境界要素法による形状感度解析法の比較と
最小重量設計への応用*山 崎 光 悦^{*1}, 坂 本 二 郎^{*1}Comparison between Boundary Element Sensitivity Analysis Techniques
and Their Application to Minimum Weight Shape Optimization

Koetsu YAMAZAKI and Jio SAKAMOTO

An effective design sensitivity calculation technique based on the implicit differentiation method is formulated for isoparametric boundary elements for two-dimensional shape optimization problems, and a practical algorithm for the displacement and stress sensitivities on the boundary is proposed. Efficiency and accuracy of the technique is compared with the semi-analytic method by implementing the sensitivity analysis of typical basic shape design problems. The technique is also applied to the minimum weight design under stress constraints, and an optimal shape of an elliptic hole in a square plate is determined under biaxial uniform tension loading.

Key Words: Design Engineering, Optimum Design, Shape Optimization, Design Sensitivity Analysis, Boundary Element Method

1. 結 言

形状最適化における構造解析手法として、境界要素法が境界値を精度良く計算できること、要素分割や再分割が容易であることなどの利点からこれを用いた手法の研究が最近盛んになりつつある^{(1)~(3)}。形状を表す適当なパラメータを設計変数にとり、数値計画法などを用いて形状の最適化を図るには、境界変位や応力の効率的な設計感度解析法を開発することが最も基本的かつ重要である。

境界要素法による変位や応力の設計感度解析は、大別するとエネルギー汎関数から出発して変分法によって導かれた感度方程式を離散化して解く物質微分法⁽⁴⁾⁽⁵⁾と、境界積分方程式を設計パラメータで直接微分して得られる連立方程式を解く直接微分法⁽⁶⁾⁽²⁾とに分類される。物質微分法は解析精度は優れているが、変位や応力感度を常に境界上の小領域の積分値として定義する必要があるため直接的ではなく、特定の問題を除いて汎用性に欠ける。

そこで本研究では、直接微分法に基づく設計感度方程式を直接解く解法の具体的な定式化を示す。また感

度方程式の定数項の境界積分を差分法によって近似的に評価し、設計感度方程式を解く半解析法と、解析精度、計算効率を二次元問題について比較・検討した結果、および最小重量設計問題への適用性を検討した結果について報告する。

2. 設計感度解析法

2.1 最小重量設計問題と重量感度 形状最適化を目的とする典型的な設計問題は、境界変位、応力制約下の最小重量設計問題である。図1に示すように空間領域 Ω (境界を Γ) を占める二次元物体を考え、形状

図1 二次元物体の設計モデル

* 原稿受付 平成3年1月28日.

*1 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野 2-40-20).

パラメータに関する設計変数を

$$b^T = (b_1, b_2, \dots, b_{ND}) \quad (ND \text{ は設計変数の数}) \quad (1)$$

とする。密度を ρ 、適当に選んだ基準点を (x_1^0, x_2^0) とすると、目的関数の重量は次式で評価できる。

$$f = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} r_0 \frac{\partial r_0}{\partial n} d\Gamma \rightarrow \min \quad (2)$$

ここに、境界上の点を (x_1, x_2) として、 $r_0^2 = (x_a - x_a^0) \times (x_a - x_a^0)$ 、また $\partial/\partial n$ は境界法線方向微分を表し、 n_a を方向余弦とすると $\partial r_0/\partial n = (x_a - x_a^0)n_a/r_0$ 。ただし、以後ギリシャ小文字の添字は $\alpha=1, 2$ などとし、繰返し指標は総和規約に従うものとする。境界上の任意観測点 j の変位を u_j 、応力を σ_j 、その許容値をそれぞれ u_{aj} 、 σ_{aj} と表すと、制約条件は次のように書ける。

$$g_j = \sigma_j - \sigma_{aj} \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, NJ) \quad (3)$$

$$g_{k+NJ} = u_k - u_{ak} \leq 0 \quad (k=1, 2, \dots, NK) \quad (4)$$

また設計変数の上下界制約を次のように課す。

$$b_i^l \leq b_i \leq b_i^u \quad (i=1, 2, \dots, ND) \quad (5)$$

ここに、 b_i^l 、 b_i^u は設計変数の上下界値とする。以上より最小重量設計問題は、式(3)～(5)の制約条件のもとで式(2)を最小とする設計変数 b を見出す問題となる。

