直交異方性不均質板の熱応力解析*

菅 野 良 弘^{*1}, 飯 塚 栄 治^{*2}
中 馬 康 晴^{*3}, 谷 川 義 信^{*1}

An Analysis of Thermal Stresses in Orthotropic Nonhomogeneous Plates

Yoshihiro SUGANO, Eiji IIZUKA,
Yasuharu CHUMAN and Yoshinobu TANIGAWA

An analytical expression is presented for the thermal stresses in orthotropic nonhomogeneous infinite plates with arbitrary nonhomogeneities both in elastic properties and coefficient of linear thermal expansion, and temperature variation through the thickness of the plate. Numerical calculations showing the effect of the nonhomogeneous thermal and elastic properties on the relaxation of the thermal stresses increasing by the orthotropic properties, are carried out for the case of exponentially or linearly varying thermal conductivity, Young's modulus and coefficient of linear thermal expansion through the thickness of the plate. An application of the numerical results to the design of functionally gradient materials (FGM) is discussed.

Key Words: Elasticity, Thermal Stress, Orthotropic Nonhomogeneous plate, Transient and Steady-state Temperature Fields, Thermal Stress Relaxation, Analytical Solution

1. 緒 言

スペースプレーンの開発のためには、超高温、高温度落差に耐える傾斜機能材料 (FGM) の創成が必須条件であるということから不均質材料の熱応力問題の解析が一躍脚光をあびてきた。FGM は材料自身に熱応力緩和機能を発揮させるために、材料に不均質特性を積極的に付与させたものである。このため材料の合成に先立って FGM の実際の使用熱的環境下での熱応力解析を実行し、最適な傾斜組成 (不均質特性) を探索する材料設計が必要である。

しかし、材料合成時の熱的環境下での FGM の熱応力解析は比較的良好に研究されてきたが、使用環境下での FGM (広く不均質材料も含めて) の熱応力問題の解析は十分とは言えない。これは、一般に不均質体の非定常温度場の解析解の導出が極端に困難であることに起因する。著者らは、前報において厚さ方向に不均質性と温度分布をもつ無限平板⁽¹⁾、半径方向に不均質性をもつ中空円板^{(2)~(4)}、中空円筒⁽⁵⁾、の熱応力問題の解析解を示した。

しかし、SiC/C⁽⁶⁾などの FGM のように C を使用すると異方性はまぬがれず、また、FGM を母相にだ円体の分散相がランダムに配向した多相混合系の材料と考えた場合、構成相のすべてが等方性であっても分散相のアスペクト比が 10 以上の場合は、ヤング率や線膨張係数などに大きな異方性が生じることが若島らによって SiC/Al⁽⁷⁾について報告されている。このような材料の異方性と不均質性が熱応力の増大または緩和にどのようにかわるのかという問題は研究されていない。

本研究では、前報⁽¹⁾と同様の熱的環境下で、板厚方向に不均質性を有する直交異方性無限平板の熱応力を解析する方法を示し、材料の異方性による熱応力の増大を板厚方向に不均質性を付与することによって緩和できるかという観点からの考察を試みる。

図 1 座標軸と加熱条件

* 原稿受付 平成 3 年 1 月 7 日。

^{*1} 正員, 大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町 4-804)。^{*2} 学生員, 大阪府立大学大学院。^{*3} 学生員, 大阪府立大学工学部。

2. 解 析

2.1 理論 厚さ方向に z 軸をもつ座標系 (x, y, z) を設定し、板厚方向に温度分布と材料特性の不均質性をもつ厚さ $2h$ の直交異方性不均質無限平板の熱応力を解析する。平板は薄く、両表面には外力が作用しないものとする、この無限平板の板面内の応力成分は次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}(z, t), \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(z, t) \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

次に、 x, y, z 方向のヤング率を E_x, E_y, E_z また線膨張係数を $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 、 x 方向の伸びに対する y 方向、 z 方向の縮みの比を表すポアソン比を ν_{yx}, ν_{zx} 、 y 方向の伸びに対する x 方向、 z 方向の縮みの比を表すポアソン比を ν_{xy}, ν_{zy} とすると、応力とひずみの関係式は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \nu_{xy} \frac{\sigma_{yy}}{E_y} + \alpha_x T \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E_y} - \nu_{yx} \frac{\sigma_{xx}}{E_x} + \alpha_y T \\ \varepsilon_{zz} &= -\nu_{zx} \frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \nu_{zy} \frac{\sigma_{yy}}{E_y} + \alpha_z T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

相反定理より、

$$\nu_{xy}/E_y = \nu_{yx}/E_x \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $E_x, E_y, \alpha_x, \alpha_y$ などは次式のように不均質性を有している。

