表面き裂を有する円筒の引張りおよび曲げ*

陳 玳 珩^{*1}, 西 谷 弘 信^{*2}, 森 和 也^{*3}

Tension or Bending of Cylindrical Vessels with a Surface Crack

Dai-heng CHEN, Hironobu NISITANI and Kazuya MORI

Analysis of an external semi-elliptical circumferential surface crack in hollow cylinders is practically important in order to evaluate the static or fatigue strength of pressure vessels or pipings. However there are few papers which treated this problem. In this paper, the accurate values of stress intensity factor for this problem are calculated by the body force method. The differences between the stress intensity factor for this problem and that for a semi-elliptical surface crack in a plate are discussed. According to these results, the stress intensity factors for a semi-elliptical surface crack in a hollow cylinder can be approximated by those for a semi-elliptical surface crack in a plate within about 3 % in the case when $t/R_i \leq 0.4$, $0.5 \leq b/a \leq 1.0$ and $b/t \leq 0.6$. The stress intensity factors for a semi-elliptical surface crack in a shaft were also calculated in order to check the accuracy of this method. Their approximate expressions, effective for practical application, are shown.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Semi-Elliptical Surface Crack, Cylinder, Pipings, Shaft

1. 結 言

円筒形容器や配管は、内圧の変化、内容物の重量変化あるいは温度変化などによって円筒の軸方向に引張り（圧縮）あるいは曲げの力が作用することがある。本論文ではこのような荷重による円筒の破壊問題を取扱うのに必要な円筒の外面に存在する円周方向表面き裂（図1）の応力拡大係数を計算する。この応力拡大係数を求める試みはこれまであまり行われていない。

そこで本論文では、体積力法⁽¹⁾⁽²⁾を用いて、この問題に対する高精度の応力拡大係数を求めた。また、それらが平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数で、どの程度近似できるかについても検討した。本問題において内半径 $R_i=0$ とおけば、丸棒に存在する半だ円表面き裂の問題となる。この問題の応力拡大係数は、すでに他の研究者によっていくつかの計算結果が求められており^{(3)~(5)}、これらと比較することにより本解析結果の精度の確認も行った。

2. 解 析 方 法

解析方法は体積力法⁽¹⁾⁽²⁾である。これまでの体積力法においては、仮想境界上に集中力を連続的に分布させ境界条件を満足させた。本論文では、内外円筒面に関しては、連続的に分布させるべき集中力（体積力）を仮想境界の外側の点に作用する有限個の集中力で近似する方法⁽⁶⁾を採用した。この方法によれば、境界条件として、分割した仮想境界の各区間の合力境界条件を

図1 表面き裂を有する円筒の引張りおよび曲げ

* 原稿受付 平成3年1月7日。

^{*1} 正員、九州工業大学情報工学部（〒820 飯塚市大字川津 680-4）。^{*2} 正員、九州大学工学部（〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1）。^{*3} 正員、久留米工業高等専門学校（〒830 久留米市小森野町 1232）。

容易に用いることが可能となり、高精度の解を短い計算時間で求めることができる。複雑な三次元問題に対しては、この解析方法は特に有効である。

2.1 内外円筒面の未知数 内外円筒面の分割を図2に示す。本来曲面であるべき境界を折れ面で近似する。分割数 N_θ , N_z は、それぞれ $N_\theta = 2N_k$, $N_z = N_k$ とし、円周方向の分割はき裂と接する区間ではき裂の分割と等しくし、残りの区間は等比分割する。また、軸方向の分割も等比分割する。各区間の中心から外部方向に適当に離れた点に r , θ , z 方向(つまり、半径、円周、軸方向)の集中力を作用させた。各区間の集中力の大きさが境界条件から定まる未知数である。

2.2 き裂面の未知数 き裂面の分割は図3に示すように、半円を半径1の半円に写像して、写像面での極座標 (ρ, β) について N_k 等分割を行った。そしてき裂面上には引張形の体積力対を分布させた。また図3中の点線で示される区間にも、き裂の区間と対称になるように同じ重みの体積力対を分布させた。これはき裂面が円筒面と交わる点付近の境界条件を良好にするためである。