上記の設計問題は通常、数値計画法を用いて解かれるが、目的関数や制約関数の設計感度 $\partial f/\partial b_i$ 、 $\partial g_j/\partial b_i$ などが効率良く計算可能であればより効率的な最適化が可能となり、その効果は設計変数の次数 ND が大きいほど顕著となる。

境界を要素に離散化し、要素内で $-1 \leq \xi \leq 1$ なる正規座標をとり、節点座標を x_{aj} (以下では英大文字添字は要素内節点数 N に対する指標 $J=1, 2, \dots, N$ などとする)、内挿関数を N_J とすると、任意点の座標は

$$x_a = N_J x_{aj} \quad (6)$$

と表され、このとき式(2)は次のように離散化される。

$$f = \frac{\rho}{2} \sum_e \int_{-1}^1 r_0 \frac{\partial r_0}{\partial n} |J| d\xi = \frac{\rho}{2} \sum_e \int_{-1}^1 (x_a - x_a^0) n_a |J| d\xi \quad (7)$$

ここに $|J|$ はヤコビアンを表し、 $d(\quad)/d\xi = (\quad)_{,\xi}$ とすると

$$|J|^2 = x_{a,\xi} x_{a,\xi} = N_{J,\xi} N_{J,\xi} x_{aj} x_{aj} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= x_{2,\xi}/|J| = N_{J,\xi} x_{21}/|J|, \\ n_2 &= -x_{1,\xi}/|J| = -N_{J,\xi} x_{11}/|J| \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と与えられる。また $\sum_e$ は境界要素に関する総和を意味する。

そこで式(7)の設計感度を求めると、

$$\frac{df}{db_i} = \frac{\rho}{2} \sum_e \int_{-1}^1 \{ \dot{x}_a n_a + (x_a - x_a^0) \dot{n}_a \} |J| + (x_a - x_a^0) n_a |J|_{,\xi} d\xi \quad (10)$$

ここに $(\dot{\quad}) = d(\quad)/db_i$ を表し、

$$|\dot{J}| = N_{J,\xi} N_{J,\xi} x_{aj} \dot{x}_{aj}/|J| \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{n}_1 &= n_2 (\dot{x}_1 n_{1,\xi} + \dot{x}_2 n_{2,\xi})/|J| \\ \dot{n}_2 &= -n_1 (\dot{x}_1 n_{1,\xi} + \dot{x}_2 n_{2,\xi})/|J| \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2.2 変位感度 境界 Γ 上の要素 e の節点変位、表面力を u_{ai}^e 、 p_{ai}^e 、要素上の点を x_a 、ソース点を y_a とすると、離散化した境界積分方程式は滑らかな境界上のソース点について次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_k(y) + \sum_e \int_{-1}^1 p_{ka}^* N_i u_{ai}^e |J| d\xi \\ = \sum_e \int_{-1}^1 u_{ka}^* N_i p_{ai}^e |J| d\xi \quad (x=1, 2) \end{aligned} \quad (13)$$

ここに u_{ka}^* 、 p_{ka}^* は Kelvin の基本解であり、せん断弾性係数、ポアソン比を μ 、 ν とすると平面ひずみ状態に対して

$$\begin{aligned} u_{ka}^* &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ka} \ln \frac{1}{r} + r_{,k} r_{,a} \right\} \\ p_{ka}^* &= \sigma_{a\beta}^* n_\beta = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \\ &\quad \times \{ [(1-2\nu) \delta_{ka} + 2r_{,k} r_{,a}] r_{,n} + (1-2\nu) \\ &\quad \times (r_{,a} n_k - r_{,k} n_a) \} \\ \sigma_{a\beta}^* &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \\ &\quad \times \{ (1-2\nu) (\delta_{ka} r_{,\beta} + \delta_{k\beta} r_{,a} - \delta_{a\beta} r_{,k}) + 2r_{,a} r_{,\beta} r_{,k} \} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $\delta_{a\beta}$ をクロネッカーのデルタとし、また

