曲り円管の面内弾塑性曲げ解析*

(第1報, 純曲げの場合)

伊藤 智啓^{*1}, 川嶋 紘一郎^{*1}, 安保 竹司^{*2}

A Numerical Analysis of In-Plane Elastic-Plastic Bending of Curved Tubes (1st Report, A Case of Pure Bending)

Toshihiro ITO, Koichiro KAWASHIMA and Takeshi YASUHO

In-plane bending of curved tubes is analyzed numerically in the elastic-plastic range on the assumption of pure bending, uniform deformation along its longitudinal axis and the Kirchhoff-Love hypothesis. The equilibrium equations of pure bending of tubes, derived by E. L. Axelrad, are transformed into incremental forms and solved by the updated Lagrange method. The material of tubes is assumed to obey a power-hardening law and the Prandtl-Reuss flow theory. The curved tube is discretized by a rigid body-spring model, which is composed of rigid plate elements connected with nonlinear springs that are distributed over the ends. The in-plane stiffness and flexural rigidity of the tube wall are obtained by numerically integrating generalized incremental stiffness over the wall thickness. Numerical analyses have been carried out for various combinations of initial in-plane curvature, diameter and thickness of the curved tube. The present analyses simulate well the relation between bending moment and change in curvature, and flattening of cross sections which are obtained by bending experiments in aluminum tubes by Murota and Endo.

Key Words: Bending, Numerical Analysis, Plasticity, Curved Tube

1. 緒 言

配管系および各種構造要素として曲り円管がしばしば用いられる。構造要素としての円管が過大な曲げモーメントを受けると、塑性変形に伴い円管の断面は偏平化(長円化)するとともに、耐荷能力の低下、さらに座屈の危険性が生じる。それゆえ円管の曲げに伴う断面形状の変化と円管が支える曲げモーメントを知ることが重要である。一方、塑性加工における過度の曲げは、円管の偏平化とともに引張側の管壁の薄化、圧縮側の厚化をもたらす。製品の精度を確保するためには解析により加工後の形状を予測し、さらに最適な形状を得るために必要な加工条件や、初期形状を明らかにすることが必要である。

弾性範囲内での曲り円管の挙動に関しては多くの研究がなされている⁽¹⁾が、管断面の有限変形を考慮した弾塑性曲げの解析は極めて限られている。Bushnell⁽²⁾はトロイダル殻モデルを用いて弾完全塑性の曲り円管の曲げと曲げもどし過程を有限要素法で解析し、曲げ

に伴う曲げモーメントや横断面の偏平化を求めた。Bielski-Skrzypek⁽³⁾は外圧と曲げを受けるサンドイッチ構造の弾完全塑性の円管について、降伏、座屈、サンドイッチ材のはく離などの破損モードに対応する形状および負荷条件を示した。Watanabe-Ohtsubo⁽⁴⁾はbilinearな応力-ひずみ関係を仮定し、管の形状による最大曲げモーメント、横断面内の応力とひずみの分布を示し、線形解析と非線形解析による応力とひずみを比較した。Endow-Murota⁽⁵⁾はべき硬化形の応力-ひずみ関係を仮定して塑性異方性が材料特性の偏平化に与える影響をエネルギー法を用いて明らかにした。

しかし、上記の研究では、材料特性または変形モードに対して単純化した仮定を用いているので、実際の材料特性を考慮でき、しかも円管の横断面形状の変化に制限を設けない、より正確な解析が求められる。

本研究では、長手方向に一樣な曲げを受ける曲り円管の平衡方程式⁽⁶⁾に基づき、updated Lagrange法により、純曲げをうける円管の面内曲げの弾塑性数値解析を行う。解析では管の横断面に垂直な応力として膜応力のみを考え、平面応力状態を仮定する。材料は、べき硬化形の応力-ひずみ関係とMisesの降伏条件に従う等方硬化塑性体であり、Prandtl-Reussの流れ則に

