambda_M \\ \{\Delta B\} &= \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} l_i m_i \lambda_F + m_i (1-l_i) \beta_1 \\ -m_i^2 \lambda_F + (1-l_i)(l_i \beta_1 + \beta_2) \\ (1-l_i) \beta_2 \end{Bmatrix} \\ \{\Delta C\} &= \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} m_i (\beta_3 - \beta_4) \\ l_i (\beta_3 - \beta_4) + \beta_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

と書き下すことができる。ただし、

$$\begin{aligned} l_i &= \cos \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \quad m_i = \sin \left(\frac{2\pi i}{n} \right), \\ \beta_1 &= \lambda_P - 2\lambda_{PM} + \lambda_M, \quad \beta_2 = \lambda_{PM} - \lambda_M, \\ \beta_3 &= (L_P + \lambda_{PP_s})W, \quad \beta_4 = (L_M + \lambda_{PM} p_s)W \end{aligned}$$

である。そして、式(13)中に見られる三角関数の総和は $n=2$ および $n \geq 3$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 l_i &= \sum_{i=1}^2 m_i = \sum_{i=1}^2 l_i m_i = 0 \\ \sum_{i=1}^2 l_i^2 &= 2, \quad \sum_{i=1}^2 m_i^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n l_i &= \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n l_i m_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n l_i^2 &= \sum_{i=1}^n m_i^2 = \frac{n}{2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

であるから、式(13)はそれぞれの場合について

$$\left. \begin{aligned} [\Delta A] &= 2 \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 + \lambda_M & \lambda_M \\ 0 & \lambda_M & \lambda_M \end{bmatrix} \\ \{\Delta B\} &= 2 \{0 \quad \beta_2 - \beta_1 \quad \beta_2\}^T \\ \{\Delta C\} &= 2 \{0 \quad \beta_4 \quad \beta_4\}^T \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} [\Delta A] &= n \begin{bmatrix} \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} + \lambda_M & \lambda_M \\ 0 & \lambda_M & \lambda_M \end{bmatrix} \\ \{\Delta B\} &= n \{0 \quad \beta_2 - \frac{\lambda_F + \beta_1}{2} \quad \beta_2\}^T \\ \{\Delta C\} &= n \{0 \quad \beta_4 \quad \beta_4\}^T \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる。式(16)および式(17)をそれぞれ式(11)に代入し、 $F_0=0$, $P_0=Q$ (式(12)参照)を用いると $\{R\}$ は簡単に求まる。すなわち、それらの結果は等しく

$$\left. \begin{aligned} F &= F_0 = 0 \\ P &= P_0 = Q \\ \frac{M}{r_m} &= \frac{M_0}{r_m} - \frac{\phi_0^c}{H_1/n + \lambda_M} \\ \frac{\phi_0^c}{W} &= \left(\frac{P_0}{W} + p_s \right) \lambda_{PM} + \frac{M_0}{r_m W} \lambda_M + L_M \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となる。上式は、2個以上の同一形状のき裂が軸対称に存在する場合には、せん断力(F)は作用せず、軸力(P)は一定であり、モーメント(M)はき裂を閉じる方向に増加することを表している。また、このとき式(2)から $\{R_i\} = \{R\}$ となるが、これは円筒の全ての断面において等しい内力が作用することを意味している。

ここで、き裂のない時の内力($\{R_0\}$)による次のような仮想的な K 値を考える。

$$\frac{K_I^0}{\sqrt{\pi a}} = \left(\frac{P_0}{W} + p_s \right) f_P + \frac{M_0}{r_m W} f_M + F_L \quad (19)$$

(a) 内面き裂 (1個)

(b) 外面き裂 (1個)

(c) 内面・外面き裂 (2個)

図2 Andrasic-Parkerの結果⁽⁶⁾との比較 ($\gamma=1/9$)

