非線形計画法による円輪板の大たわみ連成問題の解析* (面外・面内両変位の幾何学的非線形項を考慮した軸対称問題)

大 滝 誠 一^{*1}, 岸 田 路 也^{*2}

An Analysis of the Coupling Problem of the Large Deflection of Annular Plates Using a Nonlinear Programming Theory (Axisymmetric Case Considering the Geometrical Nonlinear Terms of Out-of-plane and In-plane Displacements)

Seiichi OHTAKI and Michiya KISHIDA

The coupling between the bending and the in-plane deformation under large deflection of annular plates is investigated using a nonlinear programming theory. The geometrical nonlinear terms in the strain-displacement relations are assumed with not only out-of-plane displacement but also in-plane displacement. The objective function derived from the total potential energy is minimized by the Davidon-Fletcher-Powell method. Numerical examples of axisymmetrical annular plates with clamped inner edge are presented in three cases. The displacements and the stresses are calculated for three boundary conditions of their outer edges. They are clamped edge (Case 1), simply supported edge (Case 2) and simply supported movable edge (Case 3). In Case 3, the difference of the results obtained by this method is significant compared with those calculated by the theory considering the nonlinear terms of out-of-plane displacement.

Key Words: Structural Analysis, FEM, Geometrical Nonlinearity, Large Deflection, Coupling Effect, Nonlinear Programming Theory, Annular Plates

1. ま え が き

薄板の面外曲げにおいて、板のたわみが大きくなると、面外変位に及ぼす面内変位の影響が無視できなくなる。このような変位の連成効果は、薄板よりはむしろかくにおいて著しいと言われている⁽¹⁾⁽²⁾。

さて、この場合のたわみは、ひずみを変位の高次式で表し、両変位を連成させて解くことによって求められるものであり、また、連成効果の大小についてもその結果から議論されるべきものである。しかし、解析の困難さからか、従前の大たわみ問題のほとんどは、変位は面外変位のみとし、ひずみは面外変位の二次式で表されるものとした Kármán 理論に基づく非連成問題として扱われてきた [例えば文献(3)~(9)]。

著者らの一人は、既報^{(10)~(14)}において、面外・面内両変位を考え、ひずみは面外変位の二次式と面内変位の一次式の結合で表されるものとし、両変位の連成を考慮した有限要素理論⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ [以下、NTW(Nonlinear Term W)理論という]に基づいた解法により、いく例

かの薄板の大たわみ問題を扱った。面外変位と応力について同じ場合の Kármán 理論による結果と比較すると、著者らの一人の結果は、内外周固定円輪板⁽¹⁰⁾では Yeh の結果⁽⁴⁾より、周辺固定のく形板⁽¹⁴⁾では Way の結果⁽¹⁷⁾よりいずれも若干大きかった。

そこで本報では、ひずみを両変位の二次式の結合で表し、両変位の連成を考慮した有限要素法理論 [以下、NTWU(Nonlinear Term W, U)理論と呼ぶ]に基づく解法を示し、二、三の例題によって、連成効果について検討し、両理論による結果の定量的比較を行う。例としては、内周に固定された剛円板を有し、外周を、ケース 1: 固定支持、ケース 2: ケース 1 でモーメントを解放して単純支持、ケース 3: ケース 2 で面内変位を解放して単純移動支持された円輪板が剛円板によって軸方向荷重を受ける軸対称問題を扱う。すなわち、外周における変位の自由度を順番に解放することによって面内変位の大きさを変え、両変位の連成効果の変形や応力に及ぼす影響を本解法により明らかにするものである。なお、これらの解析でせん断変形の影響は考慮しないことにする。

* 平成 3 年 4 月 1 日 第 68 期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成 2 年 11 月 2 日。

^{*1} 正員、北海道工業大学(〒006 札幌市手稲区手稲前田 419-2)。

^{*2} 正員、北海道大学工学部(〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)。

2. 理 論

2.1 座標と変位関数 図1に示すように扇形板要素の半径方向, 円周方向, 板厚方向に座標 (ξ, η, z) を定める。それぞれの座標軸の正の方向における変位成分を (u, v, w) とすると, u, v は面内変位, w は面外変位である。扱う問題は軸対称問題であるが, 円周方向についても一般性を持たせ, 各変位成分いずれも同一の変位関数 f で仮定されるものとする,

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (H_{0i}^{(1)}(\xi) H_{0j}^{(1)}(\eta) f_{ij} + A H_{1i}^{(1)}(\xi) H_{0j}^{(1)}(\eta) \partial f_{ij} / \partial \xi + B(\xi) H_{0i}^{(1)}(\xi) H_{1j}^{(1)}(\eta) \partial f_{ij} / \partial \eta + AB(\xi) H_{1i}^{(1)}(\xi) H_{1j}^{(1)}(\eta) \partial^2 f_{ij} / \partial \xi \partial \eta) \dots\dots\dots (1)$$

