Green 形構成式を用いた平面ブロックの
弾性大変形シミュレーション*渡 部 修*¹, 原 田 隆*²Large Deformation Analysis of Elastic Plane Block
using the Green-rate Constitutive Equation

Osamu WATANABE and Takashi HARADA

In the large deformation analysis, the utilized constitutive equation will play an important role on the finite element solutions. The present paper shows the numerical solutions for large elastic deformation using the constitutive equation with the Green derivative, which has not been studied in details in previous works. Three kinds of shear deformations of two dimensional block in plane strain conditions are taken as examples, and discussed are the effects of isoparametric shape functions and gaussian integration points on the finite element solutions.

Key Words: Finite Element Method, Constitutive Equation, Finite Deformation Theory

1. 緒 言

固体・構造物の大変形シミュレーションには, Jaumann の応力速度を用いた構成式が, ほとんどの有限要素解析コードで用いられている. Green 速度の構成式を用いた解析例は, Hallquist⁽¹⁾ が開発した二次元静的大変形解析プログラム NIKE 2D が挙げられる程度である. Hallquist の開発コードでは, 応力増分を求めるのに Green の応力速度中の物質スピンを計算する代わりに, 変形こう配テンソルの極分解から得られる回転テンソルによる直交逆変換から得られる構成式を基礎に, 応力増分を計算している. 著者は前報⁽²⁾において, Green 形構成式を用いた Updated Lagrange 流のポテンシャルエネルギー停留原理を示し, Jaumann 形の構成式の変分原理に比べ, 変形スピンによる仕事を考慮する必要があることを指摘したが, Hallquist の定式化ではこの項を考慮していない.

本研究は, 平面ひずみ状態にある二次元平面ブロックの弾性大変形シミュレーションを行い, Green 速度構成式と Jaumann 速度構成式の相違が有限要素法を

用いた数値解にどのように反映するかについての基礎資料を求めることにある. また構成式だけでなく, 要素種類, 数値積分次数が数値解に及ぼす影響を, 3 種類のせん断変形を受ける問題を例に, 系統的に検討する. 理論解のわかっている平行四辺形状に変形する単純せん断問題やひし形状に変形する純粋せん断問題では, 数値解の精度を検討し, 単純せん断問題で左右辺の拘束を取り除き自由度の増した一般せん断問題では数値解析上の問題点について論ずる.

2. 有限要素剛性方程式

2.1 基礎関係式 変形こう配テンソルを F とすると, 次の極分解が知られている.

$$F = R \cdot U \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで, R は直交回転テンソル, U は対称変形テンソルである.

$$U = U', \quad R' = R^{-1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで記号 $(\quad)^{-1}$ と $(\quad)'$ はそれぞれ逆変換と転置を表す. このときストレッチングテンソル D とスピンテンソル W は次のように表示できる.

$$D = R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1})_s \cdot R' \quad \dots\dots\dots (3a)$$

$$W = \Omega + R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1})_a \cdot R' \quad \dots\dots\dots (3b)$$

ここで, 記号 $(\dot{\quad})$ は物質時間微分を表し, $(\quad)_s$ と

* 平成 2 年 11 月 5 日 関西支部第 249 回講演会において講演, 原稿受付 平成 3 年 2 月 12 日.

*¹ 正員, 筑波大学構造工学系 (〒305 つくば市天王台 1-1-1).

*² ファナック(株)商品開発研究所 (〒401-05 山梨県忍野村).

()_a は () 内のテンソルの対称成分と反対称成分をそれぞれ表す。また $\mathbf{\Omega}$ は物質スピンで次のとおりである。

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}' = -\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}' \quad (4)$$

変形後の形状に対する速度ベクトルを $\mathbf{v}$ 、この配演算子を ∇ とすると、式(3)の代わりに $\mathbf{D}$ と $\mathbf{W}$ は次のようになる。

$$\mathbf{D} = (\mathbf{vD})_s, \quad \mathbf{W} = (\mathbf{vD})_a \quad (5)$$

2.2 構成式と仮想仕事の原理 塑性のない弾性大変形問題に対して Green 速度を用いた構成式は次のように表示できる。

$$\dot{\mathbf{T}}_G = \frac{1}{J} \{ 2\mu_0 \mathbf{D} + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I} \} \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{T}$ は Cauchy の真応力、 μ_0 と λ_0 は Lamé の定数、 $\mathbf{I}$ は 2 階の単位テンソル、 $\text{tr}(\cdot)$ は () 内のテンソルと単位テンソルとの内積を表す。また、 J は体積変化率で $J = \det \mathbf{U}$ である。 $\dot{\mathbf{T}}_G$ は Green の応力速度で次のとおりである。

$$\dot{\mathbf{T}}_G \equiv \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega} + (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad (7)$$