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_x(z), E_y = E_y(z), \nu_{yx} = \nu_{yx}(z) \\ \nu_{zx} &= \nu_{zx}(z), \nu_{xy} = \nu_{xy}(z), \nu_{zy} = \nu_{zy}(z) \\ \alpha_x &= \alpha_x(z), \alpha_y = \alpha_y(z), \alpha_z = \alpha_z(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

式(1)、(2)よりひずみ成分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}(z, t), \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}(z, t) \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}(z, t), \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

したがって、この場合のひずみの適合条件式は、次式に帰着する。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

式(1)の応力成分は応力の釣合方程式を恒等的に満足している、式(6)のひずみの適合条件式が満足されれば、式(2)のひずみ成分が存在することになる。

式(2)、(6)より σ_{xx}, σ_{yy} を決定すると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E_x}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \{ \nu_{xy}(C_1 + C_2 z) + C_3 + C_4 z \\ &\quad - (\alpha_x + \nu_{xy}\alpha_y) T \} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E_y}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \{ C_1 + C_2 z + \nu_{yx}(C_3 + C_4 z) \\ &\quad - (\nu_{xy}\alpha_x + \alpha_y) T \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式(7)の未知係数 $C_1 \sim C_4$ は、温度場が z の線形関数

で与えられる場合またはすべての熱応力が恒等的に零である場合以外、板の端部において応力フリーの条件は満足されないことより、次の合力、合モーメント 0 の条件を用いて決定される。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h}^h \sigma_{xx} dz &= 0, \quad \int_{-h}^h \sigma_{xx} z dz = 0 \\ \int_{-h}^h \sigma_{yy} dz &= 0, \quad \int_{-h}^h \sigma_{yy} z dz = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(8)より式(7)の未知係数 $C_1 \sim C_4$ を決定してやれば次のようになる。

$$C_n = \Delta_n / \Delta_0 \quad (n=1 \sim 4) \dots\dots\dots (9)$$

ここで、

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ I_2 & I_5 & I_4 & I_6 \\ I_7 & I_8 & I_1 & I_2 \\ I_8 & I_9 & I_2 & I_5 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

ただし、式(9)の Δ_n は、それぞれ Δ_0 の第 n 列の要素を $(I_{F1}, I_{M1}, I_{F2}, I_{M2})$ に置換して得られるものであり、 $I_1 \sim I_9$ と $I_{F1}, I_{F2}, I_{M1}, I_{M2}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{-h}^h \{ E_x \nu_{xy} / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_2 &= \int_{-h}^h \{ z E_x \nu_{xy} / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_3 &= \int_{-h}^h \{ E_x / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_4 &= \int_{-h}^h \{ z E_x / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_5 &= \int_{-h}^h \{ z^2 E_x \nu_{xy} / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_6 &= \int_{-h}^h \{ z^2 E_x / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_7 &= \int_{-h}^h \{ E_y / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_8 &= \int_{-h}^h \{ z E_y / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_9 &= \int_{-h}^h \{ z^2 E_y / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_{F1} &= \int_{-h}^h \{ E_x \alpha_x T (1 + \nu_{xy}\alpha_y / \alpha_x) \\ &\quad / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_{F2} &= \int_{-h}^h \{ E_x \alpha_x T \{ E_y \alpha_y / (E_x \alpha_x) + \nu_{xy} \} \\ &\quad / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_{M1} &= \int_{-h}^h \{ z E_x \alpha_x T (1 + \nu_{xy}\alpha_y / \alpha_x) \\ &\quad / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \\ I_{M2} &= \int_{-h}^h \{ z E_x \alpha_x T \{ E_y \alpha_y / (E_x \alpha_x) + \nu_{xy} \} \\ &\quad / (1 - \nu_{xy}\nu_{yx}) \} dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

次に、式(4)においてポアソン比は異方性のみ有し、均質とし、式(12)のようにおく。

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu_{xy0}, \quad \nu_{yx} = \nu_{yx0} \dots\dots\dots (12)$$