である。ここで, $A, B(\xi)$ はLaméのパラメータであって, $A = \Delta r$, $B(\xi) = (r_1 + \Delta r \xi) \Delta \theta$, $H_{ij}^{(1)}$ は, 一次の Hermite 補間関数

$$\left. \begin{aligned} H_{01}^{(1)}(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & H_{02}^{(1)}(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ H_{11}^{(1)}(\xi) &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3, & H_{12}^{(1)}(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

であって, ξ あるいは η を表す ζ ($0 \leq \zeta \leq 1$)の三次関数で表されるものとする。

2.2 ひずみ-変位関数とひずみエネルギー Novozhilov⁽¹⁸⁾とLanghaar⁽¹⁹⁾のかく理論を, 扇形板要素について, w と u の非線形項を含むNTWU理論に拡張すると, ひずみ-変位関係式は

$$\begin{aligned} \epsilon_{\xi} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2A^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{1}{A^2} z \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \xi} \\ \epsilon_{\eta} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{1}{2B^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2B^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2A^2 B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 u^2 - \frac{1}{B^2} z \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \eta} - \frac{z}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \gamma_{\eta\xi} &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{1}{AB} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{2}{AB} z \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2z}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

となる。第1式の第3項, 第2式の第4, 5項, 第3式の第5項はNTW理論に付加した u の非線形項である。

一要素のひずみエネルギー U は

$$U = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\epsilon_{\xi}^2 + \epsilon_{\eta}^2 + 2\nu \epsilon_{\xi} \epsilon_{\eta} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{\xi\eta}^2 \right] AB dz d\xi d\eta \dots\dots\dots (4)$$

である。ここで h, E, ν はそれぞれ板厚, ヤング率, ポアソン比である。式(1), (2), (3)を式(4)に代入し, エネルギーを構成する変位の次数を下付添字 i として整理すると, ひずみエネルギーは

$$U = \sum_{i=2}^4 U_i \dots\dots\dots (5)$$

となる。さらに各項は, それぞれ

$$U_2 = U^{uu} + U^{uv} + U^{vv} + U^{ww}, \quad U_3 = U^{uww} + U^{vww} + U^{vuww} + U^{uuu}, \quad U_4 = U^{wwww} + U^{uuww} + U^{uuuu} \dots\dots (6)$$

と書くことができる。エネルギーを構成する各変位成分を, 上付添字 u, v, w で表せば

$$\begin{aligned} U^{uv} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{B}{A} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 u^2 + \frac{2\nu}{A} \frac{\partial B}{\partial \xi} u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(1-\nu)A}{2B} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \\ U^{uv} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi} u \frac{\partial v}{\partial \eta} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{(1-\nu)}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} v \right] d\xi d\eta \\ U^{vv} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{A}{B} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{(1-\nu)B}{2A} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 v^2 - \frac{(1-\nu)}{A} \frac{\partial B}{\partial \xi} v \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] d\xi d\eta \\ U^{uu} &= \frac{h^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{B}{A^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{A}{B^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 + \frac{1}{A^3 B} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{2}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right. \\ &\quad + \frac{2\nu}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{2\nu}{A^3} \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{2(1-\nu)}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 + \frac{2(1-\nu)}{AB^3} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \\ &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\ U^{uww} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{B}{A^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} u \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{B} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} u \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{B} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^{vww} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{A}{B^2} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{A} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{A} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{(1-\nu)}{AB} v \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\
U^{vuw} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{A}{B^2} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{A} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{A} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{(1-\nu)}{AB} v \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\
U^{vuu} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{A}{B^2} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{A} \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{A} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{(1-\nu)}{AB} v \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\
U^{uuu} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{B}{A^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} u \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{B} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} u \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{A^2 B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^3 u^3 + \frac{\nu}{A^2 B} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 u^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(1-\nu)}{B} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\
U^{www} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{B}{4A^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^4 + \frac{A}{4B^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^4 + \frac{1}{2AB} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \\
U^{uuw} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{B}{2A^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{A}{2B^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{2AB} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu}{2AB} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{AB} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\nu}{2A^3 B} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 u^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi d\eta \\
U^{uuu} &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{B}{4A^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^4 + \frac{A}{4B^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^4 + \frac{1}{2AB} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4A^3 B^3} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^4 u^4 + \frac{\nu}{2A^3 B} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right)^2 u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

..... (7)

である。

2・3 全ポテンシャルエネルギー 全ポテンシャルエネルギー Π は、ひずみエネルギーと外部仕事 W によって

$$\Pi = U_2 + U_3 + U_4 - W \quad \text{..... (8)}$$

と表される。ここで

$$\left. \begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{2} X^T K_2 X \\
U_3 &= \frac{1}{2} X^T K_3 Y + \frac{1}{2} X^T K_3' Z \\
U_4 &= \frac{1}{8} Y^T K_4 Y + \frac{1}{4} Y^T K_4' Z \\
&\quad + \frac{1}{8} Z^T K_4'' Z \\
W &= X^T F
\end{aligned} \right\} \quad \text{..... (9)}$$