* 平成2年11月29日 材料力学講演会において講演、原稿受付 平成3年1月28日。

^{*1} 正員、名古屋工業大学(〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

^{*2} 川崎重工業(株)(〒504 各務原市川崎1)。

従うものとする。

数値計算により曲り円管の初期曲率, 直径, 肉厚を変えた場合の曲率の変化に伴う曲げモーメントの変化などを明らかにし, それらを室田・遠藤の実験結果⁽⁷⁾と比較する。

2. 解析方法

円管の中心軸線の曲率が一定である曲り円管について, 軸線(長手)方向に一樣な変形を仮定し, 面内弾塑性曲げ過程を解析する。この場合横断面に垂直な応力を考慮して, 横断面内の二次元変形を解析すればよい。本報では純曲げ状態を扱う。

2・1 解析対象, 記号 解析対象の形状と記号を図1に示す。ここに, ξ, η, ζ : 長手, 周, 厚さ方向座標, T, Q, M : 単位長さ当たりの垂直合応力, せん断合応力, 曲げモーメント, R, b : 長手方向, 周方向曲率半径, h : 円管の厚さ, ϕ : 開口角, k : 開口角比 $k = \phi/\phi_0$, r : 基準軸線の曲率半径, x : 基準軸線からの座標, $R = r + x$, u : 変位 $\{u; x$ 方向成分, $v; y$ 方向成分 $\}$, α : 微小要素の接線の傾斜角。

補助記号の意味は以下のものである。0: 初期値, 1, 2, 3: 長手, 周, 厚さ方向, $|i$: 節点 i における値, d : 増分量, $(\cdot)'$: 周方向の変化率 $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\eta$ 。

2・2 増分形平衡方程式 前述の仮定のもとでの曲り円管の平衡方程式は次式で与えられる⁽¹⁾。

$$T_1 b_0 k \sin \alpha + (T_2 R_0)' + Q_2 R_0 \alpha' = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$T_1 b_0 k \cos \alpha + T_2 R_0 \alpha' - (Q_2 R_0)' = 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

$$(M_2 R_0)' + M_1 b_0 k \sin \alpha - Q_2 b_0 R_0 = 0 \quad \cdots \cdots (3)$$

管壁は薄いとして長手方向には膜応力が支配的であると仮定し, 曲げモーメント M_1 を無視し, Q_2 を消去すると次式が得られる。

$$T_1 b_0 k \sin \alpha + b_0 (T_2 R_0)' + (M_2 R_0)' \alpha' = 0 \quad \cdots \cdots (4)$$

$$T_1 b_0 k \cos \alpha + b_0 T_2 R_0 \alpha' - (M_2 R_0)'' = 0 \quad \cdots \cdots (5)$$

図1 曲り円管の形状と記号

ある開口角比 k に対する変形状態が既知であると, その微小増分 dk に対応する各量の増分量を d を付けて表す。開口角比 $k + dk$ に対する平衡方程式と式(4), (5)との差をとり, 2次以上の微小量を無視すれば, 以下の形の増分量に対する平衡方程式が得られる。

$$-K dk = A a \quad \cdots \cdots (6)$$

$$K = \{T_1 b_0^2 \sin \alpha, T_1 b_0^2 \cos \alpha\}^T \quad \cdots \cdots (7)$$

$$a = \{dT_1, dT_2, dT_2', dM_2, dM_2', da, da'\}^T \quad \cdots \cdots (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} b_0^2 k \sin \alpha, b_0 x_0', b_0 R_0, x_0' \alpha', \\ R_0 \alpha', 0, T_1 b_0^2 k \cos \alpha, M_2' R_0 + M_2 x_0' \\ b_0^2 k \cos \alpha, b_0 R_0 \alpha', 0, -x_0'', \\ -2x_0', -R_0, -T_1 b_0^2 k \sin \alpha, T_2 b_0 R_0 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots (9)$$

ここで, $\{\}^T$ は転置を表し, A は(2,8)行列である。

2・3 応力-ひずみ関係 Kirchhoff-Love の仮定より, ひずみ増分は円管壁面内の平均ひずみ de と周方向の曲率増分 dx を用いて, 以下のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_1 &= de_1 \\ d\epsilon_2 &= de_2 + \zeta dx_2 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (10)$$