このとき式(9)の $C_1 \sim C_4$ は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\{-I_2(\nu_{xy0}I_{M1}-I_{M2})+I_5(\nu_{xy0}I_{F1}-I_{F2})\}}{((\nu_{xy0}-1/\nu_{yx0})(I_1I_5-I_2^2))} \\ C_2 &= \frac{\{I_1(\nu_{xy0}I_{M1}-I_{M2})-I_2(\nu_{xy0}I_{F1}-I_{F2})\}}{((\nu_{xy0}-1/\nu_{yx0})(I_1I_5-I_2^2))} \\ C_3 &= \frac{\nu_{xy0}\{I_2(I_{M1}/\nu_{yx0}-I_{M2})-I_5(I_{F1}/\nu_{yx0}-I_{F2})\}}{((\nu_{xy0}-1/\nu_{yx0})(I_1I_5-I_2^2))} \\ C_4 &= \frac{\nu_{xy0}\{-I_1(I_{M1}/\nu_{yx0}-I_{M2})+I_2(I_{F1}/\nu_{yx0}-I_{F2})\}}{((\nu_{xy0}-1/\nu_{yx0})(I_1I_5-I_2^2))} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、式(13)の $I_1, I_2, I_5, I_{F1}, I_{F2}, I_{M1}, I_{M2}$ は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\nu_{xy0} \int_{-h}^h E_x dz}{(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})} \\ I_2 &= \frac{\nu_{xy0} \int_{-h}^h z E_x dz}{(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})} \\ I_5 &= \frac{\nu_{xy0} \int_{-h}^h z^2 E_x dz}{(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})} \\ I_{F1} &= \frac{\int_{-h}^h \{E_x \alpha_x T(1+\nu_{xy0}\alpha_y/\alpha_x)\} dz}{(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})} \\ I_{F2} &= \frac{\int_{-h}^h [E_x \alpha_x T\{E_y \alpha_y/(E_x \alpha_x) + \nu_{xy0}\}] dz}{(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})} \\ I_{M1} &= \frac{\int_{-h}^h \{z E_x \alpha_x T(1+\nu_{xy0}\alpha_y/\alpha_x)\} dz}{(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})} \\ I_{M2} &= \frac{\int_{-h}^h [z E_x \alpha_x T\{E_y \alpha_y/(E_x \alpha_x) + \nu_{xy0}\}] dz}{(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(7)は、Saint-Venantの原理により、平板の端部から板厚の長さ以上に離れたところでは十分正確である。

2・2 温度と熱応力の解析 最初平板の温度 T は一様に零であるとし、 $t>0$ において $z=-h$ と $z=h$ が $\phi(t)$ と $\psi(t)$ の温度に保たれるものとする。このとき、厚さ方向にのみ温度分布および熱伝導率の不均質性を有する不均質平板の熱伝導方程式、初期条件式、境界条件式は、次のようになる。

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$T=0, \quad t=0 \dots\dots\dots (16)$$

$$T=\phi(t), \quad z=-h \dots\dots\dots (17)$$

$$T=\psi(t), \quad z=h \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 c, ρ はそれぞれこの平板の比熱、密度であり、解析上一定値とする。

2・2・1 指数関数の熱伝導率の場合 ここでは熱伝導率 $\lambda(z)$ が板厚方向の指数関数として表されるとき、次のように仮定する。

$$\lambda(z) = \lambda_0 e^{-\eta(z+h)} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 λ_0 は $z=-h$ の境界上での熱伝導率に相当する一定値であり、 η は任意定数である。いま、不均質板の表面温度を、

$$\phi(t)=0, \quad \psi(t)=T_0 \dots\dots\dots (20)$$

とすると、非定常温度関数は次式で与えられる⁽¹⁾。

$$\begin{aligned} T(z, t) = T_0 & \left[\frac{e^{\eta(z+h)} - 1}{e^{2\eta h} - 1} \pi e^{\eta(z-h)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\eta/2)^2 \kappa_0 \omega_n^2 t}}{J_1^2(\omega_n) - J_1^2(\omega_n e^{\eta h})} \frac{J_1(\omega_n) J_1(\omega_n e^{\eta h})}{J_1(\omega_n e^{\eta(z+h)/2})} Y_1(\omega_n) \right. \\ & \left. - Y_1(\omega_n e^{\eta(z+h)/2}) J_1(\omega_n) \right] \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで、 $\kappa_0 = \lambda_0 / \rho c$ 、また $J_1(\quad)$ 、 $Y_1(\quad)$ はそれぞれ1次の第1種、第2種 Bessel 関数であり、 ω_n は次の超越方程式を満足する第 n 番めの正根である。

$$J_1(\omega_n e^{\eta h}) Y_1(\omega_n) - J_1(\omega_n) Y_1(\omega_n e^{\eta h}) = 0 \dots\dots\dots (22)$$

2・2・2 線形関数の熱伝導率の場合 ここでは熱伝導率 $\lambda(z)$ が板厚方向の線形関数として表されるとき、次のように仮定する。

$$\lambda(z) = \lambda_0(1 + \eta z) \dots\dots\dots (23)$$

このとき、式(17)、(18)、(20)を満足する定常温度場は次のようになる。

$$T = T_0 \frac{\ln\{(1+\eta z)/(1-\eta h)\}}{\ln\{(1+\eta h)/(1-\eta h)\}} \dots\dots\dots (24)$$