Jaumann 速度を用いた構成式は次のように表示できる。

$$\dot{\mathbf{T}}_J = 2\mu_0 \mathbf{D} + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I} \quad (8)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{T}}_J$ は Jaumann の応力速度で次のとおりである。

$$\dot{\mathbf{T}}_J \equiv \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} + (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad (9)$$

Green 形の構成式(6)や Jaumann 形の構成式(8)に依らず、仮想仕事の原理は $\delta \mathbf{v}$ を仮想速度として次のように同一表示となる。

$$\int \left\{ \delta U^p + \frac{1}{2} \mathbf{T} : \delta (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right\} dV \\ = \int \rho \dot{\mathbf{a}} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int \dot{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{v} dS_t \quad (10)$$

ここで、 ρ は密度、 $\dot{\mathbf{a}}$ は等価体積力速度、 $\dot{\mathbf{t}}$ は表面力速度、 dV は体積要素、 dS_t は力学的境界における面積要素である。 δU^p はひずみエネルギーの変分で Green 形構成式の場合、次のようになる。

$$\delta U^p = \delta U_G^p + \delta U_{\mathbf{r}}^p \quad (11)$$

ここで

$$\delta U_G^p = \dot{\mathbf{T}}_G : \delta \mathbf{D} - \mathbf{T} : \delta (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \quad (12\cdot a)$$

$$\delta U_{\mathbf{r}}^p = -2[(\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T}] : \delta \mathbf{D} \quad (12\cdot b)$$

$\delta U_{\mathbf{r}}^p$ は変形スピンによってなされる仕事で、本研究の数値計算では荷重ベクトルとして取扱う。

Jaumann 形構成式の場合は次のようになる⁽³⁾

$$\delta U^p = \delta U_J^p + \delta U_{\mathbf{r}}^p \quad (13)$$

ここで

$$\delta U_J^p = \dot{\mathbf{T}}_J : \delta \mathbf{D} - \mathbf{T} : \delta (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \quad (14\cdot a)$$

$$\delta U_{\mathbf{r}}^p = 0 \quad (14\cdot b)$$

ひずみエネルギーの変分 δU_G^p と δU_J^p は、次のようにポテンシャルとして求めることができる。

$$U_G^p = \frac{1}{2J} \{ 2\mu_0 (\mathbf{D} : \mathbf{D}) + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{D})^2 \} \\ - \mathbf{T} : (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \quad (15)$$

$$U_J^p = \frac{1}{2} \{ 2\mu_0 (\mathbf{D} : \mathbf{D}) + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{D})^2 \} \\ - \mathbf{T} : (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) \quad (16)$$

2.3 テンソル成分による表示 三次元直交デカルト座標系を用い、座標軸を X_i 、直交単位基底ベクトルを $\mathbf{e}_i$ とする。速度 $\mathbf{v}$ とこの配演算子 ∇ は次のように表すことができる。

$$\mathbf{v} = v_i(X_j) \mathbf{e}_i, \quad \nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial X_i} \quad (17)$$

このとき、 $\mathbf{D}$ と $\mathbf{W}$ のテンソル成分は式(5・a)、(5・b)から次のとおりである。

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (18\cdot a)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (18\cdot b)$$

ここで例えば、記号 $v_{i,j}$ は v_i を X_j で偏微分することを表す。また構成式(6)、(8)は次の成分表示となる。

$$\dot{\mathbf{T}}_{Gij} = \frac{1}{J} A_{ijkl} D_{kl} \quad (19\cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{Jij} = A_{ijkl} D_{kl} \quad (19\cdot b)$$

ここで

$$\dot{\mathbf{T}}_{Gij} = \dot{T}_{ij} - \Omega_{ik} T_{kj} + T_{ik} \Omega_{kj} + D_{il} T_{lj} \quad (20\cdot a)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{Jij} = \dot{T}_{ij} - W_{ik} T_{kj} + T_{ik} W_{kj} + D_{il} T_{lj} \quad (20\cdot b)$$