このとき、式(18)から得られる K 値は式(23)より

$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} = \frac{K_I^0}{\sqrt{\pi a}} - \frac{\phi_0^c/W}{H_1/n + \lambda_M} f_M \quad (20)$$

となる。式(18)および式(20)から、例えばき裂個数 (n) が増えるとき裂を閉じる方向へのモーメントの増加率が大きくなり、その結果 K 値が低下することなどがわかる。その他にも、き裂面に作用する圧力 (p_s) の影響なども容易に知ることができる。

4. 他者の解析結果との比較

軸方向き裂付き円筒の K 値および J 積分値に関する

(a) 内面き裂 (1個)

(b) 外面き裂 (1個)

(c) 内面・外面き裂 (2個)

図3 Andrasic-Parkerの結果⁽⁶⁾との比較 ($\gamma=1/3$)

る文献は非常に多い。ところが、解析者間の差が小さく、解の精度にある程度信頼がおけるものとなると、任意の軸対称応力下における円筒内外面の二次元き裂 (1~2 個) に対する K 値⁽⁶⁾ および内圧下における円筒内面の半楕円表面き裂 (1 個) に対する K 値⁽⁸⁾ に限られる。

そこで以下では、提案法による解析結果を上記前者の結果と比較し、提案法の解析精度および適用限界を考察する。また、その結果をふまえて、いくつかの文献のデータの精度を検討する。

図4 Labbensらの結果⁽²⁾との比較

4.1 任意の軸対称応力下の K 値 Andrasic-Parker⁽⁶⁾ は、厚肉円筒 ($\gamma=1/9, 1/5, 3/11, 1/3, 3/7, 1/2, \gamma=W/2r_m$) の内外面にき裂が1個および軸対称に2個ある場合について Weight Function Method (以下 WFM と略記) を用いて K 値を計算している。提案法による解析結果をこれと比較したものを図2($\gamma=1/9$) および図3($\gamma=1/3$) に示す。ただし、各図中では式(21)で表されるき裂のない場合の4種の周方向応力に対する K 値を無次元表示しており、提案法では式(21)を式(12)に代入することにより解が得られる。

$$\sigma_{\theta} = A_i \left(\frac{y}{W} \right)^i \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (21)$$

ここで、式(21)中の y はき裂がある側の表面からの距離を表し、式(12)中の z とは次の関係がある。

$$\frac{y}{W} = \begin{cases} 1/2 + z/W & (\text{内面き裂}) \\ 1/2 - z/W & (\text{外面き裂}) \end{cases} \quad (22)$$

両図から、 $\gamma=1/9$ の場合には $\xi (=a/W)$ の全範囲において極めて良好に一致し、 $\gamma=1/3$ の場合には $\xi=0.8$ の点を除いて誤差約5%以内で一致する様子が読み取れる。ただし、図2(b)における $\xi=0.7$ の解析値はデータの整合性から考えても文献⁽⁶⁾側の誤りであると考えられる。また、複数の軸対称き裂の場合には、提案法に従えば内面き裂と外面き裂で等しい K 値が得られることが式(20)から導かれるが、図2(c)および図3(c)はこの予測が厚肉になるほど外れてくることを示している。なお、残りの肉厚比についても同様の比較を行なったところ、 $\gamma=1/9$ から順に円筒が厚肉になるにつれて精度が低下し、 $\gamma=1/2$ では最大で10%程度の誤差を持つことが明らかとなった。

次に、Labbensら⁽²⁾による薄肉円筒(内面き裂, 1個, $\gamma=1/21$)に対する同様な解析結果との比較を図4に示す。同図は、図2(a)($\gamma=1/9$)の場合と同様に良好な一致を示している。

図5 Bowie-Freeseの結果⁽¹⁾および Grandtの結果⁽⁴⁾との比較 ($\sigma_c = \frac{2r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} p_i$) 図6 Kumarらの結果⁽⁷⁾との比較 ($\sigma_c = \frac{2r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} p_i$)