$$r^2 = (x_a - y_a)(x_a - y_a) = N_i N_j (x_{ai} - y_{aj})(x_{aj} - y_{aj})$$

$$r_{,a} = (x_a - y_a)/r, \quad r_{,n} = r_{,a} n_a$$

式(13)を設計変数 b_i で微分すると、直接微分法による変位感度 $\dot{u}_{ai}^e = du_{ai}^e/db_i$ 、 $\dot{p}_{ai}^e = dp_{ai}^e/db_i$ を求めるための次の連立方程式を得る⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{u}_k(y) + \sum_e \int_{-1}^1 \dot{p}_{ka}^* N_i \dot{u}_{ai}^e |J| d\xi + \sum_e \int_{-1}^1 (\dot{p}_{ka}^* |J| + p_{ka}^* |\dot{J}|) N_i u_{ai}^e d\xi = \sum_e \int_{-1}^1 u_{ka}^* N_i \dot{p}_{ai}^e |J| d\xi \\ + \sum_e \int_{-1}^1 (u_{ka}^* |J| + u_{ka}^* |\dot{J}|) N_i p_{ai}^e d\xi \quad (x=1, 2) \end{aligned} \quad (15)$$

ここに

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\kappa\alpha}^* &= u_{\kappa\alpha,\beta}^* \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial b_i} - \frac{\partial y_\beta}{\partial b_i} \right) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left\{ -(3-4\nu)\delta_{\kappa\alpha} \frac{r_{,\beta}}{r} + r_{,\kappa\beta} r_{,\alpha} + r_{,\kappa} r_{,\alpha\beta} \right\} \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial b_i} - \frac{\partial y_\beta}{\partial b_i} \right) \\ \dot{p}_{\kappa\alpha}^* &= \sigma_{\alpha\beta,\gamma}^* \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial b_i} - \frac{\partial y_\beta}{\partial b_i} \right) n_\beta + \sigma_{\alpha\beta}^* \dot{n}_\beta \\ \sigma_{\alpha\beta,\gamma}^* &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) \{ \delta_{\kappa\alpha} (\delta_{\beta\gamma} - 2r_{,\beta} r_{,\gamma}) + \delta_{\kappa\beta} (\delta_{\alpha\gamma} - 2r_{,\alpha} r_{,\gamma}) - \delta_{\alpha\beta} (\delta_{\kappa\gamma} - 2r_{,\kappa} r_{,\gamma}) \} \right. \\ &\quad \left. + 2(\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} r_{,\kappa} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} r_{,\kappa} + \delta_{\kappa\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta} - 4r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\kappa} r_{,\gamma}) \right\} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

式(15)のソース点 y を境界上の節点にとり、それらをまとめて行列表示すると

$$[H]\{\dot{U}\} + [\dot{H}]\{U\} = [G]\{\dot{P}\} + [\dot{G}]\{P\} \dots\dots\dots (17)$$

境界上の全節点を NP とするとき

$$\{U\}^T = (u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}, \dots, u_{1NP}, u_{2NP}), \quad \{P\}^T = (p_{11}, p_{21}, p_{12}, p_{22}, \dots, p_{1NP}, p_{2NP})$$

とし、 $\{\dot{U}\}, \{\dot{P}\}$ はそれぞれの感度ベクトルとする。また各行列 $[H], [\dot{H}], [G], [\dot{G}]$ の成分は式(15)の左辺第1, 2項(まとめて表した), 第3項, 右辺第1項, 第2項の積分項にそれぞれ対応する。したがって式(13)をLU分解法などによっていったん三角分解しておけば、式(17)の両辺の第2項の定数項を計算し、代入過程のみを実施することによって変位、表面力感度を求めることができる。なお、式(15)左辺第3項はソース点 y と積分点 x が一致するとき $1/r$ の特異性を有するが、式(13)の特異項の評価と同様剛体変位条件 $[\dot{H}]\{U_0\} = 0$ (U_0 を剛体変位とする) より間接的に求めることができる。以上が直接微分法による変位感度の計算方法であるが、具体的な計算手順を図2に示す。特に $[\dot{H}], [\dot{G}]$ 評価のための設計変数による繰返し部分を数値積分ループ内に入れることにより、かなりの同一計算を避けることができ、効率的なアルゴリズムの作成が可能となる。