2・2・3 熱伝導率が一定の場合 この場合の非定常温度関数は次式で与えられる⁽¹⁾。

$$\begin{aligned} T(z, t) = T_0 & \left[-\frac{z+h}{2h} + \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2h} \sin \frac{n\pi z}{h} e^{-\kappa_0 n^2 \pi^2 t/h^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2h} e^{-\kappa_0 (2n+1)^2 \pi^2 t/4h^2} \right\} \right] \\ & \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

2・2・4 熱応力解析 式(7)の熱応力式において、 x, y 方向のヤング率、線膨張係数を式(26)のように添字 0

を付けた物性値に相当する一定値と添字 1 を付けた板厚方向の不均質性を表す無次元量の積の形で表す。

$$E_x = E_{x0} \bar{E}_{x1}(\zeta), \quad E_y = E_{y0} \bar{E}_{y1}(\zeta), \quad \alpha_x = \alpha_{x0} \bar{\alpha}_{x1}(\zeta), \quad \alpha_y = \alpha_{y0} \bar{\alpha}_{y1}(\zeta) \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで, $\zeta = z/h$ である。さらに異方性を表す定数として, 添字 0 を付けた物性値に相当する一定値の x 方向と y 方向の比を E, α, ν とし, 次のようにおく。

$$E = E_{y0}/E_{x0}, \quad \alpha = \alpha_{y0}/\alpha_{x0}, \quad \nu = \nu_{xy0}/\nu_{yx0} \quad \dots\dots\dots (27)$$

このとき式(3)より,

$$\bar{E}_{x1} = \bar{E}_{y1}, \quad E = \nu \quad \dots\dots\dots (28)$$

いま, ヤング率, 線膨張係数の不均質性が板厚方向に線形変化するものとし, $\bar{E}_{x1}, \bar{\alpha}_{x1}, \bar{\alpha}_{y1}$ を次のようにおく。

$$\bar{E}_{x1} = 1 + E_{x1}\zeta, \quad \bar{\alpha}_{x1} = 1 + \alpha_{x1}\zeta, \quad \bar{\alpha}_{y1} = 1 + \alpha_{y1}\zeta \quad \dots\dots\dots (29)$$

このとき式(14)の I_1, I_2, I_5 の積分は, 容易に次のように得られる。

$$I_1 = \frac{2\nu_{xy0}E_{x0}h}{1-\nu_{xy0}\nu_{yx0}}, \quad I_2 = \frac{2\nu_{xy0}E_{x0}E_{x1}h^2}{3(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})}, \quad I_5 = \frac{2\nu_{xy0}E_{x0}h^3}{3(1-\nu_{xy0}\nu_{yx0})} \quad \dots\dots\dots (30)$$

また, $I_{F1}, I_{M1}, I_{F2}, I_{M2}$ については, 次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} I_{F1} &= (\bar{I}_{Fa} + \alpha\nu_{xy0}\bar{I}_{Fb})E_{x0}\alpha_{x0}T_0h, & I_{M1} &= (\bar{I}_{Ma} + \alpha\nu_{xy0}\bar{I}_{Mb})E_{x0}\alpha_{x0}T_0h^2 \\ I_{F2} &= (E\alpha\bar{I}_{Fb} + \nu_{xy0}\bar{I}_{Fa})E_{x0}\alpha_{x0}T_0h, & I_{M2} &= (E\alpha\bar{I}_{Mb} + \nu_{xy0}\bar{I}_{Fa})E_{x0}\alpha_{x0}T_0h^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