ここで、図3の結果をさらに細かく見ると、 $\gamma=1/3$ 程度の厚肉の容器に対しては、提案法による予測は内面き裂の場合には ξ が小さい所で K 値を大きめに、 ξ が大きい所で小さめに評価すること、外面き裂の場合はその逆であることがわかる。これは、まさに3.1節で考察した曲がり梁の端部変形の影響に対応するものと考えられる。言い換えれば、本節に示した比較によって3.1節で意図した提案法の適用限界の定性的表示が実現されたものと判断できる。

以上の結果から、実用上重要な $\gamma \leq 1/9$ 程度の円筒容器については、応力分布、き裂形状によらず提案法によって極めて精度よく K 値が評価できると結論できる。また、5%程度の誤差を許容するならば $\gamma=1/3$ 程度の厚肉容器に対しても提案法の使用が許されよう。

4.2 内圧円筒の K 値 種々のき裂形態の内圧円筒に対する K 値⁽¹⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁷⁾を提案法によるものと比較した結果を図5~7に示す。ただし、図の縦軸はすべて無次元化した K 値であり、 σ_c はき裂がない場合の応力のき裂がある側の表面における値を表している。すなわち、 $\xi \rightarrow 0$ ではいずれの場合にも $K_I / (\sigma_c \sqrt{\pi a}) \rightarrow$

図7 Tracyの結果⁽⁵⁾との比較

1.1215 となる。また、内面き裂の場合はすべてき裂面に作用する圧力を考慮 ($p_o = p_i$) している。

まず、厚肉円筒 (内面き裂, 1個) に対する Bowie ら⁽¹⁾ の写像法および Grandt⁽⁴⁾ の WFM による解析結果との比較を図5に示す。同図から、 $\gamma=1/5, 3/11, 1/3$ では約4~5%以内の誤差で一致し、いずれも図3(a)と同様の傾向を示すことが確認できるが、 $\gamma=1/9$ においては大きな差が見られる。文献⁽¹⁾のデータはこれまで比較的精度が良いと考えられていたが、前節の考察あるいは具体的には図2(a)の結果などから判断すると、 $\gamma=1/9$ における文献⁽¹⁾のデータは大きな誤差を含んでいると結論できる。

次に、図6は薄肉円筒 (内面き裂, 1個) に対する Kumar ら⁽⁷⁾ の有限要素解析解との比較であり、 $\xi \leq 0.5$ では良く一致しているが、 $\xi=0.75$ においては γ が小さくなる (つまり薄肉になる) ほど差が大きくなる様子が読み取れる。Kumar らは、その解析結果の妥当性の根拠として Buchalet-Bamford⁽³⁾ の有限要素解析解 ($\gamma=1/21$) との良好な一致をあげているが、文献⁽³⁾の解は $\xi > 0.5$ の精度に疑問があることが指摘されてい

る⁽²⁾ものである。すなわち、図2および図4に見られる薄肉円筒に対する提案法の信頼性から判断しても、Kumar らの $\xi=0.75$ における解に誤りがあると考えるのが妥当であろう。

図7は、厚肉円筒の内面および外面にき裂が軸対称に4個まである場合の Tracy の解⁽⁵⁾との比較である。両図から、外面き裂では全ケースについて約3%以内の誤差で一致し、内面き裂については $n=4, \xi=0.5$ の点を除いて (この点は Tracy の誤りであると考えられる) 約5%以内の誤差で一致していることが確認できる。またこのとき、式(20)から導いたとおり、複数の軸対称き裂の場合には n が増えるにつれて K 値が低下することが確認できる。

また、同図からき裂1個の場合と複数の軸対称き裂の場合では、 ξ に対する K 値の変動特性が異なり、特に内側き裂の場合にはき裂1個の場合に比べて2個の場合の K 値が相当大きくなる様子が読み取れる。これらの特性は、き裂1個の場合にはき裂進展に伴って軸力 (P) が低下する⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾のに対して、複数き裂の場合には P が変化しないという提案法の予測 (式(18)) に基づけば、容易に理解できよう。