一方、半解析解法では式(17)の $[\dot{H}], [\dot{G}]$ を厳密に計算することをやめ、次式の差分によって求める。

$$[\dot{H}] = \frac{[H(b_i + \Delta b_i)] - [H(b_i)]}{\Delta b_i}, \quad [\dot{G}] = \frac{[G(b_i + \Delta b_i)] - [G(b_i)]}{\Delta b_i} \dots\dots\dots (18)$$

ここに Δb_i は設計変数の摂動を表し、通常 $\Delta b_i/b_i < 0.01 \sim 0.001$ 程度にとる。半解析解法は通常の弾性解析プログラムに若干の修正を加えるだけで感度解析を実施できる点で有利と言える。

2.3 応力感度 次に境界上の点における応力感度解析法について示す。節点変位が求まると次式を解いて変位こう配を求める。

$$\begin{bmatrix} (\mu + \lambda)n_2^2 & \mu n_1^2 - \lambda n_2^2 \\ \mu n_2^2 - \lambda n_1^2 & (\mu + \lambda)n_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_2 n_2 - \mu(u_s n_2 - u_t n_1) \\ p_1 n_1 - \mu(u_s n_2 - u_t n_1) \end{Bmatrix}, \quad u_{1,2} + u_{2,1} = \frac{u_s}{n_1} - \frac{u_t}{n_2} + \frac{u_2}{u_1} u_{1,1} + \frac{u_1}{u_2} u_{2,2} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$, $a = -(2\mu + \lambda)$, また u_s, u_t は境界接線方向の変位こう配を表し、

$$u_s = N_{1,s} u_{11}/|J|, \quad u_t = N_{1,t} u_{21}/|J|$$

このとき座標応力成分 $\sigma_{\alpha\beta}$ は次式で定まる。

$$\sigma_{11} = -a u_{1,1} + \lambda u_{2,2}, \quad \sigma_{22} = \lambda u_{1,1} - a u_{2,2}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) \dots\dots\dots (20)$$

一方、境界上の点の応力感度はまず式(19)を直接設計変数 b_i で微分した次式を解いて変位こう配の設計感度を求める。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\mu + \lambda)n_2^2 & \mu n_1^2 - \lambda n_2^2 \\ \mu n_2^2 - \lambda n_1^2 & (\mu + \lambda)n_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{2,2} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \dot{p}_2 n_2 - \mu(\dot{u}_s n_2 - \dot{u}_t n_1 + \dot{u}_s n_2 - \dot{u}_t n_1) \\ \dot{p}_1 n_1 - \mu(\dot{u}_s n_2 - \dot{u}_t n_1 + \dot{u}_s n_2 - \dot{u}_t n_1) \end{Bmatrix} \\ -2 \begin{bmatrix} (\mu + \lambda)n_2 \dot{n}_2 & \mu n_1 \dot{n}_1 - \lambda n_2 \dot{n}_2 \\ \mu n_2 \dot{n}_2 - \lambda n_1 \dot{n}_1 & (\mu + \lambda)n_1 \dot{n}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} &\dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここに

$$\dot{u}_s = (N_{1,s} \dot{u}_{11} - u_s | \dot{J} |)/|J|,$$

$$\dot{u}_t = (N_{1,t} \dot{u}_{21} - u_t | \dot{J} |)/|J|$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} &= -a \dot{u}_{1,1} + \lambda \dot{u}_{2,2} \\ \dot{\sigma}_{22} &= \lambda \dot{u}_{1,1} - a \dot{u}_{2,2} \\ \dot{\sigma}_{12} &= \dot{\sigma}_{21} = \mu(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