ここでは応力拡大係数を精度よく求めるため、各区間に分布させるべき体積力対の密度 $\psi(\rho, \beta)$ を(重み) $\times$ (基本密度関数) という形に仮定する。

$$\psi(\rho, \beta) = W(\rho, \beta) \sqrt{1 - \rho^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $\sqrt{1 - \rho^2}$ の項は無限体に1個の半円状き裂がある問題を体積力法で表現するときの、き裂面に分布させるべき体積力対のパターンであり、本解析の基本密度関数である。 $W(\rho, \beta)$ はその密度関数に掛けるべき重みで、本解析では、各区間ごとに一定とした。その値が境界条件から定まる未知数である。

図2 円筒面の分割

図3 き裂面の分割

2.3 境界条件と応力拡大係数 内外円筒面の各区間に作用させるべき集中力の大きさとき裂面の各区間に作用させるべき体積力対の重み W は、本論文では円筒面における各区間の合力条件とき裂面における合区間の midpoint の応力条件とから求めた。

き裂前縁の応力拡大係数 K_I は、その区間の重み W_c を用いて次式から求められる。

$$K_I = \frac{(1 - 2\nu)}{4(1 - \nu)^2} \sqrt{\pi b} W_c \quad \dots\dots\dots (2)$$

3. 計算結果および考察

円筒の外面に存在する半円表面き裂(図1)の最深点Cにおける応力拡大係数を求めた。以下の計算では、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。

3.1 計算結果の精度の検討 本解析において、計算結果に含まれる誤差の主な原因は、次の二つである。一つは、本来無限長であるべき内外円筒面の荷重範囲 L_z を有限長さとしていることであり、もう一つは、連続的に満足されるべき境界条件を有限個の応力境界条件もしくは合力境界条件に置き換えていることである。図4は、形状パラメータ $t/R_i = 0.1$, $b/t = 0.2$, $a/b = 1.0$ の場合の無次元化した応力拡大係数 F_I^T , F_I^B に及ぼす b/L_z の関係を示している。この図より、円筒面の荷重範囲 L_z を有限としていることによる誤差は、 $L_z/b \geq 2$ と置くことによって 10^{-3} 以下となることがわかる。また、図5は、図4と同一パラメータにおける無次元化した応力拡大係数 F_I^T , F_I^B と分割数 N_k との関係を示している。この図より、 $N_k = 4$ (総分割数 272) において、すでによい外そう性を示していることがわかる。以上の結果から、応力拡大係数を計算するに当たっては、 $L_z/b = 10$ とし、 $N_k = 8, 10$ のときの値によ

図4 円筒面の荷重範囲 L_z と解の収束性の例

表 1 引張りを受ける丸棒の F_I^T

$(F_I^T = K_I^T / \sigma^T / \pi b, \nu = 0.3)$		b/t						
b/a	t	0.100	0.125	0.200	0.250	0.375	0.400	0.500
1.0	0.659	0.666 0.646**	0.668 0.665*	0.675 0.675**	0.682 0.683*	0.711 0.714*	0.719 0.725**	0.755 0.758*
0.6	0.832	0.839 0.823**	-	0.852 0.854**	-	-	0.925 0.940**	-
0.5	0.885	-	0.891 0.890*	-	0.914 0.920*	0.966 0.976*	-	1.046 1.064*
0.4	0.939	0.941 0.923**	-	0.950 0.950**	-	-	1.028 1.051**	-
0.25	1.023	-	1.002 0.996*	-	0.995	-	-	-

*:Nisitani et al. [4], **:Shiratori et al. [5]

表 2 曲げを受ける丸棒の F_I^B

$(F_I^B = K_I^B / \sigma^B / \pi b, \nu = 0.3)$		b/t			
b/a	t	0.100	0.200	0.400	
1.0	0.659	0.618 0.604**	0.579 0.582**	0.520 0.528**	
0.6	0.832	0.783 0.771**	0.739 0.744**	0.683 0.699**	
0.4	0.939	0.880 0.867**	0.826 0.830**	0.762 0.786**	