5. 結 言

本論文では、まず第2章においてマトリクス法構造力学における不静定構造物の解析手順をコンプリメンタリエネルギーを仲介としてき裂を含む構造物の解析に拡張し、具体的には複数の任意形状の軸方向き裂を有する円筒の応力拡大係数を統一的に評価する簡易手法として一般的な形で定式化した。

次に、第3章では具体例を通して次のような提案法におけるマトリクス表記の利点を示した。

- (1) 計算機を用いた数値計算に適した形に整理されており、種々のパラメータスタディが容易に行なえる。
- (2) 解析過程を陽に表示でき、個々のパラメータの影響度の考察に極めて有効である。

さらに、第4章では信頼性の高い他者の解析結果との比較により、提案法の解析精度および適用限界に関する詳細な検討を行なった。その結果、実用上重要な $\gamma \leq 1/9$ 程度の円筒容器に対しては提案法の精度は極めて良く、 $\gamma=1/3$ 程度の厚肉円筒に対しても誤差は約5%以内であることが明らかとなった。

付 録

- (1) き裂のコンプライアンスマトリクス 図1(b)に示されるような負荷を受けるき裂材を考える時、このコンプリメンタリエネルギーはモード I, II の応力拡大係数を用いて以下の諸式から計算できる⁽¹⁵⁾ (ただ

し、以下では添え字 i を省略する)。

$$\left. \begin{aligned} \Omega^c &= \frac{1}{E'} \int_0^a (K_I^2 + K_{II}^2) da \\ \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} &= \left(\frac{P}{W} + p_s \right) f_P + \frac{M}{r_m W} f_M + F_L \\ \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} &= \frac{|F|}{W} f_F \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここで、 $E' = E/(1 - \nu^2)$ (E は縦弾性係数、 ν はポアソン比)、 f_F 、 f_P 、 f_M は有限幅補正係数であり、 F_L は自己平衡力の影響項である。式 (23) を実際に計算し結果をマトリクス表示すると

$$\left. \begin{aligned} \Omega^c &= \frac{1}{2} \left[\{R\}^T [\lambda] \{R\} + 2 \{R\}^T \{L\} \right. \\ &\quad \left. + 2 \{R\}^T \{H\} p_s + f^c(\sigma_L, p_s) \right] \\ [\lambda] &= \begin{bmatrix} \lambda_F & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_P & \lambda_{PM} \\ 0 & \lambda_{PM} & \lambda_M \end{bmatrix} \\ \{H\} &= W \{0 \quad \lambda_P \quad \lambda_{PM}\}^T \\ \{L\} &= W \{0 \quad L_P \quad L_M\}^T \\ f^c &= W^2 (\lambda_P p_s^2 + 2 L_P p_s + L_L) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \lambda_F &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_F^2 d\xi, \quad \lambda_P = \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P^2 d\xi, \\ \lambda_{PM} &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P f_M d\xi, \quad \lambda_M = \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_M^2 d\xi, \\ L_P &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_P F_L d\xi, \quad L_M = \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi f_M F_L d\xi, \\ L_L &= \frac{2\pi}{E'} \int_0^\xi \xi F_L^2 d\xi \end{aligned}$$