このとき応力感度は式(20)を直接微分した次式より求める。

3. 感度解析例と形状最適化への応用

前章に述べた定式化に従って直接微分法および半解析解法による設計感度解析プログラムを作成し、例題

ソパラメトリック要素で、数値積分により各積分項を評価した。また平面ひずみ状態を仮定し、ヤング率 $E = 205.8 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いた。

表 3 二軸引張下の平板中のだ円孔応力感度
($\Delta a_1/a_1 = \Delta a_2/a_2 = 0.01$)

a_1/a_2		1.0	2.0	4.0
Stress $(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ}/\sigma_0$	BEM	5.104	9.169	17.28
	Theory*	5.000	9.000	17.00
Stress $(\sigma_\theta)_{\theta=90^\circ}/\sigma_0$	BEM	0.9496	-0.0548	-0.5478
	Theory*	1.0000	0.0000	-0.5000
Sensitivity $(\partial\sigma_\theta/\partial a_1)_{\theta=90^\circ} R/\sigma_0$	BEM	4.294	6.341	10.49
	SAM	4.222	6.223	10.29
	Theory*	4.000	6.000	10.00
Sensitivity $(\partial\sigma_\theta/\partial a_1)_{\theta=90^\circ} R/\sigma_0$	BEM	-2.148	-0.8263	-0.3674
	SAM	-2.150	-0.8214	-0.3610
	Theory*	-2.000	-0.7500	-0.3125
Sensitivity $(\partial\sigma_\theta/\partial a_2)_{\theta=90^\circ} R/\sigma_0$	BEM	-4.084	-12.17	-40.55
	SAM	-3.983	-11.91	-39.73
	Theory*	-4.000	-12.00	-40.00
Sensitivity $(\partial\sigma_\theta/\partial a_2)_{\theta=90^\circ} R/\sigma_0$	BEM	2.044	1.486	1.228
	SAM	2.027	1.475	1.223
	Theory*	2.000	1.500	1.250

* : Theoretical values for infinite plate with an elliptic hole.

表 2 中空円筒の応力感度 ($\Delta a/a = \Delta b/b = 0.01$)

		$r = a$	$r = b$
Stress σ_b/p	Theory	1.667	0.6667
	BEM	1.666	0.6666
Sensitivity $(\partial\sigma_b/\partial a)a/4p$	Theory	0.4444	0.4444
	BEM	0.4444	0.4443
	SAM	0.4449	0.4405
Sensitivity $(\partial\sigma_b/\partial b)a/4p$	Theory	-0.2222	-0.2222
	BEM	-0.2222	-0.2222
	SAM	-0.2200	-0.2178

図 2 変位感度解析アルゴリズム

図 3 中空円筒設計モデル

図 4 だ円孔を有する正方形板の二軸引張モデル

図5 目的関数, 境界応力値の変化

図6 初期形状と最適形状

うに内半径 a , 外半径 b ($a/b=1/2$) の中空円筒が内圧 p を受ける場合について, a, b を設計変数としたときの内外周の変位感度および応力感度を求めた。モデルの対称性から $1/4$ 領域の内外周境界をそれぞれ 5 要素, 11 節点に分割した。表 1 に変位および変位感度について, 表 2 に応力および応力感度について直接微分法, 半解析解法による結果を理論解と比較して示す。半解析解法による結果は設計変数の相対的な摂動量を 0.01 として求めたものである。数値計算結果はいずれも理論値と良い一致を示しており, 精度的には直接微分法の結果のほうが若干優れている。なお, 変位感度計算に要した計算時間は, 直接微分法が 724 ms, 半解析解法が 876 ms (コンピュータ: FACOM M 760) と, 直接微分法によるアルゴリズムのほうが効率的であった。