2・2・1 項の定常温度関数については, 式(14)の $I_{F1} \sim I_{M2}$ の積分も以下のように解析的に評価できる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_{Fa} &= \left\{ -\frac{2E_{x1}\alpha_{x1}}{3} - 2 + \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}}(1+E_{x1})(1+\alpha_{x1}) - \frac{1}{\bar{\eta}}(1-E_{x1})(1-\alpha_{x1}) - \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}^2}(2E_{x1}\alpha_{x1} + E_{x1} + \alpha_{x1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{\eta}^2}(-2E_{x1}\alpha_{x1} + E_{x1} + \alpha_{x1}) + \frac{2E_{x1}\alpha_{x1}}{\bar{\eta}^3}(e^{2\bar{\eta}} - 1) \right\} / (e^{2\bar{\eta}} - 1) \\ \bar{I}_{Fb} &= \left\{ -\frac{2E_{x1}\alpha_{y1}}{3} - 2 + \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}}(1+E_{x1})(1+\alpha_{y1}) - \frac{1}{\bar{\eta}}(1-E_{x1})(1-\alpha_{y1}) - \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}^2}(2E_{x1}\alpha_{y1} + E_{x1} + \alpha_{y1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{\eta}^2}(-2E_{x1}\alpha_{y1} + E_{x1} + \alpha_{y1}) + \frac{2E_{x1}\alpha_{y1}}{\bar{\eta}^3}(e^{2\bar{\eta}} - 1) \right\} / (e^{2\bar{\eta}} - 1) \\ \bar{I}_{Ma} &= \left[-\frac{2}{3}(E_{x1} + \alpha_{x1}) + \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}}(1+E_{x1})(1+\alpha_{x1}) + \frac{1}{\bar{\eta}}(1-E_{x1})(1-\alpha_{x1}) - \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}^2}\{3E_{x1}\alpha_{x1} + 2(E_{x1} + \alpha_{x1}) + 1\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{\eta}^2}\{3E_{x1}\alpha_{x1} - 2(E_{x1} + \alpha_{x1}) + 1\} - \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}^3}\{-6E_{x1}\alpha_{x1} + 2(E_{x1} + \alpha_{x1})\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\bar{\eta}^3}\{-6E_{x1}\alpha_{x1} + 2(E_{x1}\alpha_{x1})\} - \frac{6E_{x1}\alpha_{x1}}{\bar{\eta}^4}(e^{2\bar{\eta}} - 1) \right] / (e^{2\bar{\eta}} - 1) \\ \bar{I}_{Mb} &= \left[-\frac{2}{3}(E_{x1} + \alpha_{y1}) + \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}}(1+E_{x1})(1+\alpha_{y1}) + \frac{1}{\bar{\eta}}(1-E_{x1})(1-\alpha_{y1}) - \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}^2}\{3E_{x1}\alpha_{y1} + 2(E_{x1} + \alpha_{y1}) + 1\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{\eta}^2}\{3E_{x1}\alpha_{y1} - 2(E_{x1} + \alpha_{y1}) + 1\} - \frac{e^{2\bar{\eta}}}{\bar{\eta}^3}\{-6E_{x1}\alpha_{y1} + 2(E_{x1} + \alpha_{y1})\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\bar{\eta}^3}\{-6E_{x1}\alpha_{y1} + 2(E_{x1}\alpha_{y1})\} - \frac{6E_{x1}\alpha_{y1}}{\bar{\eta}^4}(e^{2\bar{\eta}} - 1) \right] / (e^{2\bar{\eta}} - 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\dots\dots\dots (33)$$

ただし, $\bar{\eta} = \eta h$ 。

この場合の非定常温度関数については, $I_{F1} \sim I_{M2}$ は数値積分によって評価せねばならない。また, 2・2・2 項の定常温度場の場合については, 次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_{Fa} &= \frac{E_{x1}\alpha_{x1}}{3} + \frac{E_{x1} + \alpha_{x1}}{2} + 1 - \left[\frac{E_{x1}\alpha_{x1}}{3\bar{\eta}^3} \left\{ \frac{2}{3}(\bar{\eta}^3 + 3\bar{\eta}) - \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} - \frac{(E_{x1} + \alpha_{x1})}{2\bar{\eta}^2} \left\{ -2\bar{\eta} + \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{\eta}} \left\{ 2\bar{\eta} - \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} \right] / \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \\ \bar{I}_{Fb} &= \frac{E_{x1}\alpha_{y1}}{3} + \frac{E_{x1} + \alpha_{y1}}{2} + 1 - \left[\frac{E_{x1}\alpha_{y1}}{3\bar{\eta}^3} \left\{ \frac{2}{3}(\bar{\eta}^3 + 3\bar{\eta}) - \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} - \frac{(E_{x1} + \alpha_{y1})}{2\bar{\eta}^2} \left\{ -2\bar{\eta} + \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{\eta}} \left\{ 2\bar{\eta} - \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} \right] / \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_{Ma} &= \frac{E_{x1}\alpha_{x1}}{4} + \frac{E_{x1} + \alpha_{x1}}{2} + \frac{1}{2} - \left[\frac{E_{x1}\alpha_{x1}}{4\bar{\eta}^4} \left\{ -\frac{2}{3}\bar{\eta}^3 - 2\bar{\eta} + \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} + \frac{(E_{x1} + \alpha_{x1})}{3\bar{\eta}^3} \right. \\
 &\quad \times \left. \left\{ \frac{2}{3}\bar{\eta}^3 + 2\bar{\eta} + \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} + \frac{1}{2\bar{\eta}^2} \left\{ -2\bar{\eta} + \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} \right] / \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \\
 \bar{I}_{Mb} &= \frac{E_{x1}\alpha_{y1}}{4} + \frac{E_{x1} + \alpha_{y1}}{2} + \frac{1}{2} - \left[\frac{E_{x1}\alpha_{y1}}{4\bar{\eta}^4} \left\{ -\frac{2}{3}\bar{\eta}^3 - 2\bar{\eta} + \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} + \frac{(E_{x1} + \alpha_{y1})}{3\bar{\eta}^3} \right. \\
 &\quad \times \left. \left\{ \frac{2}{3}\bar{\eta}^3 + 2\bar{\eta} + \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} + \frac{1}{2\bar{\eta}^2} \left\{ -2\bar{\eta} + \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right) \right\} \right] / \ln\left(\frac{1+\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}\right)
 \end{aligned}$$