円管の材料はべき硬化形の応力-ひずみ関係に従い, Mises の降伏条件に従う等方硬化塑性体であると仮定し, ひずみ増分に対応する応力増分を Prandtl-Reuss の式から定める。

$$d\sigma_{ij} = 2G \left\{ d\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} d\epsilon_{kk} - \frac{9G s_{ij} s_{kl} d\epsilon_{kl}}{2(H' + 3G) \bar{\sigma}^2} \right\} \quad \cdots \cdots (11)$$

ここで G は横弾性係数, s_{ij} は偏差応力, H' は接線係数, $\bar{\sigma}$ は相当応力である。

管壁が薄いものとし平面応力状態 ($\sigma_3 = 0$) を仮定しているので, 面内の応力増分を次式のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_2 & E_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} de_1 \\ de_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots (12)$$

ここで E_1, E_2 は Prandtl-Reuss の式において, $d\sigma_3 = 0$ の条件を用いて de_3 を消去して得られる。

単位長さ当たりの合応力および曲げモーメントの増分 dT_1, dT_2, dM_2 は剛性パラメータ

$$E_{ij} = \int E_i \zeta^{j-1} d\zeta \quad \cdots \cdots (13)$$

を用いて, 平均ひずみおよび曲率増分により以下のように表される。

$$\begin{Bmatrix} dT_1 \\ dT_2 \\ dM_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} & E_{22} \\ E_{21} & E_{11} & E_{12} \\ E_{22} & E_{12} & E_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} de_1 \\ de_2 \\ dx_2 \end{Bmatrix} \quad \cdots \cdots (14)$$

2.4 離散化モデル 周方向曲げモーメント M_2 による管壁の厚みに沿う方向の応力分布は非線形になるので、有限要素法によれば細かな要素分割を必要とする。そこで本報では剛体-非線形ばね系の離散化モデル⁽²⁾を用いる。

図2に示すように、円管を剛体板とその端面に分布する非線形ばねの系で離散化する。管断面の変形を剛体板端面の節点変位によって表す。材料の変形特性はばねによって表される。

長手方向ひずみ e_1 は、以下のように定義される。

$$1 + e_1 = R\phi / (R_0\phi_0) = Rk/R_0 \\ = (r+x)k / (r_0+x_0) \dots\dots\dots (15)$$

各増分をとり、高次微小量を見捨て、次式を得る。

$$de_1 = \frac{(dr+dx)k + (r+x)dk}{(r_0+x_0)} \dots\dots\dots (16)$$

周方向ひずみ e_2 は、節点 i 前後の節点を結ぶベクトル L_{i-1} と L_i の相対変化の平均として次式で定義する。

$$de_2 = \frac{L_i \cdot dL_i}{2|L_i|^2} + \frac{L_{i-1} \cdot dL_{i-1}}{2|L_{i-1}|^2} \dots\dots\dots (17)$$

周方向曲率 x_2 は L_i と L_{i-1} との相対回転角より求める。

$$dx_2 = \left\{ \frac{L_i \times dL_i}{|L_i|^2} - \frac{L_{i-1} \times dL_{i-1}}{|L_{i-1}|^2} \right\} \frac{2}{|L_i| + |L_{i-1}|} \dots\dots\dots (18)$$

dL_i, dL_{i-1} は節点 $i-1, i, i+1$ の変位増分 du, dv により表される。

式(8), (9)に含まれる η による微分() を差分近似する。

$$a|_i = \sum_{j=i-1}^{i+1} B|_j b|_j \dots\dots\dots (19)$$

$$b = \{dT_1, dT_2, dM_2, d\bar{a}\}^T \dots\dots\dots (20)$$

$$d\bar{a}|_i = L_i \times dL_i / |L_i|^2 \dots\dots\dots (21)$$

$d\bar{a}|_i$ は節点 i から $i+1$ への要素 (以下要素 i と呼ぶ) の傾斜角の増分である。 B は η 座標からなる (8, 4) 行列であり、節点の η 座標の差 $\beta_i = \eta_{i+1} - \eta_i$ を用いて、節点 $i-1, i, i+1$ に対するその各成分は以下のよう

