ランダム荷重下における不確定構造物の応答解析*

森 昌彦^{*1}, 関谷 宏^{*2}, 石倉 修一^{*2}
持尾 隆士^{*3}, 鵜飼 修^{*4}, 近藤 充^{*4}Response Analysis in a Structure Containing Uncertainty
under Random LoadMasahiko MORI, Hiroshi SEKIYA, Shūichi ISHIKURA,
Takashi MOCHIO, Osamu UKAI and Mitsuru KONDO

The authors have attempted to develop an analytical method that estimates the variability of structural response by treating the variations in the physical properties of structures by means of the stochastic finite-element method and by treating the random variation in earthquake excitations by means of the random vibration theory, and to further encode the method of analysis. This article describes the formulation of variability of response used in the analytical method, and then shows the results of benchmark analysis with the Monte Carlo method to confirm the accuracy of the analytical method. The floor response spectrum of a reactor building was also analyzed as an example in order to demonstrate the validity of this method.

Key Words: Stochastic Finite-Element Method, Random Vibration Theory, Structural Response, Seismic Safety Analysis, Structure Uncertainty

1. はじめに

構造物やプラントの地震時における安全性は非常に重要な設計評価の一つである。その評価では想定されるいかなる地震力に対しても十分な強度が確保されている。しかしながら、地震力の設定や各設備の耐震性について、それぞれが持つ不確かさに対し十分な余裕を見込んでいるため、その評価は最終的に過度の余裕を持っている可能性がある。そこで、近年、地震に対する安全裕度をより適切かつ定量的に評価する研究が試みられている⁽¹⁾⁽²⁾。

構造物の動的信頼性評価においては、精度向上の面から主に①構造諸元のバラツキ、②地震荷重のランダム性の二つを考慮した応答ゆらぎの評価が必要となる。従来、この評価法としてはモンテカルロシミュレーションが代表的なものであるが、繰返計算の解析コ

ストが高いこと、解析結果への見通しがたてにくいことなどの問題点がある。

このような観点から、本研究では構造諸元(剛性・減衰等)のバラツキを確率有限要素法を用いて取扱い、地震荷重のランダム性については不規則振動論を用い構造物の応答ゆらぎを評価する手法を検討するとともに、解析コード(PRODUCT)の開発を進めた。本論文では、解析コードにおける応答ゆらぎの定式化、モンテカルロシミュレーションとの比較検証および同コードを用いた原子炉建屋の床応答スペクトルの解析結果について述べ、本解析手法がこの種構造物の応答ゆらぎ問題を取扱うのに有効であることを示す。

2. 理論展開

2.1 基本構成 動的応答ゆらぎ解析コード PRODUCT は図1に示すように、EIGEN, POWER, STAMP, PSA の四つの部分より構成されている。この内、EIGEN, POWER はそれぞれ不確定構造物における固有値ゆらぎ、パワースペクトル(伝達関数)のゆらぎを解析する部分である。STAMP は POWER の結果を受け、機器の加速度応答倍率のゆらぎを解析する。また、PSA は POWER の結果を受けて機器の応答(絶対応答加速度)のゆらぎを解析する。

* 平成元年 11 月 28 日 第 2 回計算力学講演会において講演、原稿受付 平成 2 年 11 月 29 日。

^{*1} 正員、三菱重工業(株)高砂研究所(〒676 高砂市荒井町新浜 2-1-1)。

^{*2} 三菱原子力工業(株)新型炉総括部(〒105 東京都港区芝公園 2-4-1 芝パークビル)。

^{*3} 正員、三菱重工業(株)長崎研究所(〒850-91 長崎市飽の浦町 1-1)。

^{*4} 正員、三菱重工業(株)システム技術部(〒652 神戸市兵庫区和田崎町 1-1-1)。

本コードの使用要素は曲げせん断はり要素と回転・並進ばね要素であり、入力を入力加速度のパワースペクトル $S_E(\omega)$ と構造諸元(剛性・質量・減衰)の確定値とゆらぎである。出力は固有値の期待値と分散および建屋・機器の応答および加速度応答倍率の期待値と分散である。なお、固有値、固有ベクトルのゆらぎ解析は中桐らにより提案されている手法を用いている⁽³⁾。