3.2 だ円孔を有する正方形板の二軸引張り 次に図 4 に示すように長短軸半長が a_1, a_2 のだ円孔 ($x_1=a_1 \cos \theta, x_2=a_2 \sin \theta, \theta$ は離心角) を有する一辺 $2W$ の正方形板が x_1, x_2 軸方向に $\sigma_0, 2\sigma_0$ の一様引張応力を負荷される場合を対象に, a_1, a_2 を設計変数としてだ円孔縁の応力感度を求めた。モデルの対称性から $1/4$ 領域の外部境界を 16 要素, 33 節点に, だ円

表 4 設計変数, 目的関数, 制約関数値の比較

	Initial	Optimal
a_1/W	0.2000	0.3480
a_2/W	0.2000	0.6652
f/W^2	0.9382	0.6694
g_1	-0.8050	1.802×10^{-3}
g_2	-0.2204	-4.902×10^{-6}
g_3	0.3575	-0.1185

図7 境界応力分布の比較

孔縁を 10 要素, 21 節点に分割した。

$a_1/W=1/10, a_1/a_2=1, 2, 4$ の場合についての直接微分法, 半解析解法による応力感度を表 3 に示す。同表中の $\theta=0^\circ$ および $\theta=90^\circ$ は x_1, x_2 軸上の値であることを指す。また $R=(a_1+a_2)/2$ とする。同表には二軸引張応力場下の無限板中のだ円孔の理論応力値, 応力感度を参考として示す。変位感度計算時間は直接微分法で 2 613 ms, 半解析解法で 3 144 ms であり, 直接微分法のほうが明らかに有利であった。

次に直接微分法による感度解析を利用して図 4 のモデルについて式 (3) の応力制約条件下で, 式 (2) の目的関数を最小とする最適設計を行った結果を示す。具体的な制約条件としてミーゼスの相当応力 σ_e の許容値を $\sigma_a=4\sigma_0$ とし, $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の 3 点で応力制約を課した。すなわち

$$\begin{aligned} g_1 &= \sigma_{e \theta=90^\circ}/\sigma_a - 1, \quad g_2 = \sigma_{e \theta=45^\circ}/\sigma_a - 1, \\ g_3 &= \sigma_{e \theta=0^\circ}/\sigma_a - 1 \end{aligned} \quad \dots (23)$$

$a_1/W=a_2/W=0.2$ を初期形状とし, 最適化のための具体的な解法として逐次二次計画を用いたところ 5 回の繰返しで収束した。図 5 に目的関数, 制約条件の繰返しによる変化過程を示す。また図 6 には初期形状と最終形状を, 表 4 にはその具体的な数値をそれぞれ示す。さらに図 7 には孔縁の相当応力分布を比較して示す。

す。最適形状では制約を課さなかった $\theta=45^\circ, 90^\circ$ の中間で若干制約を超えているもののほぼ妥当な結果が得られたと判断できる。

4. 結 言

本報では、直接微分法に基づく設計感度解析法の具体的な定式化を示すとともに、効率的なアルゴリズムを提案した。また基本的な設計例題に適用し、理論解、半解析法による解と解析精度を比較し、十分な精度が得られることを確認した。また半解析解法と計算効率を二次元問題について比較・検討した結果、本報で提案した直接微分法によるアルゴリズムがかなり効率的であることも確認した。さらに最小重量設計問題への適用性についても確認した。

文 献

- (1) Mota Soares, C. A., Rodrigues, H. C. and Choi, K. K., *Trans. ASME, J. Mech. Trans. Autom. Des.*, **106**-4 (1984), 518.
- (2) Sandgren, E. and Wo, S. J., *Int. J. Num. Methods Eng.*, **26**-9 (1988), 1913.
- (3) Hajela, P. and Jih, J., *Int. J. Solids Struct.*, **26**-1 (1990), 29.
- (4) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, (1986), 190, Academic Press.
- (5) Botkin, M. E., Yang, R. J. and Bennett, J. A. (Bennett, J. A. and Botkin, M. E. 編), *The Optimum Shape*, (1986), 61, Prentice Hall.
- (6) Barone, M. R. and Yang, R. J., *AIAA J.*, **26**-5 (1988), 589.