に表される。

$$B_{11} = B_{22} = B_{43} = 0, 1, 0$$

$$B_{32} = B_{53}$$

$$= \frac{-\beta_i}{\beta_{i-1}(\beta_i + \beta_{i-1})}, \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{\beta_i \beta_{i-1}}, \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i(\beta_i + \beta_{i-1})}$$

$$B_{63} = \frac{2}{\beta_{i-1}(\beta_i + \beta_{i-1})}, \frac{-4}{\beta_i \beta_{i-1}(\beta_i + \beta_{i-1})},$$

$$\frac{2}{\beta_i(\beta_i + \beta_{i-1})}$$

$$B_{74} = \frac{\beta_i}{\beta_i + \beta_{i-1}}, \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i + \beta_{i-1}}, 0$$

$$B_{84} = \frac{-2}{\beta_i + \beta_{i-1}}, \frac{2}{\beta_i + \beta_{i-1}}, 0 \dots\dots\dots (22)$$

上記以外の成分はすべて零である。

式(14)を拡張して、式(20)の b を以下のように表す。

$$b = Cc \dots\dots\dots (23)$$

$$c = \{de_1, de_2, dx_2, d\bar{a}\}^T \dots\dots\dots (24)$$

$$C_{ij} = E_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 3) \\ C_{ij} = \delta_{ij} \quad (i \text{ or } j = 4) \dots\dots\dots (25)$$

ここで δ_{ij} は Kronecker の δ である。一般化ひずみ増分ベクトル c は、式(16)-(18)および(21)より、各節点の変位増分および dr, dk を用いて、次式で表される。

$$c = Ddu + \bar{D}\{dr, dk\}^T \dots\dots\dots (26)$$

$$du|_i = \{du_{i-1}, dv_{i-1}, du_i, dv_i, du_{i+1}, dv_{i+1}\} \dots\dots\dots (27)$$

係数行列 D と $\bar{D}$ の詳細は省略する。

以上より、節点 i とその前後を含めた3節点の変位増分 u と開口角の増分 dk に対する基準軸曲率半径増分 dr を用いて、節点 i における平衡方程式は次のように表される。

$$-K|_i dk = A|_i \sum_{j=i-1}^{i+1} \left[BC \left(Ddu|_j + \bar{D}|_j \left\{ \frac{dr}{dk} \right\} \right) \right] \dots\dots\dots (28)$$

これを全節点に適用し、断面全体の平衡方程式を得る。

3. 数 値 計 算

3.1 計算方法 面内曲げを対象とするので、対称性より円管の半断面について解析すればよい。半断面を N 分割するとき対称軸上を含め $N+1$ 個の節点が存在し、対称軸上の2節点は $dv=0$ であるので、節点変位合計 $2N$ の自由度を持つ。開口角比増分 dk 、基準軸曲率半径増分 dr を含め全部で $2N+2$ の未知量に対し、1から N までの節点についての $2N$ 個の平衡方程式と、純曲げに対応する軸力の和 $\sum dT_1=0$ を

図2 円管断面の離散化

併せ $2N+1$ の方程式が得られるので、変数の一つ (ここでは dk) を与えることにより、 $2N+1$ 元の連立1次方程式を解くことができる。

式(13)の一般化剛性は、管の厚さ方向を12等分し、Simpsonの3/8公式を用いて数値積分により評価する。

3・2 解析対象 管外半径： $b_0+h_0/2=20$ mm, 肉厚： $h_0=1, 2$ および 4 mm の形状の円管について解析した。材料特性として、純アルミニウム (A1100)⁽⁷⁾ について得られた。弾性係数： $E=68$ GPa, 降伏ひずみ： $\epsilon_y=3.3 \times 10^{-4}$ および塑性域の応力-ひずみ関係： $\sigma=157\epsilon^{0.24}$ MPa を用いた。