また、弾性率テンソルは次のとおりである。

$$A_{ijkl} = \mu_0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (21)$$

また、 $\dot{\mathbf{a}}$ と $\dot{\mathbf{t}}$ を次のように成分展開する。

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{a}_i \mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{t}} = \dot{t}_i \mathbf{e}_i \quad (22)$$

式(17)-(21)を式(10)に代入して、Green 形構成式における仮想仕事の原理を得る。

$$\int \left\{ \frac{1}{2J} A_{ijkl} \delta (D_{ij} D_{kl}) - T_{ij} \delta (D_{ik} D_{kj}) \right. \\ \left. - 2(W_{ik} - \Omega_{ik}) T_{kj} \delta D_{ij} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} T_{ij} \delta (v_{i,k} v_{k,j}) \right\} dV \\ = \int \rho \dot{a}_i \delta v_i dV + \int \dot{t}_i \delta v_i dS_t \quad (23)$$

Jaumann 形構成式の場合は次のように表示できる。

$$\int \left\{ \frac{1}{2} A_{ijkl} \delta (D_{ij} D_{kl}) - T_{ij} \delta (D_{ik} D_{kj}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} T_{ij} \delta (v_{i,k} v_{k,j}) \right\} dV$$

$$= \int \rho \ddot{a}_i \delta v_i dV + \int \dot{t}_i \delta v_i dS_t \quad (24)$$

2・4 離散化 速度 v は、有限要素の節点速度 $\dot{q}_a$ を用いて次のように離散化する。

$$v = v_i(X_j) e_i \equiv v_{ia}(X_j) \dot{q}_a e_i \quad (25)$$

v_{ia} が X_j を変数とする形状関数である。このとき v_i の X_j に関する偏微分は、次のように表示できる。

$$v_{i,j} = v_{ia,j} \dot{q}_a \equiv v_{ija} \dot{q}_a \quad (26)$$

したがって、 D と W の成分表示を次のように表す。

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{ija} + v_{jia}) \dot{q}_a \equiv D_{ija} \dot{q}_a \quad (27\cdot a)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(v_{ija} - v_{jia}) \dot{q}_a \equiv W_{ija} \dot{q}_a \quad (27\cdot b)$$

このとき Green 形構成式を用いた剛性方程式は、式(23)から次のように表示できる。

$$(K_{ab}^{(0)} + K_{ab}^{(1)} + K_{ab}^{(2)}) \dot{q}_b = \dot{f}_a + \dot{f}_{ra} \quad (28)$$

ここで

$$K_{ab}^{(0)} = \int \frac{1}{J} A_{ijkl} D_{ija} D_{klb} dV \quad (29\cdot a)$$

$$K_{ab}^{(1)} = \int T_{ij} v_{ika} v_{jkb} dV \quad (29\cdot b)$$

$$K_{ab}^{(2)} = - \int 2 T_{ij} D_{ika} D_{jkb} dV \quad (29\cdot c)$$

$$\dot{f}_a = \int \rho \ddot{a}_i v_{ia} dV + \int \dot{t}_i v_{ia} dS_t \quad (29\cdot d)$$

$$\dot{f}_{ra} = \int 2(W_{ik} - \Omega_{ik}) T_{kj} D_{ija} dV \quad (29\cdot e)$$

また、Jaumann 形構成式を用いた剛性方程式は、式(24)から次のとおり。

$$(K_{ab}^{(0)} + K_{ab}^{(1)} + K_{ab}^{(2)}) \dot{q}_b = \dot{f}_a \quad (30)$$

ここで、 $K_{ab}^{(1)}$ と $K_{ab}^{(2)}$ が共通で、 $K_{ab}^{(0)}$ が次のようになる。

$$K_{ab}^{(0)} = \int A_{ijkl} D_{ija} D_{klb} dV \quad (31)$$

ここで変形スピンによる荷重項 $\dot{f}_{ra}$ は省略できる。

2・5 Green 形構成式に用いるテンソルの計算

この場合は、物質スピン Ω を求める必要があるが、この算定方法は次のとおりである⁽³⁾。まず、次のテンソル Z を非回転ひずみ速度 $\dot{E}_R$ を用いて計算する。