2.2 構造物のパワースペクトル密度の定式化⁽³⁾

図2に示す振動解析モデルで表される構造系において、入力加速度のパワースペクトル密度 $S_E(\omega)$ が与えられた時、任意の質点 F の絶対加速度パワースペクトル密度 $S_F(\omega)$ は次式で与えられる。

$$S_F(\omega) = G(\omega) S_E(\omega) \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $G(\omega)$ は構造系の絶対加速度伝達関数であり、構造系のゆらぎによる応答のゆらぎを表す。

いま、構造系の構造諸元(剛性、減衰、質量) X_k のゆらぎを以下の式で表すものとする。

$$X_k = X_k^0(1 + \alpha_k) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$k=1, 2, \dots, n$$

X_k^0 : X_k の期待値

α_k : 期待値 0 の微小確率変数

絶対加速度伝達関数 $G(\omega)$ を期待値を零として、微小確率変数 α_k についてテイラー展開すると、

$$G(\omega) = G^0(\omega) + \sum_k G_k^{(1)}(\omega) \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l G_{kl}^{(2)}(\omega) \alpha_k \alpha_l \dots\dots\dots (3)$$

$$G_k^{(1)} = \left. \frac{\partial G(\omega)}{\partial X_k} \right|_{X_k^0} \dots\dots\dots (4)$$

$$G_{kl}^{(2)} = \left. \frac{\partial^2 G(\omega)}{\partial X_k \partial X_l} \right|_{X_k^0, X_l^0} \dots\dots\dots (5)$$

$G(\omega)$ に 2 次の摂動法を適用すれば、不確定構造物

における絶対加速度パワースペクトル $S_F(\omega)$ は以下のような形となる。

$$S_F(\omega) = S_E^0(\omega) + \sum_k S_{Fk}^{(1)}(\omega) \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l S_{Fkl}^{(2)}(\omega) \alpha_k \alpha_l \dots\dots\dots (6)$$

$$S_E^0(\omega) = G^0(\omega) S_E(\omega) \dots\dots\dots (7)$$

$$S_{Fk}^{(1)}(\omega) = G_k^{(1)}(\omega) S_E(\omega) \dots\dots\dots (8)$$

$$S_{Fkl}^{(2)}(\omega) = G_{kl}^{(2)}(\omega) S_E(\omega) \dots\dots\dots (9)$$

PRODUCT では、確率有限要素法を用いたパワースペクトル解析により、上記の $S_E^0(\omega)$, $S_{Fk}^{(1)}(\omega)$, $S_{Fkl}^{(2)}(\omega)$ が求まる。

2.3 応答最大値のゆらぎの定式化⁽⁴⁾ 確定構造

系における機器 [絶対加速度パワースペクトル $S_F(\omega) = S_E^0(\omega)$] の応答ゆらぎ分布は、DAVENPORT の推定式に従うものと仮定すると、機器の最大応答加速度 X_T の期待値 μ_{XT} および標準偏差 σ_{XT} は以下の式で表される。

$$\mu_{XT} = \sigma_X \left(\sqrt{2 \ln 2 \nu T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2 \nu T}} \right) \dots\dots\dots (10)$$

$$\sigma_{XT} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\sigma_X}{\sqrt{2 \ln 2 \nu T}} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、

$$\sigma_X = \sqrt{m_0} \dots\dots\dots (12)$$

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \dots\dots\dots (13)$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\omega}^2 S_F(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \dots\dots\dots (14)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{m_2/m_0} \dots\dots\dots (15)$$