4. 結果および考察

以下の計算例では、 $N=20$, $dk=0.0002$ を用いた。なお曲率増分が曲率と同程度のとき計算精度が低下するので、曲率が小さいところでは曲率増分を曲率の1/10以下に設定した。

以下の計算結果の表示には無次元化曲率： $K[(b_0+h_0/2)/r]$, その初期値： K_0 , 厚さ比： $H_0[h_0/(b_0+h_0/2)]$ を用いる。

4・1 曲げモーメント 初期曲率 $K_0=0.001$, 厚さ比 $H_0=0.05, 0.1, 0.2$ の円管について、曲率を増大させる方向の曲率変化 ΔK に伴う曲げモーメントの変化を図3に示す。実線が数値結果、記号 (Δ) が実験結果⁽⁷⁾ である。 $H_0=0.1$ では数値結果と実験結果はよく一致しているが、肉厚 ($H_0=0.2$) の場合にはやや数値結果が実験結果より低い曲げモーメントを示している。薄い肉厚の管ほど曲げモーメントは小さい。

肉厚 $H_0=0.1$ の円管について曲げモーメントに及ぼす初期曲率 K_0 の影響を図4に示す。 $K_0=0.001$ と 0.01 の M - ΔK 曲線はほぼ一致しており、これより

$K_0=0.01$ を真直な円管 $K_0=0$ とみなすことができる。 K_0 が大きくなるほど M は低下する。図に示す範囲で $K_0 \leq 0.01$ では、 M は単調に増大するが、 K_0 の大きな円管では M は最大値をとり、減少に転じる。

この理由は以下のものであると考えられる。べき硬化形の材料特性を仮定しているので、一般にひずみの増大とともに応力の増加は鈍化する。さらに曲げの後半において偏平率 F (4・4節参照) の増大により、円管の $(1-F/2)^2$ にほぼ比例する断面二次モーメントは急速に減少する。また、偏平化により対称軸近傍の要素の軸方向ひずみが減少し、軸方向合応力 T_1 が低下する。以上の説明の妥当性は図4の ΔK に対する M の減少率と図8の F の大小が対応していることから確認できる。

4・2 合応力および曲げモーメント 管の横断面の単位長さ当たりの合応力および曲げモーメント T_1, T_2, M_2 の、 $\Delta K=0.002, 0.01$ における分布を、真直な円管 ($K_0=0.001, H_0=0.1$) と曲り円管 ($K_0=0.5, H_0=0.1$) について、図5と図6に示す。縦軸は合応力と曲げモーメントであり、 M_2 は $h/6$ で除して示した。横軸は周方向座標であり、 $\eta=0$ と $\eta=\pi$ がそれぞれ引張側と圧縮側 (図2では右と左) の端に対応する。

真直な円管 (図5) では、 M_2 は中央で正、両端で負の分布であり断面形状を長円形に変形させるが、 T_1 に比較してその値は小さい。特に曲げの初期 ($\Delta K=0.002$) の M_2 は小さく、断面形状の変化はほとんどない。中央 ($\eta/\pi=0.5$) 付近の T_1 の変化が大きい部分が弾性領域である。

曲り円管 (図6) では、 T_1 に比較して M_2 が大きく、それによる断面形状の変化が著しい。中央が正、両端で負の M_2 の分布により断面は図2の鉛直方向を長軸とする形状に変形 (偏平化) する。両端部では、偏平化による中立軸からの距離の減少が、曲げによる軸方向

図3 管壁厚さの曲げモーメントへの影響

図4 管軸初期曲率の曲げモーメントへの影響

ひずみを相殺し、両端部の T_1 は真直な円管の増合 (図5) と対照的に小さい。

4.3 塑性域の進展 図5, 6 に示した $H_0=0.1$, $K_0=0.001, 0.5$ の円管の $\Delta K=0.0005, 0.001, 0.002, 0.01$ の各段階における横断面内の塑性域の進展状況を図7に示す。影部が塑性域である図5, 6と同様に右が引張側、左が圧縮側である。