**:Shiratori et al. [5]

図 5 F_I^T, F_I^B と分割数 N_k の関係

って厳密解を推定した。

3・1 丸棒の引張りにおける F_I^T 円筒の問題において内半径 $R_i = 0$ とおけば、丸棒の問題となる。表 1 は、丸棒の引張りにおける無次元化した応力拡大係数 F_I^T の本解析結果と西谷らの結果⁽⁴⁾ および白鳥らの結果⁽⁵⁾ との比較である。それぞれとの差は、ほぼ 2% 以下である。

3・2 丸棒の曲げにおける F_I^B 表 2 は、丸棒の曲げにおける無次元化した応力拡大係数 F_I^B の本解析結果と白鳥らの結果⁽⁵⁾ との比較である。この場合もかなりよい一致を示している。

3・3 円筒の引張りにおける F_I^T 表 3 に、き裂の最深点における無次元化した応力拡大係数 F_I^T とき裂深さ b/t の関係を示す。

図 6～8 は、引張りを受ける円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数と引張りを受ける平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数⁽⁷⁾ との比を示したものである。

これらの図より、実用上重要な円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数は、円筒面厚さ $t/R_i \leq 0.4$ の範囲において、 $0.5 \leq b/a \leq 1.0$, $t/b \leq 0.6$ であれば、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近

表 3 引張りを受ける円筒の F_I^T

$(F_I^T = K_I^T / \sigma^T / \pi b, \nu = 0.3)$		b/t			
t/R_i	b/a	0.2	0.4	0.6	
0.1	1.0	0.659	0.666	0.683	0.702
	0.5	0.885	0.902	0.964	1.041
	0.25	1.023	1.080	1.203	1.356
0.2	1.0	0.659	0.666	0.683	0.703
	0.5	0.885	0.902	0.959	1.030
	0.25	1.023	1.064	1.163	1.275
0.3	1.0	0.659	0.667	0.684	0.705
	0.5	0.885	0.901	0.953	1.021
	0.25	1.023	1.058	1.135	1.202
0.4	1.0	0.659	0.667	0.684	0.706
	0.5	0.885	0.900	0.950	1.015
	0.25	1.023	1.047	1.119	1.198
0.5	1.0	0.659	0.667	0.685	0.707
	0.5	0.885	0.899	0.946	1.011
	0.25	1.023	1.041	1.102	1.151

表 4 曲げを受ける円筒の F_I^B

$(F_I^B = K_I^B / \sigma^B / \pi b, \nu = 0.3)$		b/t			
t/R_i	b/a	0.2	0.4	0.6	
0.1	1.0	0.659	0.657	0.666	0.675
	0.5	0.885	0.892	0.942	1.006
	0.25	1.023	1.066	1.177	1.313
0.2	1.0	0.659	0.651	0.651	0.654
	0.5	0.885	0.882	0.918	0.966
	0.25	1.023	1.042	1.116	1.199
0.3	1.0	0.659	0.645	0.640	0.637
	0.5	0.885	0.874	0.897	0.934
	0.25	1.023	1.027	1.070	1.100
0.4	1.0	0.659	0.640	0.629	0.622
	0.5	0.885	0.867	0.881	0.906
	0.25	1.023	1.009	1.039	1.071
0.5	1.0	0.659	0.635	0.621	0.609
	0.5	0.885	0.861	0.865	0.884
	0.25	1.023	0.997	1.010	1.007

似されることがわかる (誤差約 3% 以内)。

3・4 円筒の曲げにおける F_I^B 表 4 に、き裂の最深点における無次元化した応力拡大係数 F_I^B とき裂深さ b/t の関係を示す。

図 9～11 は、曲げの場合について、円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数と平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比を示したものである。

これらの図より、引張りの場合と同様に、円筒面厚さ $t/R_i \leq 0.4$ の範囲において、 $0.5 \leq b/a \leq 1.0$, $t/b \leq 0.6$ であれば、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似されることがわかる (誤差約 3% 以

図 6 K_I^T の平板との比較 ($t/R_i=0.1$) 図 9 K_I^B の平板との比較 ($t/R_i=0.1$) 図 7 K_I^T の平板との比較 ($t/R_i=0.2$) 図 10 K_I^B の平板との比較 ($t/R_i=0.2$) 図 8 K_I^T の平板との比較 ($t/R_i=0.4$) 図 11 K_I^B の平板との比較 ($t/R_i=0.4$)