.....(34)

さらに、2・2・3項の非定常温度場の場合については、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_{Fa} &= \frac{E_{x1}\alpha_{x1} + E_{x1} + \alpha_{x1}}{3} + 1 - \frac{2(E_{x1} + \alpha_{x1})}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2\tau}}{n^2} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)^2\pi^2\tau/4}}{(2n+1)^2} \left\{ E_{x1}\alpha_{x1} + 1 - \frac{8E_{x1}\alpha_{x1}}{(2n+1)^2\pi^2} \right\} \\
 \bar{I}_{Fb} &= \frac{E_{x1}\alpha_{y1} + E_{x1} + \alpha_{y1}}{3} + 1 - \frac{2(E_{x1} + \alpha_{y1})}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2\tau}}{n^2} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)^2\pi^2\tau/4}}{(2n+1)^2} \left\{ E_{x1}\alpha_{y1} + 1 - \frac{8E_{x1}\alpha_{y1}}{(2n+1)^2\pi^2} \right\} \\
 \bar{I}_{Ma} &= \frac{E_{x1}\alpha_{x1}}{5} + \frac{E_{x1} + \alpha_{x1} + 1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2\tau}}{n^2} \left\{ -E_{x1}\alpha_{x1} - 1 + \frac{6E_{x1}\alpha_{x1}}{(n\pi)^2} \right\} - \frac{8}{\pi^2} \\
 &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)^2\pi^2\tau/4}}{(2n+1)^2} \left\{ E_{x1} + \alpha_{x1} - \frac{8E_{x1}\alpha_{x1}}{(2n+1)^2\pi^2} \right\} \\
 \bar{I}_{Mb} &= \frac{E_{x1}\alpha_{y1}}{5} + \frac{E_{x1} + \alpha_{y1} + 1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2\pi^2\tau}}{n^2} \left\{ -E_{x1}\alpha_{y1} - 1 + \frac{6E_{x1}\alpha_{y1}}{(n\pi)^2} \right\} - \frac{8}{\pi^2} \\
 &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)^2\pi^2\tau/4}}{(2n+1)^2} \left\{ E_{x1} + \alpha_{y1} - \frac{8E_{x1}\alpha_{y1}}{(2n+1)^2\pi^2} \right\}
 \end{aligned}$$

.....(35)

ただし、 $\tau = k_0 t / h^2$ (36)

3. 数 値 計 算

本研究では、異方性によって増大した熱応力を材料

の不均質性によって緩和できるかを検討するため、ここでは熱伝導率の不均質性パラメータ $\bar{\eta}$ を -1 と 1 、ヤング率、線膨張係数の不均質性パラメータを次のように定めた。

$$E_{x1} = E_{y1} = -0.5, 0, 0.5, \quad \alpha_{x1} = \alpha_{y1} = -0.5, 0, 0.5$$

また、異方性パラメータを次のようにとった。

$$E = 0.5, 1, 2, \quad \alpha = 0.5, 1, 2$$

また、次の数値計算諸元を用いた。

$$\nu_{xy0} = 0.3, \quad \tau = 0.001, 0.01, 0.1, 1.0, 10.0, \infty$$

さらに、無次元温度、熱応力を次式のように導入した。

$$\bar{T} = T/T_0$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / \{E_{x0}\alpha_{x0}T_0 / (1 - \nu_{xy0}\nu_{yx0})\}$$

図2、3は、式(21)で得られた非定常温度関数において、 $\bar{\eta}=1$ と $\bar{\eta}=-1$ の場合を示したものである。図2は $\bar{\eta}=1$ 、つまり熱伝導率が加熱面に向かって減少するため熱は加熱面から内部に伝わり難く、大きな温度差が生じるので、定常状態においても下に凸の曲線となる。図3は $\bar{\eta}=-1$ 、つまり熱伝導率が加熱面に向かって増加するので、逆に熱は加熱面から内部に伝わりやすく、あまり温度差が生じないため、定常状態においては上に凸の曲線となる。以後の熱応力分布は式(21)の温度場のみについて解析されたものである。