であり、式中の K_2 は二次の剛性マトリックス、 K_3 、 K_4 は三次と四次の非線形剛性マトリックス、 F は等価節点ベクトルである。また、変位ベクトル X は u 、 v 、 w に関する一次の成分であり、また Y 、 Z は w と u にする二次の成分で表され、それぞれ、 1×48 、 $1 \times$

136、 1×136 の大きさを持ち、上付添字 T は転置マトリックスを表す。すなわち、

$$\begin{aligned}
X^T &= [u_1 \ u_{,\xi_1} \ u_{,\eta_1} \ u_{,\xi\eta_1} \ u_2 \ \cdots \ u_{,\xi\eta_4}] \\
v_1 \ v_{,\xi_1} \ v_{,\eta_1} \ v_{,\xi\eta_1} \ v_2 \ \cdots \ v_{,\xi\eta_4} \\
w_1 \ w_{,\xi_1} \ w_{,\eta_1} \ w_{,\xi\eta_1} \ w_2 \ \cdots \ w_{,\xi\eta_4}] \\
Y^T &= [w_1^2 \ 2w_1 w_{,\xi_1} \ w_{,\xi_1}^2 \ 2w_1 w_{,\eta_1} \ \cdots \ w_{,\xi\eta_4}^2] \\
Z^T &= [u_1^2 \ 2u_1 u_{,\xi_1} \ u_{,\xi_1}^2 \ 2u_1 u_{,\eta_1} \ \cdots \ u_{,\xi\eta_4}^2] \\
&\quad \text{..... (10)}
\end{aligned}$$

であり、ここで、例えば $u_{,\xi_1}$ は $(\partial u / \partial \xi)_1$ の略記号であり、下付添字 1 は頂点を表す。

この問題は変位成分について四次関数である全ポテ

(a) 形状と寸法

MODEL	12 ELEMENTS
	26 NODAL POINTS
	94 FREEDOMS

(b) 要素モデルと物性値

図 1 扇形板要素の座標

図 2 円輪板

ンシャルエネルギーを目的関数とする最適化問題として DFP 法 (Davidon-Fletcher-Powell Method) により解くことによって解決される⁽²⁰⁾.

3. 結果と考察

3・1 形状・寸法・物性値 図 2 (a) に示すように円輪板の外, 内半径を a, b とし, 半径比 $a/b=2$, 板厚比 $h/a=0.02$ とする. 次に, 図 2 (b) に示すように開き角 0.05 rad なる軸対称な部分を取り出し, 半径方向に 12 分割した有限要素モデルを考える. 図中に特性

図 3 円輪板の支持条件 ($E=206 \text{ GPa}$, $\nu=0.33$)

表 1 内周, 外周上における境界条件

	u_i	$u_{i,t}$	w_i	$w_{i,t}$	u_o	$u_{o,t}$	w_o	$w_{o,t}$
Case 1	0	F	F	0	0	F	0	0
Case 2	0	F	F	0	0	F	0	F
Case 3	0	F	F	0	F	F	0	F

SUBSCRIPT I: INNER BOUNDARY
SUBSCRIPT O: OUTER BOUNDARY
FREEDOM (F: FREE, 0: FIXED)

図 4 半径方向断面中心面における w の分布

図 5 半径方向断面中心面における u の分布

値も示してある。各ケースの支持条件を図3に、変位成分についての内外周上の境界条件を表1に示す。

3・2 計算 数値計算では、同心円上にある左右の節点における w, u 成分は軸対称性により等しいものと仮定すると、未知変数の数はこの仮定がない場合の半分になる。

荷重 P は、最大面外変位が板厚と同一となるケース3の線形理論解 P_0 (3.76 kN) で無次元化し、比 P/P_0 は0.25から1.0まで0.25ずつ4段階とした。DFP法の収束判定基準の係数である一次探索最小幅、目的関数の最小減少率および最小ステップ幅を 0.1×10^{-6} とした。ケース3で自由度49に対し、 $P/P_0=1$ のとき、計算時間はHITAC S820/80で3分53秒であり、DFP法の反復回数は147回であった。

変位と応力はそれぞれ無次元量 $w/h, u/h, \sigma a^2/Eh^2$

で表し、また、応力成分に添字を付し、半径方向応力を σ_r 、円周方向応力を σ_θ で、さらに、面内応力を σ_t 、上表面における曲げ応力を σ_B 、これからの和である合成応力を σ_R で表す。