内)。

3・5 応力拡大係数の近似式 以上で求めた数値計算結果を基に、引張りおよび曲げを受ける円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数の近似式を求めた。

引張り：

$$K_I^T = \alpha K_{I\text{PLATE}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\alpha = 1 + 0.3(\mu - 0.4)\lambda^{2.5}(t/R_i)/\mu^{2.8} \quad \dots\dots\dots (4)$$

曲げ：

$$K_I^B = \beta K_{I\text{PLATE}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\beta = 1 + 0.35(\mu - 0.43)\lambda^{2.5}(t/R_i)/\mu^{2.4} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\lambda = b/t, \quad \mu = b/a \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで $K_{I\text{PLATE}}$ は平板に存在する半だ円表面き裂に、図 12 に示されるような遠方荷重が作用するときの応力拡大係数で、石田⁽⁷⁾ によって次のように与えられている。

$$\frac{K_{I\text{PLATE}}}{\sqrt{\pi b}} = \sigma_P^T F_P^T + \sigma_P^B F_P^B \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} F_P^T = & 1.1362 - 0.3927\mu - 0.3454\mu^2 + 0.2623\mu^3 \\ & + \lambda(-0.2179 + 0.2354\mu + 0.3773\mu^2 \\ & - 0.4189\mu^3) + \lambda^2(5.0486 - 16.7939\mu \\ & + 19.9861\mu^2 - 8.0212\mu^3) + \lambda^3(-2.6383 \\ & + 8.6007\mu - 9.6332\mu^2 + 3.5118\mu^3) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_P^B = & 1.1359 - 0.3929\mu - 0.3440\mu^2 + 0.2613\mu^3 \\ & + \lambda(-1.5184 + 0.4178\mu + 0.7846\mu^2 \\ & - 0.6329\mu^3) + \lambda^2(4.3721 - 13.9152\mu \\ & + 16.2550\mu^2 - 6.4894\mu^3) + \lambda^3(-3.9502 \\ & + 12.5334\mu - 14.6137\mu^2 + 5.8110\mu^3) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(8)における σ_P^T , σ_P^B の値は引張りおよび曲げの場合それぞれ次のようになる。

引張り：

$$\sigma_P^T = \sigma^T \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\sigma_P^B = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

曲げ：

$$\sigma_P^T = \sigma^B \frac{2 + t/R_i}{2(1 + t/R_i)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

図 12 平板に作用させるべき遠方荷重

$$\sigma_P^B = \sigma^B \frac{t/R_i}{2(1 + t/R_i)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(3), (5)における α , β は円筒の曲率の影響を補正する係数でそれぞれ 1 の場合が平板に対応している。

式(3), (5)の誤差は、 $0.25 \leq b/a \leq 1.0$ のとき $t/R_i \leq 0.3$ であれば 2% 未満、 $t/R_i \leq 0.5$ であれば 5% 未満である。

4. 結 言

半だ円表面き裂を有する円筒の引張りまたは曲げにおける応力拡大係数を求めた。この値は、円筒面厚さ $t/R_i \leq 0.4$ の範囲において、 $0.5 \leq b/a \leq 1.0$, $b/t \leq 0.6$ であれば、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数でよく近似される(誤差約 3% 以内)。また、実用に便利のように、引張りまたは曲げを受ける円筒に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数の近似式を、平板に存在する半だ円表面き裂の応力拡大係数との比の形で与えた。

文 献

- (1) 西谷, 機誌, 70-580 (1967), 627.
- (2) 西谷・陳, 体積法, (1987), 1, 培風館.
- (3) 木内・青木・小林, 鉄と鋼, 68-13 (1982), 1830.
- (4) 西谷・陳, 機論, 50-453, A (1984), 1077.
- (5) 白鳥・三好・境・張, 機論, 53-488, A (1987), 779.
- (6) 陳・西谷・森, 機論, 55-515, A (1989), 1532.
- (7) 石田・野口・機論, 48-429, A (1982), 607.