まず、線膨張係数の異方性によって増大した熱応力の緩和に有効な線膨張係数の不均質性について考察す

図2 不均質板の非定常温度分布 ($\bar{\eta}=1$)

図3 不均質板の非定常温度分布 ($\bar{\eta}=-1$)

る。図4, 5は, 線膨張係数の異方性が, 定常熱応力に与える影響を示したものである。実線で示された等方性の場合と比較して, 破線で示される $\alpha=2$ のとき, $\bar{\eta}=1$ と $\bar{\eta}=-1$ のどちらの場合にも熱応力の絶対値が増大している。図6は, 図4において $\bar{\eta}=1, \alpha=2$ の場合に増大した定常熱応力を, 線膨張係数の不均質性によって緩和できるかを示したものである。実線で示

された線膨張係数が均質の場合と比較して, 一点鎖線で示される $\alpha_{x1}=\alpha_{y1}=-0.5$, すなわち線膨張係数を加熱面側に向かって減少させると, 熱応力は極端に緩和されることがわかる。同様に, 図7は, 図5において $\bar{\eta}=-1, \alpha=2$ の場合に増大した定常熱応力が, 線膨張係数の不均質性によって緩和できる様子を示したものであり, 実線で示された線膨張係数が均質の場合と比較して, 線膨張係数が, 加熱面側に向かって増加する $\alpha_{x1}=\alpha_{y1}=0.5$ のとき, 熱応力が極端に緩和されるのがわかる。次に図8~12は, 上記の線膨張係数の不

図4 線膨張係数の異方性の影響

図5 線膨張係数の異方性の影響

図6 不均質線膨張係数による定常熱応力の緩和

図7 不均質線膨張係数による定常熱応力の緩和

図8 不均質板の非定常熱応力分布

図9 不均質板の非定常熱応力分布

均質性による定常時の熱応力緩和が非定常時の熱応力緩和にも有効であるかについて考察したものである。図 8, 9 は $\bar{\eta}=1$ と $\bar{\eta}=-1$ の場合について、熱応力の時間的変動を示したものである。図 10 は、図 4 と同様、 $\bar{\eta}=1$ の場合の線膨張係数の異方性が熱応力に及ぼす影響を $\tau=0.01$ について示したものである。また、図 11 は、図 10 の破線で示された $\alpha=2$ の線膨張係数の異方性によって増大した熱応力が、線膨張係数の不均質性 $\alpha_{x1}=\alpha_{y1}=-0.5$ によって緩和できることを示したものである。このことと図 6 より、 $\bar{\eta}=1$ の場合は、全時間にわたって線膨張係数の不均質性 $\alpha_{x1}=\alpha_{y1}=-0.5$ が、熱応力緩和に非常に有効であることがわかる。図 12 は、図 3 のように温度分布曲線が非定常時の

下に凸から、定常時の上に凸へ変わる $\bar{\eta}=-1$ の場合について、 $\tau=0.01$ のときの熱応力緩和に有効な線膨張係数の不均質性を考察したものである。この図より、実線で示された線膨張係数が均質の場合と比較して一点鎖線で示されるように、 $\alpha_{x1}=\alpha_{y1}=-0.5$ の線膨張係数の不均質性を与えたとき熱応力は緩和される。したがって、 $\bar{\eta}=-1$ の場合は、定常時と非定常時で熱応力緩和に有効な線膨張係数の不均質性は異なることがわかる。これは、定常時に加熱面側に広い高温領域を生じる場合の熱応力緩和のためには、この広い高温

図 10 非定常熱応力に及ぼす異方性線膨張係数の影響

図 11 不均質線膨張係数による非定常熱応力の緩和

図 12 不均質線膨張係数による非定常熱応力の緩和

図 13 ヤング率の異方性の影響

図 14 ヤング率の異方性の影響

図 15 不均質ヤング率による定常熱応力の緩和

度領域によって増大した曲げによる引張応力を、線膨張係数を加熱面側に向かって増加させることによって、加熱面側の圧縮熱応力を増大させればよいことを示している。図13~16は、ヤング率の異方性と不均質性が熱応力に及ぼす影響を考察したものである。図13, 14は、 $\bar{\eta}=1$ と $\bar{\eta}=-1$ においてヤング率の異方性が、定常熱応力に与える影響を示したものである。実線で示された等方性の場合と比較して、破線で示される $E=2$ のとき、 $\bar{\eta}=1$ と $\bar{\eta}=-1$ のどちらの場合も熱応力の絶対値が増大している。図15, 16は、図13, 14において $E=2$ のときに増大した定常熱応力を、ヤング率の不均質性によって緩和できるかを示したものである。この図から、ヤング率の不均質性による緩和効果は顕著ではなく、板内の場所によって緩和の傾向は異なるが、セラミック側(高温側)の近辺の引張熱応力を緩和するためには $E_{x1}=E_{y1}=-0.5$ の不均質性が有効である。最後に、図17, 18は、 $\tau=0.01$ の非定常時においてもヤング率の異方性 $E=2$ によって増大した熱応力が、定常時と同様の意味において、 $E_{x1}=E_{y1}=-0.5$ の不均質性によって緩和されることを示したものである。以上の数値計算結果を、高温側SiC、低温側Alの傾斜機能材料⁽⁷⁾に適用して考察を加える。Al, SiCの熱伝導率、線膨張係数、ヤング率は、それぞれ233 W/m·K, 23.4×10^{-6} K⁻¹, 70 GPa; 65 W/m·K, $4.3 \times$