3・3 結果 図4~7(a), (b), (c)に、各ケース両理論による w, u, σ_r および σ_θ の半径方向変化を示す。両理論による変位と応力の差は、自由度を解放する順にケース1からケース3へと、かつ、 P/P_0 が大きくなるに従い大きくなっており、ケース3で最も著しい。図4で示す w についてはNTWU理論による最大値 $|W_{\max}|$ はNTW理論によるそれに対し、ケース1で約4%、ケース3で約18%減少している。図5に示す u についてはNTWU理論による $|u_{\max}|$ はNTW理論によるそれに対しケース2で約62%、ケース3で46%減少している。図6において両理論による $|\sigma_{\theta B}|$ の

図6 半径方向断面における $\sigma_{r1}, \sigma_{\theta B}$ の分布

図7 半径方向断面における $\sigma_{r1}, \sigma_{\theta B}$ の分布

図 8 各ケースにおける最大面外変位の両理論による解と非連成解の比較

差は、ケース 1, 2 では小さいが、ケース 3 における NTWU 理論による $|\sigma_{\theta\theta}|$ は、NTW 理論による $|\sigma_{\theta\theta}|$ に対し内周で約 15% 減少している。NTWU 理論による $\sigma_{\theta\theta}$ はいずれのケースについても内周近傍で NTW 理論によるそれに比較し小さい。このことから、NTWU 理論による $\sigma_{R\max}$ は NTW 理論によるそれより小さくなり、しかも、上下表面上の応力の非対称性は緩和されている。このことは図 7 に示す σ_r についても同様なことがいえる。しかし、 σ_r は σ_θ 成分に比較し小さい。

図 8 に両理論による各ケース最大面外変位 $|W_{\max}|$ と、本解法で三次のエネルギー成分を無視した非連成の結果を併記して示す。なお、ケース 2, 3 の非連成解は同一である。NTWU 理論による $|W_{\max}|$ は NTW 理論によるそれより小さいが、非連成の結果よりは大きい。

4. ま と め

本研究では、非線形計画法によって面外・面内両変位の幾何学的非線形項を考慮した連成問題としての大たわみ問題の一解法を示し、軸対称円輪板の解析を行

った。その結果、下記の知見が得られた。

(1) 本解法によって、両変位の非線形項を考慮した連成問題が比較的容易に扱われることが示された。

(2) ここで用いた両理論による解析結果の定量的比較に限定すれば、ケース 1 で示した面内変位の面外変位に対する関わり方が少ない場合では、両変位の非線形項による連成効果は少ないが、ケース 3 で示した面内変位のオーダが面外変位のそれに対して無視でなくなる大きさとなる場合では連成効果は大きくなることが明らかになった。したがって、特に本理論による解析は後者の解析に有用であることが示された。

数値計算における長谷川正行氏（当時北海道工業大学学部学生）の協力に感謝の意を表す。なお、数値計算には北海道大学大型計算センターの HITAC S 820/80 を使用した。

文 献

- (1) 関谷・浜田・角, 平板強度設計便覧, (1982), 79, 朝倉書店.
- (2) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, (1959), 396, McGraw-Hill.
- (3) Chia, C. T., *Nonlinear Analysis of Plates*, (1980), 129, McGraw-Hill.
- (4) Yeh, K. Y., *Acta. Sci. Sin.*, 2-2 (1953), 127.
- (5) Hart, V. G. and Evans, D. J., *J. Math. and Phys.*, 43-4 (1964), 275.
- (6) Wempner, G. A. and Schmidt, R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 25-4 (1958), 449.
- (7) Tielking, J. T., *Trans. ASME*, 45-4 (1978), 834.
- (8) Tielking, J. T., *Int. J. Solids Struct.*, 16-4 (1980), 361.
- (9) Reddy, J. N. and Huang, C. L., *Int. J. Solids Struct.*, 17-8 (1981), 811.
- (10) 大滝, 機論, 55-511, A (1989), 577.
- (11) 大滝, 機論, 55-519, A (1989), 2370.
- (12) 大滝, 機論, 56-526, A (1990), 1461.
- (13) 文献(12)の 1468 ページ.
- (14) 文献(12)の 1474 ページ.
- (15) Schmit L., A., Bogner, F. K. and Fox R., L., *AIAA J.*, 6-5 (1968), 781.
- (16) Gibson W. C., *Case Western Reserve Univ., Solid Mechanics, Structures and Mechanics Rep. No. 34* (1969).
- (17) Way, S., *Proc. 5th Int. Cong. Appl. Mech.*, (1983), 123.
- (18) Novozhilov, V. V., *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity* (1953), 191, Graylock Press.
- (19) Langhaar, H. L., *Energy Method in Applied Mechanics*, (1962), 114, John Wiley & Sons.
- (20) Fletcher, R. and Powell, M. J. D., *Computer J.* 6-2 (1963), 163.