$$Z \equiv \dot{E}_R \cdot U - U \cdot \dot{E}_R \quad (32)$$

(a) Simple shear (b) Pure shear (c) Generalized shear

図 1 3 種類のせん断変形

ここで

$$\dot{E}_R \equiv R' \cdot D \cdot R \quad (33)$$

式(32)、(33)の成分表記は次のとおりである。

$$Z_{ij} = \dot{E}_{Rik} U_{kj} - U_{ik} \dot{E}_{Rkj} \quad (34\cdot a)$$

$$\dot{E}_{Rij} = R_{ki} D_{kjl} R_{lj} \quad (34\cdot b)$$

ここで連続体スピン W_{ik} と式(32)、(34・a)の Z_{ik} は、交代テンソル ϵ_{ijk} を導入し、スピンベクトル w_j と z_j により表す。

$$W_{ik} = \epsilon_{ijk} w_j \quad (35\cdot a)$$

$$Z_{ik} = \epsilon_{ijk} z_j \quad (35\cdot b)$$

このとき物質スピン Ω_{ik} に対応するスピンベクトル ω_i は次のように計算できる。

$$\omega_i = w_i + [\delta_{ij} U_{jj} - U_{jj}]^{-1} z_j \quad (36)$$

式(36)で得られた ω_i を基に、次式から Ω_{ik} を求める。

$$\Omega_{ik} = \epsilon_{ijk} \omega_j \quad (37)$$

またこのために必要な変形こう配テンソル F は現在の時刻を t 、時間増分を Δt として、相対変形こう配テンソル $F_i(t + \Delta t)$ を導入して、次の鎖則から求める。

$$F(t + \Delta t) = F_i(t + \Delta t) \cdot F(t) \quad (38)$$

また $F_i(t + \Delta t)$ は、Euler 近似⁽⁴⁾ から次のように計算する。

$$F_i(t + \Delta t) = (I + v \nabla \Delta t) \quad (39)$$

さらに時刻 $(t + \Delta t)$ での回転テンソル $R(t + \Delta t)$ および変形テンソル $U(t + \Delta t)$ は、式(39)を式(38)に代入して得られる $F(t + \Delta t)$ を極分解して求める。

$$F(t + \Delta t) = R(t + \Delta t) \cdot U(t + \Delta t) \quad (40)$$

3. 数 値 解 析

1 辺の長さが 1 の平面ひずみ状態にある正方形平面ブロックに、図 1 に示すような 3 種類のせん断変形を加える。これらをそれぞれ単純せん断、純粋せん断、一般せん断と呼ぶことにする。単純せん断は高さを保ったまま平行四辺形に、純粋せん断はひし形状に、周辺を直線に保ったまま変形させる。単純せん断では体積変化率 J が 1 のままであるが、連続体スピン W と物質スピン Ω が異なるのに対し、純粋せん断では連続体スピンと物質スピンの同一であるが、体積変化 J が変化することに特徴がある。一般せん断では、左右辺を拘束せずに上辺を直線に保ったまま横方向に変形させるもので、現実に起こり得る変形である。また構成式の他、次の項目が数値解に及ぼす影響についても検討する。

(a) 要素種類：4 節点線形要素と 8 節点二次要素のアイソパラメトリック要素を用いる。

(b) 積分次数：Gauss の数値積分を用いるが、厳

密な積分 (full integration) のほか、ロッキング現象を回避するための低減積分 (reduced integration) について検討する。4 節点線形要素の場合は 1×1 の 1 点積分, 8 節点二次要素の場合は 2×2 の 4 点積分が低減積分である。

なお、ヤング率 E_0 は 206 MPa ($=21\,000\text{ kgf/mm}^2$)、ポアソン比 $\nu_0=0.3$ として計算し、結果は無次元化して表示する。

3・1 単純せん断問題 縦横を 4×4 分割し、4 節点線形アイソパラメトリック要素を用い、増分刻みを $\Delta e=0.06$ とした場合のブロック中央での応力-変位曲線を、厳密解⁽⁴⁾とともに図 2 に示す。Green 形構成式の場合、 $e=4$ 程度で数値解が厳密解から離れ発散し始めているが、これは離散化で生じた内部自由度による面内座屈が生じたためで、Hill⁽⁵⁾ の解の一意性に対する十分条件が破綻し、剛性マトリックスの固有値が負になることに相当する。また Jaumann 形構成式では応力値が低いため、Green 形に見られるような傾向は観察されなかった。