真直な円管 (図7-I) では、図5に示したように、 T_2 と M_2 に比べて T_1 が大きいので、厚さ全体にわたりほぼ同時に降伏し、塑性域は両端 ($\eta=0, \pi$) から中央に向かって進展する。

曲り円管 (図7-II) では、曲げの初期 (a) では、管壁の曲げにより塑性域は中央の内外表面に発生する。中央 ($\eta/\pi=0.5$) 付近では圧縮の周方向応力 T_2 が作用しており、内側表面の圧縮塑性領域のほうが外側表面の引張塑性領域より広い。(b), (c) の段階では塑性域が拡大し、弾性域は $\eta/\pi=0, 0.5, 1$ 付近の管壁内部に残る。図6に示した M_2 より T_1 が大きな $\eta/\pi=0.3, 0.7$

図5 合応力と曲げモーメントの分布
(真直円管: $K_0=0.001$)

図6 合応力と曲げモーメントの分布
(曲り円管: $K_0=0.5$)

付近では厚さ方向の全域にわたり塑性状態である。両端部 ($\eta=0, \pi$) では T_1, T_2 が小さいため M_2 により表面にだけ塑性域が存在する。(d) の段階では、両端の管壁内部にわずかに弾性域を残すのみである。この塑性域の位置は図6における T_1 と T_2 が小さい値をとる位置に対応している。

4.4 偏平率 曲げに伴い管の横断面は図2の鉛直方向を長軸とする偏平な形状となる。偏平化した断面の長軸と短軸の差を初期の円形断面の直径で除した値を偏平率 F とする。 $H_0=0.1$ で初期曲率 $K_0=0.001 \sim 0.5$ の円管の曲げに伴う偏平率 F の変化を図8に示す。図中の記号 (○) は真直な円管に対する実験結果¹⁷⁾ であり、 $K_0=0.001$ の結果とよく一致している。 K_0 が 0.01 までの真直に近い円管では、曲げの初期で

図7 塑性域の進展

図8 曲げに伴う偏平率の変化

はほとんど偏平化せずに円形の断面形状を保ち、曲げの後期で偏平化する。これに対して曲り円管では、曲げ ΔK に比例して F は増加し、ほぼだ円形に変形する。

5. 結 言

べき硬化形の応力-ひずみ関係を持ち、Prandtl-Reuss の方程式に従う初期曲率を持つ弾塑性円管の一樣面内純曲げ解析を行った。この結果を以下にまとめる。

(1) 円管軸線の初期曲率が大きくなるに従い、支える曲げモーメントは急激に低下する。

(2) 曲り円管は真直円管に比べて横断面形状を偏平化させる曲げモーメントが大きい。真直円管では、曲げにより中立軸からの距離に比例した軸ひずみが生じ、対称軸上の要素が最大の軸方向応力を受ける。これに対し、曲り円管 ($K_0=0.5$) では、偏平化による中立軸からの距離の減少により対称軸付近の要素の軸方

向ひずみが緩和され、その要素の軸方向応力はほぼ零である。

(3) 曲り円管では曲げに比例して偏平化するが、真直な円管では断面形状の変化は小さい。

(4) 曲げに伴う曲げモーメントと偏平率の変化は実験結果とよく一致しており、本解析方法の妥当性が確認された。

文 献

- (1) Axelrad, E. L., *Appl. Mech. Rev.*, **37** (1984), 891.
- (2) Bushnell, D., *Comput. Struct.*, **13** (1981), 241.
- (3) Bielski, J. and Skrzypek, J., *Int. J. Mech. Sci.*, **31-6** (1989), 435.
- (4) Watanabe, O. and Ohtsubo, H., *Theoretical Appl. Mech.*, **26** (1978), 103, University of Tokyo Press.
- (5) Endow, J. and Murota, T., *Adv. Tech. of Plasticity 1984*, **1** (1984), 285.
- (6) Axelrad, E. L., *Theory of flexible shells*, (1987), 80, North-Holland.
- (7) 室田・遠藤, 塑性と加工, **23-255** (1982), 343.
- (8) 川井・近藤, 生産研究, **28-9** (1976), 409.