γ : オイラー一定数 = 0.577 2

T : 入力地震動の持続時間

一方、構造系が不確定構造の場合には、 X_T の期待値 μ_{XT} 、標準偏差 σ_{XT} を求めるための基本量である $S_F(\omega)$ が不確定構造系を構成する確率パラメータにより式(6)のようにゆらぐため、このゆらぎを考慮した μ_{XT} 、 σ_{XT} を導出する必要がある。

このため期待値および分散を次のような良く知られた条件付表示式により表現する⁽⁵⁾。

図1 PRODUCTの構成

図2 対象とする地盤-建屋系モデル

$$\mu_{XT} = \bar{E}[E[X_T|X=\chi]] \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\sigma_{XT}^2 = \bar{E}[Var[X_T|X=\chi]] + \bar{V}_{ar}[E[X_T|X=\chi]] \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで $E[X_T|X=\chi]$, $Var[X_T|X=\chi]$ は確率パラメータをある値に固定した時の条件付期待値, 条件付分散値であり, これは通常の不規則振動理論により求まる。一方, $\bar{E}[\cdot]$, $\bar{V}_{ar}[\cdot]$ は確率パラメータに対する統計処理であることを示す。

式(16), (17)を近似的に次式で表す。

$$\bar{E}[E[X_T|X=\chi]] \approx E[X_T|X=\bar{\chi}] \equiv \bar{\mu}_{XT} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\bar{E}[Var[X_T|X=\chi]] \approx E[Var[X_T|X=\bar{\chi}]] \equiv \bar{\sigma}_{XT}^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで $\bar{\cdot}$ は確率パラメータの期待値を示す。一方, $\bar{V}_{ar}[E[X_T|X=\chi]]$ は x の関数となっている X_T の期待値に関する分散をとることを意味するから FOSM 法を採用することにより,

$$\bar{V}_{ar}[E[X_T|X=\chi]] \approx \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial \chi_k} \right]_{X=\bar{\chi}} \left[\frac{\partial g}{\partial \chi_l} \right]_{X=\bar{\chi}} C_{\chi_k \chi_l} \quad \dots\dots (20)$$

となる。ここで $C_{\chi_k \chi_l}$ は χ_k, χ_l に関する共分散である。

ゆえに, μ_{XT} , σ_{XT}^2 は次式で評価できる。

$$\mu_{XT} = \bar{\mu}_{XT} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\sigma_{XT}^2 = \bar{\sigma}_{XT}^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial \chi_k} \right]_{X=\bar{\chi}} \left[\frac{\partial g}{\partial \chi_l} \right]_{X=\bar{\chi}} C_{\chi_k \chi_l} \quad \dots\dots (23)$$

ここでは X_T に関する極値理論として式(10), (11)に示す DAVENPORT の近似式を用いているので,

X_T の期待値を表している g の形は

$$g = \sigma_x \left(\sqrt{2 \ln 2 \nu T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2 \nu T}} \right) \quad \dots\dots\dots (23)$$

である。また, μ_{XT} , σ_{XT}^2 は次のようになる。

$$\bar{\mu}_{XT} = \bar{\sigma}_x \left(\sqrt{2 \ln 2 \bar{\nu} T} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln 2 \bar{\nu} T}} \right) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\bar{\sigma}_{XT}^2 = \frac{\pi^2}{6} \frac{\bar{\sigma}_x^2}{2 \ln 2 \bar{\nu} T} \quad \dots\dots\dots (25)$$

最終的な入力および構造系の不確定性を考慮した応答最大値の期待値 μ_{XT} および分散 σ_{XT}^2 は式(12), (15)を展開して式(21), (22)に代入することにより求まる。以上の定式化をもとに, 動的ゆらぎの解析コードを作成した。