3・2 純粋せん断問題 Green 形構成式を用いた場合の理論解は、 θ を左右辺の角度として次のとおりである (付録参照)。

$$T_{11} = \mu_0 \left\{ \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \ln (\cos \theta) + \tan \theta \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right\} + \nu_0 \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \ln (\cos \theta) \quad (41 \cdot a)$$

$$T_{12} = T_{21} = \mu_0 \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \quad (41 \cdot b)$$

$$T_{22} = \mu_0 \left\{ \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \ln (\cos \theta) - \tan \theta \ln \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right\} + \nu_0 \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \ln (\cos \theta) \quad (41 \cdot c)$$

Jaumann 形の場合、理論解を解析的に閉じた形で求めることができないので、基礎式を基に増分刻みを細かく取って計算した。図 3 に増分刻み $\Delta \theta = 1.5 \text{ deg}$ とし、4 節点線形要素で厳密に数値積分をしたときの数値解と理論解の比較を示すが、単純せん断問題におけるような数値解が発散する傾向は観察されない。

3・3 一般せん断問題 図 1 (c) に示す問題で、完全積分の 4 節点線形アイソパラメトリック要素、増分刻み $\Delta e=0.05$ としたときの変形図を図 4 に示す。 e

図 2 単純せん断問題における応力-たわみ線図

図 3 純粋せん断問題における応力-たわみ線図

$e=2$ の近傍では Green 形構成式の場合、要素形状が異常になっているのがわかる。またこのときの平面ブロック中央での応力-たわみ線図を図 5 に示すが、構成式による相違は単純せん断問題の場合に比べ減少している。

図 5 において、 $e=1.7$ 近傍で数値解に段差が現れているのは、単純せん断問題と同様に解の分岐による不安定現象が生じたためと考えられる。式(28)、(30)の剛性方程式を次のように置く。

$$K_{ab} \dot{q}_b = \dot{f}_a \quad \text{すなわち、} \quad K \cdot \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{f}} \quad (42)$$

式(42)の固有値解析を行い、 $\lambda_{(i)}$ を固有値、 $\mathbf{p}_{(i)}$ を固有ベクトルとすると次式が成立する。

$$K \cdot \mathbf{p}_{(i)} = \lambda_{(i)} \mathbf{p}_{(i)} \quad (43)$$

このとき節点速度ベクトル $\dot{\mathbf{q}}$ は固有ベクトル $\mathbf{p}_{(i)}$ の

表 1 一般せん断問題における固有値の変動

e	$\lambda_{(1)}$	$\lambda_{(2)}$	$\lambda_{(3)}$	$\lambda_{(4)}$	$\lambda_{(5)}$
1.50	12446	17013	34369	41523	45599
1.55	11554	14612	29204	36819	42610
1.60	10604	12025	23638	31840	40023
1.65	8987	9369	17772	26695	37887
1.70	5008	6635	12691	21687	36299
1.75	-686	39	10349	17052	35358
1.80	-26205	-25568	8565	13553	25519
1.85	-39710	-39073	7771	11897	23343
1.90	-54370	-53782	6919	10153	20354
1.95	-70285	-69747	5900	7958	16866
2.00	-87877	-87347	4488	5018	13171
2.05	-108839	-108212	1117	2049	9820
2.10	-159622	-157094	-16513	-14788	4635

Unit : (N/mm)

図 4 一般せん断問題における変形図

モードにより次のように展開できる。

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1} \dot{\lambda}_{(i)} \mathbf{p}_{(i)} \quad (44)$$

ここで振幅 $\dot{\lambda}_{(i)}$ は次のように計算できる⁽⁶⁾。

$$\dot{\lambda}_{(i)} = \frac{\mathbf{p}_{(i)} \cdot \dot{\mathbf{f}}}{\lambda_{(i)}} \quad (45)$$

表 1 に、Jaumann 形構成式、4 節点線形要素、完全積分を用いた数値解の、各増分ごとの固有値を小さい順から 5 個示す。このとき、一辺の長さを 100 mm としている。表からわかるように、図 5 の数値解の段差が現れるのは、負の固有値が現れる点 $e=1.75$ に対応していることがわかる。また固有値が小さいものから順に 10 個までの固有モード ($\dot{\lambda}_{(i)} \mathbf{p}_{(i)}$) を、不安定現象が起きる前の $e=1.5$ と、不安定後の $e=1.8$ について図 6 に示す。 $e=1.8$ の時、負の固有値に対する $i=1$ と 2 のモードは特に異常なものではない。図 2 (a) の単純せん断問題での $e=4$ での不安定性と、図 5 の一般せん断問題での不安定性は、ともに離散化による変位自由度に起因するものである。また実際の材料は塑性変形を起こし、応力も降伏応力程度に減じられるため、このような不安定現象は起こしにくいと考えられる。