10^{-6} K⁻¹, 427 GPaであるから、この場合の各種不均質パラメータは、 $\bar{\eta} > 0$, $\alpha_{x1} = \alpha_{y1} < 0$, $E_{x1} = E_{y1} > 0$ となる。したがって、線膨張係数の厚さ方向の不均質性による熱応力緩和は可能であるが、ヤング率の不均質性によって熱応力は増大する傾向にある。一般に、セラミックのヤング率は金属のそれより大きく、このヤング率の不均質性による熱応力の増大が生じるため、これを考慮にいたした線膨張係数の不均質性(傾斜組成)を決定する必要がある。

最後に、熱応力を生じない場合について簡単な考察を行う。式(6)のひずみの適合条件式を満足し、熱応力を生じないひずみは、式(2)より $\epsilon_{xx} = \alpha_x(z)T = D_1z + D_2$, $\epsilon_{yy} = \alpha_y(z)T = D_3z + D_4$ となる。これが成立するのは(i)線膨張係数が均質で、 $T = Az + B$, すなわち熱的に均質な平板の定常温度場の場合、(ii)一様な温度 $T(z) = \text{一定}$ で、線膨張係数が線形関数 $\alpha_x(z) = H_1z + H_2$, $\alpha_y(z) = H_3z + H_4$ の場合である。したがって、一様な温度のもとでも、 $\alpha_x(z)$, $\alpha_y(z)$ が線形関数以外の関数で表現される場合は熱応力は生じることになる。

4. 結 言

厚さ方向に温度分布と不均質特性を有する直交異方性不均質無限平板の熱応力の簡単な解析式を、一般的な弾性的不均質特性のもとで提案した。次に、数値計算を行って、異方性の存在による熱応力の増大を厚さ方向の不均質特性によって緩和できるかについて検討し、次の結論を得た。

(1) 線膨張係数の異方性によって増大した熱応力は、線膨張係数の厚さ方向の不均質性によって緩和可能である。ただ、非定常時と定常時の温度分布がともに下に凸となる $\bar{\eta}=1$ の場合は、熱応力緩和に適した不均質パラメータが同じになるが、定常時において上に凸の温度分布を示す $\bar{\eta}=-1$ の場合は、非定常時と定常時において熱応力緩和に適した不均質パラメータ

図16 不均質ヤング率による定常熱応力の緩和

図17 不均質ヤング率による非定常熱応力の緩和

図18 不均質ヤング率による非定常熱応力の緩和

が逆の符号の値となる。

(2) ヤング率の異方性によって増大した熱応力の、ヤング率の厚さ方向の不均質性による緩和効果は、顕著ではなく、板内の場所によって緩和の傾向は異なるが、高温側(セラミック側)およびその近辺の引張熱応力の緩和に有効なヤング率の不均質性は、非定常時、定常時とも同じである。

(3) 高温側 SiC, 低温側 Al の傾斜機能材料を想定したとき、 $\bar{\eta} > 0$, $\alpha_{x1} = \alpha_{y1} < 0$, $E_{x1} = E_{y1} > 0$ の場合に対応し、線膨張係数の不均質性による熱応力緩和は可能であるが、ヤング率の不均質性によって結論(2)

の緩和効果は期待できない。

文 献

- (1) Sugano, Y., *Ing.-Arch.*, 57-2 (1987), 147.
- (2) 菅野, 機論, 54-501, A (1988), 1015.
- (3) 菅野・明石, 機論, 54-509, A (1989), 89.
- (4) 菅野・木元, 機論, 57-536, A (1991), 845.
- (5) 菅野・田中, 機械学会関西支部第65期講演概要集, (1990-3), 13.
- (6) 若島, 傾斜機能材料研究会・会報, No. 4 (1989-4), 3.
- (7) Wakashima, K., Tsukamoto, H. and Choi, B. H., *Proc. The Korea-Japan Metals Sympo. on Composite Materials*, (1988-11), 102.