3. モンテカルロ法との比較

3.1 ベンチマーク方法 解析モデルは図2に示すように6自由度系の3質点モデルであり, 構造諸元を表1に示す。入力加速度のパワースペクトル密度は金井-田治見スペクトルを用いた。

$$S_E(\omega) = S_0 \frac{1 + 4 \zeta_E^2 \left(\frac{\omega}{\omega_E} \right)^2}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_E} \right)^2 \right\}^2 + 4 \zeta_E^2 \left(\frac{\omega}{\omega_E} \right)^2} \quad \dots\dots (26)$$

ただし, $\omega_E = 9\pi \text{ rad/s}$, $\zeta_E = 0.6$, $S_0 = 43.4 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ である。

モンテカルロ法においては, 金井-田治見スペクトルを有する5000波のランダム入力波を作成し, 時刻歴解析結果を統計処理することにより応答ゆらぎを求めた。

解析は確定構造と構造ゆらぎの場合について実施している。構造ゆらぎとしては, (1)建屋のヤング率 E ; と地盤ばね定数 K_H , K_θ が標準偏差で $\alpha_k = 0.1$ の完全

表 1 構造諸元

Nodal Point No.	FL (m)	Mass (ton)	Rotational Inertia (ton · cm ²)
1	24.0	107,600	7 × 10 ⁷
2	0.0	133,100	7 × 10 ⁷
3	-22.5	133,300	74.9 × 10 ¹⁰

Element No.	AREA (m ²)	Second Moment of Area (m ⁴)
1	734	675,100
2	1,023	813,230

Properties	Young's modulus (ton/cm ²)	Poisson Ratio	Damping (%)
Location			
Building	230	0.167	5

Properties	Sway Spring		Rocking Spring	
Location	Stiffness (ton/cm)	Damping (%)	Stiffness (ton · cm/rad)	Damping (%)
Soil	10.82 × 10 ⁵	10	17.00 × 10 ¹²	5

図 3 確定形状における応答ゆらぎの比較 (PRODUCT とモンテカルロ法の比較)

相関でゆらぐ場合と(2)建屋および地盤の減衰 h_i が標準偏差で $\alpha_k=0.1$ の完全相関でゆらぐ場合の2ケースを考えている。

3.2 解析結果 確定構造における解析結果の比較を図3、図4に示す。図3は機器の応答ゆらぎの比較図であり、本コードにより評価された値はモンテカルロ法による解に比べ、期待値・分散値とも大きめの値をとり、保守的な評価となっている。図4は機器の応答加速度のヒストグラムであり、応答加速度の分布はおおむね対数正規分布に近い分布となっている。

構造ゆらぎの一例として、構造ゆらぎの場合の比較を図5、図6に示す。図5は応答ゆらぎの比較図で、図6は剛性ゆらぎに対する固有値のヒストグラムである。構造系がゆらぐことによる固有値のゆらぎは両者良い一致を示すが、応答ゆらぎについては確定構造の場合と同様、本コードによる解のほうが大きめの値をとる。これは極値理論として採用した DAVENPORT の近似式が、本ケースで対象となっている狭帯域確率過程に対しては、良く知られているように、最大値を

保守的に評価する傾向にあるためと考えられる。

以上の結果より、本コード PRODUCT は機器の信頼性評価に必要な精度を有していると言える。

4. 原子炉建屋の床応答解析への適用

4.1 解析モデルおよび条件 図7に原子炉建屋の解析モデルを示す。構造諸元は表2に示すとおりである。そして、質点 No. 3 における床応答スペクトルを以下に示す条件で求める。

各部の構造ゆらぎ(剛性ゆらぎと減衰ゆらぎ)は表3に示すようにゆらぐものとする。また、入力加速度のパワースペクトル密度としては金井-田治見スペクトル($\omega_E=9\pi\text{rad/s}$, $\zeta_E=0.6$, $S_0=62.5\text{cm}^2/\text{s}^3$)を仮定している。