である。ここで、 $\xi = a/W$ である。

さて、配管・圧力容器等の構造健全性を考えるうえで重要となる円筒内外のき裂 (ただし二次元き裂) については、上記の補正係数として片側き裂材のもの⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾ が使え、具体的には次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_F(\xi) &= 4.886\xi - 11.383\xi^2 + 28.198\xi^3 \\ &\quad - 38.563\xi^4 + 20.555\xi^5 \\ f_P(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan \frac{\pi\xi}{2}} \left\{ 0.752 + 2.02\xi \right. \\ &\quad \left. + 0.37 \left(1 - \sin \frac{\pi\xi}{2} \right)^3 \right\} / \cos \frac{\pi\xi}{2} \\ f_M(\xi) &= \pm \left(\frac{6r_m}{W} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi\xi} \tan \frac{\pi\xi}{2}} \left\{ 0.923 \right. \\ &\quad \left. + 0.199 \left(1 - \sin \frac{\pi\xi}{2} \right)^4 \right\} / \cos \frac{\pi\xi}{2} \\ F_L(\xi, \sigma_L) &= \frac{2}{\pi} (1 - \xi)^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{G\sigma_L}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで、 f_F 、 f_P は内面き裂と外面き裂で同じであるが、 f_M はその符号が内面き裂の場合に負、外面き裂の場合に正となる。また、 F_L の計算ではき裂のある部分の σ_L 成分を集中荷重の集合と見なして積分するため、内面き裂と外面き裂で値が異なる。なお、 F_L の計算についての詳細は既報⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ を参照されたい。

(2) 曲がり梁のコンプライアンス 式 (10)、(11) からわかるとおり、本解析で必要となるのは曲がり梁のコンプライアンスのうち不静定力に対するもの、すなわち $[A]$ のみである。これを二次元弾性論⁽¹³⁾ の手法を用いて計算すると

$$[A] = \begin{bmatrix} H_2/2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 + H_2/2 & H_1 \\ 0 & H_1 & H_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{24\pi r_m^3}{E'W^3} h_1, \quad H_2 = \frac{24\pi r_m^3}{E'W^3} h_2, \\ h_1 &= \frac{4\gamma^2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \gamma^2}{2\gamma} \log \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right)^2 \right\}^{-1}, \\ h_2 &= \frac{4\gamma^2(1 + \gamma^2)}{3} \left(\frac{1 + \gamma^2}{2\gamma} \log \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} - 1 \right)^{-1} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\gamma (= W/2r_m)$ は円筒の厚肉度を表わすパラメータであり、薄肉 ($\gamma \ll 1$) の時に $h_1 = h_2 = 1$ となって、 $[A]$ が初等材料力学の手法による解と一致することが確認できる。

文 献

- (1) Bowie, O. L. and Freese, C. E., *Eng. Fract. Mech.*, 4 (1972), 315.
- (2) Labbens, R., Pellissier, A., and Heliot, J., *ASTM STP*, 590 (1976), 368.
- (3) Buchalet, C. B. and Bamford, W. H., *ASTM STP*, 590 (1976), 385.
- (4) Grandt, A. F., *Int. J. Fract.*, 14 (1978), R-221.
- (5) Tracy, P. G., *Eng. Fract. Mech.*, 11 (1979), 291.
- (6) Andrasic, C. P. and Parker, A. P., *Eng. Fract. Mech.*, 19 (1984), 187.
- (7) Kumar, V., German, M. D. and Shih, C. F., *ASTM STP*, 803 (1983), I-306.
- (8) 陳・西谷・森, 機論, 57-515, A (1989), 1537.
- (9) 松原・岡村, 材料, 37-420 (1988), 1029.
- (10) 高橋・松原・岡村, 機論, 57-533, A (1991), 11.
- (11) 高橋・岡村, 機論, 57-534, A (1991), 291.
- (12) Tauchert, T. R., *Energy Principles in Structural Mechanics*, (1974), McGraw-Hill.
- (13) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity* (3rd ed.), (1970), McGraw-Hill.
- (14) Cheng, W. and Finnie, I., *Eng. Fract. Mech.*, 32 (1989), 767.
- (15) 岡村, 線形破壊力学入門, (1976), 95, 培風館.
- (16) 市川・高松, 機論, 51-464, A (1985), 1115.
- (17) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., *The Stress Analysis of Cracks Handbook* (2nd ed.), (1985), Del Research Corp.