図 7 は、 $e=1.4$ における変形形状を、要素種類、構成式、数値積分法の違いによる影響を示したものである。4 節点線形要素の場合、構成式の影響よりも数値積分法の影響が大きい。すなわち、低減積分法により隅部が不自然に変形している。また、8 節点二次要素の場合、逆に数値積分法よりも構成式の影響のほうが大きく、Green 形構成式では隅部での垂直性を保つように凹状の変形となっているが、Jaumann 形構成式

図 5 一般せん断問題における応力-たわみ線図

では隅部で膨れるような変形をしていることがわかる。

なお、計算時間はGreen形構成式を使用した場合、Jaumann形に比べ、 4×4 の16要素分割に対し、約2倍となった。

4. 結 論

有限要素法を用いた固体・構造物の大変形解析では、使用する構成式が重要な役割を果たす。従来の有限要素解析コードでは、連続体スピンを用いたJaumann形の構成式が用いられてきたが、本研究では物質スピンを用いたGreen形構成式を用いた場合の有限要素法定式化を示した。平面ブロックにせん断変形を加えたときの弾性大変形シミュレーションを実施し、構成式だけでなく要素種類や数値積分次数が数値解に及ぼす影響を検討した。左右辺の拘束を取り除いた一般せん断問題では、構成式の相違は中央部の応力値には大きな影響を及ぼさないものの、隅部の変形形状に多少の相違が認められることがわかった。

本研究は、平成2年度文部省科学研究費の援助を受けた。またNIKE2Dの資料を三菱総合研究所・清水史也氏から提供いただいた。ここに記して謝意を表する。

付録 純粋せん断問題の理論解

Green形構成式を用いた場合の理論解をまず求める。図1(b)の座標系を用い、 θ を角度とすると、 x_1 、

x_2 方向の変位 u_1, u_2 は次のようにおける。

$$u_1 = x_2 \sin \theta \quad \dots\dots\dots (46\cdot a)$$

$$u_2 = -x_2(1 - \cos \theta) \quad \dots\dots\dots (46\cdot b)$$

したがって、変形こう配テンソル $\mathbf{F}$ は次のようになる。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta \\ 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$\mathbf{F}$ を極分解すると $\mathbf{R}$ と $\mathbf{U}$ は次のとおりである。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (48\cdot a)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (48\cdot b)$$

よって、非回転ひずみ速度 $\dot{\mathbf{E}}_R$ は次のとおり。

$$\dot{\mathbf{E}}_R = \frac{\dot{\theta}}{2 \cos \theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta & 1 \\ 1 & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (49)$$

積分して、次のとおりである。

$$\mathbf{E}_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \ln \cos \theta & \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} & \frac{1}{2} \ln \cos \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots (50)$$

また、 $J = \det \mathbf{U} = \cos \theta$ より、次のように応力が求められる。

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \{ 2\mu_0 \mathbf{e}_R + \lambda_0 (\text{tr } \mathbf{e}_R) \mathbf{I} \} \quad \dots\dots\dots (51)$$

ここで

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_R \cdot \mathbf{R}^t \quad \dots\dots\dots (52)$$

図6 一般せん断問題における固有モード分解

図7 一般せん断問題における要素種類、構成式、積分次数の影響 ($e=1.4$)

式(50)を式(52)に, さらに式(51)に代入すると, 式(41)が得られる.

一方, Jaumann 形構成式を用いた場合は, ストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ と連続体スピン $\mathbf{W}$ は次のようになる.

$$\mathbf{D} = \frac{\dot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\tan\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \frac{\dot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (53)$$

式(53)を式(8)に代入して, 増分を細かくして数値積分を行い応力を計算する.

文 献

- (1) Hallquist, J. O., *NIKE2D-A Vectorized, Implicit, Finite Deformation, Finite Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of 2-D Solids*, UCID-19677, (1983), Lawrence Livermore Nat. Lab.
- (2) 渡部, 機論, 56-524, A (1990), 883.
- (3) 渡部, 機論, 54-501, A (1988), 992.
- (4) 文献(2)の 893 ページ.
- (5) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 5 (1957), 229.
- (6) 鷲津・ほか 4 名編, 有限要素ハンドブック, II 応用編, (1983), 65, 培風館.