4.2 解析結果 本コードによる床応答スペクトルの解析結果を通常の耐震設計手順により求めた床応答スペクトルと比較した結果を図8に示す。今回の検討結果では、現行の耐震設計の床応答スペクトルはすべての周波数領域で機器の応答ゆらぎの $+\sigma$ 値をカ

図4 応答加速度のヒストグラム

図6 剛性ゆらぎに対する固有値のヒストグラム

図5 減衰ゆらぎに対する応答ゆらぎの比較
(PRODUCT とモンテカルロ法の比較)

図7 耐震解析モデル

表 2 構造諸元

Nodal Point No.	FL (m)	Mass (ton)	Element No.	Area (m ²)	Second Moment of Area (m ⁴)
1	-12.5	45,493	1	1,044	813,230
2	-6.0	39,829	2	1,013	813,033
3	0.0	47,946	3	1,013	813,033
4	7.5	45,107	4	903	794,018
5	16.0	42,347	5	817	694,873
6	24.0	42,700	6	481	536,362
7	49.0	19,571	7	216	373,512
8	62.5	10,079	8	108	252,667
9	-22.5	110,522			

表 3 構造諸元のゆらぎ

Stochastic Member		Design Data	Expectation	Variance	Coefficient of Variation
Stiffness	K _H	2.21 × 10 ⁵	←	(2.21 × 10 ⁴) ²	0.1
	K _θ	3.59 × 10 ¹²	←	(3.59 × 10 ¹¹) ²	0.1
	E _i	230	←	(23) ²	0.1
Damping	h _H	25	30	(5) ²	0.167
	h _θ	8.75	10	(1.25) ²	0.125
	h _i	5	7	(2) ²	0.286
Correlation		ρ _{H,θ} = 1.0 ρ _{i,j} = 1.0 ; i, j = 1, 2, 3			
Condition		ρ _{H,i} = ρ _{θ,i} = 0.0 ; i = 1, 2, 3			

Properties	Young's modulus E_i (ton/cm ²)	Shearing modulus G_i (ton/cm ²)	Poisson Ratio	Damping h_i (%)
Location				
Building	230.0	99.0	0.167	5

Properties	Sway Spring		Rocking Spring	
	Stiffness K_H (ton/cm)	Damping h_H (%)	Stiffness K_θ (ton·cm/rad)	Damping h_θ (%)
Location				
Soil	2.21×10^5	25	3.59×10^{12}	8.75

図 8 床応答スペクトルのゆらぎと設計用床応答スペクトル

図 9 加速度応答倍率のゆらぎ

パーしており、現行の耐震設計の裕度を定量的に示すことができる。

また、図 9 に加速度応答倍率のゆらぎ評価を示す。

5. 結 言

不確定構造物における動的応答ゆらぎを評価する手法として、確率有限要素法と不規則振動論を用いた理論解析手法を検討した結果、次のことが明らかとなった。

(1) 本手法による解析結果はモンテカルロシミュレーションの結果と傾向的に良い一致を示し、機器の

信頼性評価に適用できる精度を有していることが確認できた。

(2) ここで提案した方法はモンテカルロ法に比べ 1/50~1/100 の計算コストで済み、この種の複雑な構造物の動的応答解析に十分適用可能であることがわかった。

(3) 本解析手法の精度は DAVENPORT の近似式の保守性に支配されており、今後、より精度の高い評価式の導入を行い、より信頼性のある評価が可能となるようにしたい。

文 献

- (1) Smith, P. D., *SSMRP Phase I Final Report-Overview*, NUREG/CR-2015(1981).
- (2) 加藤・三浦, 高層建物の地震リスク評価, 日本建築学会大会学術講演概要集, (1986-8), 構造 Vol. 1 p. 31.
- (3) 中桐・久田, 「確率有限要素法入門」, (1985), 培風館.
- (4) Clough, R. W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, (1975), McGraw-Hill.
- (5) Ditlevsen, O., *Uncertainty Modeling*, (1981), McGraw-Hill.