傾斜機能圧電平板の波動伝播特性と応答解析*

(第2報, 計算結果)

劉 桂榮*¹ 谷 順二*²Characteristics of Wave Propagation in Functionally
Gradient Piezoelectric Material Plates and its Response Analysis

(Part 2: Calculation Results)

Gui-Rong LIU and Junji TANI

The numerical methods presented in the previous paper for the wave propagation analysis of anisotropic functionally gradient piezoelectric material (FGPM) plates are applied to a hypothetical FGPM plate. The frequency spectrum, energy velocities, electromechanical coupling constants, and the mode shapes of the waves in the FGPM plate are obtained. The transient responses of the FGPM plate excited by a line time-step impact load, a line electrode, and interdigital electrodes are computed. The results obtained for the FGPM plate and a homogeneous $z-x$ LiTaO₃ plate are compared. It is found that the displacements are much more concentrated on the softer surface of the FGPM plate than on the surfaces of the homogeneous plate, and that the displacement responses corresponding to the surface waves of the FGPM plate are larger than those of the homogeneous plate. A pseudo-SH surface wave whose penetration depth is as small as that of the Rayleigh wave is discovered.

Key Words : Stress Wave, Composite Material, Anisotropy, Transient Response, Functionally Gradient Material, Group Velocity, SAW Devices, Piezoelectric Actuator

1. 結 言

前報⁽¹⁾においては, 著者らが提案した異方性傾斜機能材料(FGM)の平板の波動問題を対象とする数値解析方法を異方性傾斜機能圧電材料(FGPM)の平板の場合に拡張し, 異方性FGPM板の波動伝播特性の解析式および機械的衝撃荷重と電極励振による異方性FGPM板の変位応答の解析式を導いた. そこで, 本報では, これらの式を用いて, 想定したFGPM板を対象とし, 板を伝播する波の分散関係, エネルギー伝播速度, 実効的な電気機械結合係数および波動モードを求め, さらに, 線衝撃ステップ荷重, 線状としだれ状電極励振による板の衝撃応答を解析した. これらの結果を均質圧電材料の平板の結果と比較検討した.

2. 解析手順

LiTaO₃は化学的に安定で, 水晶に比べて実効的な電気機械結合係数 K_p^2 が大きく⁽²⁾良好な圧電基盤として評価を得つつある. 付録には $z-x$ LiTaO₃の特性値を示す. 本研究ではこの $z-x$ LiTaO₃材料を基準とし, 次のようなFGPM板を想定する. FGPM平板の上表面($z=H$)は $z-x$ LiTaO₃とし, つまり

$$c^U=c, e^U=e, g^U=g, \rho^U=\rho \dots\dots\dots(1)$$

板の下表面($z=0$)において

$$c^L=12c, e^L=0.1e, g^L=0.5g, \rho^L=1.8\rho \dots\dots\dots(2)$$

また FGPM 平板内で物性値は板厚方向に次のように放物線に変化すると仮定する.

$$\left. \begin{aligned} c(z) &= c^U + (c^L - c^U)(1 - z/H)^2 \\ e(z) &= e^U + (e^L - e^U)(1 - z/H)^2 \\ g(z) &= g^U + (g^L - g^U)(1 - z/H)^2 \\ \rho(z) &= \rho^U + (\rho^L - \rho^U)(1 - z/H)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

具体的な計算手順は次のようになる.

(1). 板を厚さ方向に N 枚の板要素に分割し, 式(3)から各要素の上下表面の物性値を求め, そして, 前報の文献(1)の付録より $M_s^i, M_s^d, A_s^i, A_s^d$ を求め, M_{si}, A_{si} を組み立てる. また, 前報の付録より C^i, G^i, C^d, G^d を求め, C_{ii}, G_{ii} を組み立てる.

(2). 特性解析の場合には, 与えられた伝播方向 θ 波数 k に対して, 前報の式(57)より K_{si} を求める. 固有周波数 ω_m と固有ベクトル Λ_m は前報の式(56)を解くことによって得られる. さらに位相速度 c_{pm} は前報の式(54), 群速度 c_{gm} は式(59), 電気機械結合係数 K_{pm}^2 は式(60)を使ってそれぞれ求められる.

(3). 三次元応答解析の場合には, 区間 $[-K_x, K_x]$ と $[-K_y, K_y]$ を適当に分割し, 各分割点 (k_{xi}, k_{yi}) において前報の式(57)で K_{si} を求め, 前報の式(56)を解くこと

* 原稿受付 平成2年12月3日.

¹ 学生員, 東北大学大学院 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉).² 正員, 東北大学流体科学研究所 (〒980 仙台市青葉区片平2-1-1).

によって ω_m と A_m を得る。さらに前報の式 (65), (67), (69) の中のどれかを使って $\tilde{d}_i(k_x, k_y, t)$ を求め、そして、式 (58) を用いて、 $\tilde{\phi}_i(k_x, k_y, t)$ を求める。最後に、前報の式 (77), (78) の積分を完成し、変位と電位を求める。二次元応答解析の場合には、積分は k だけに対して行えばよい。本研究では逆変換の積分は FFT で行われた。

計算はすべて次のように無次元化して行われた。

$$\left. \begin{aligned} \bar{t} &= t/t_0, \quad t_0 = H/c_0, \quad c_0 = \sqrt{c_{66}/\rho_0}, \\ \bar{x} &= x/H, \quad \bar{z} = z/H, \quad \bar{k} = k_z H, \quad \bar{c}_g = c_g/c_0, \\ \bar{u} &= u/u_0, \quad \bar{v} = v/v_0, \quad \bar{w} = w/w_0, \\ u_0 &= f_0 H/c_{66}, \quad v_0 = f_0 H/c_{66}, \quad w_0 = f_0 H/c_{66}, \\ \bar{\varphi} &= \varphi/\varphi_0, \quad \varphi_0 = (e_s H f_0)/(g_s c_{66}) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ここに、 H は板の厚さで、 ρ_0 と c_{66} はそれぞれ $z-x$ LiTaO₃ 板の密度と弾性定数である。 c_0 は $z-x$ LiTaO₃ 材料の横波の伝播速度で、 t_0 はこの横波が板厚の距離を伝播するのに要する時間である。 $e_s = C/m^2$, $g_s = 10^{-10} \text{F/m}$, 機械的荷重の場合 $f_0 = q_0$, 電極励振の場合 $f_0 = e_s p_0/H$ 。本報では応答解析の場合、線衝撃荷重と電極励振を考え ($\theta = 0$)、荷重は板の上表面に作用するとし、電極も板の上表面に設置する。

3. 特性解析結果

図1と2に示すのはFGPM板と均一 $z-x$ LiTaO₃ 板 (以下均一板と略称) の低次の10個の波動モードの周波数スペクトルである。太線は板の上表面を電氣的に開放したときの分散曲線、細線は電氣的に短路したときの分散曲線である。圧電効果が小さく、波の分散特性には大きな影響を与えないので、太線と細線はほとんど重なっている。板の上表面を電氣的に開放する場合、 $\bar{k}=3.927$ の波動モードの形状を図3-6に示す。FGPM板のモードは図3,5に、均一板のモードは図4,6に示す。また、図3,4は変位の形状で、図5,6は電位と電界の形状である。図3と4の比較から均一板と比べ、FGPM板の変位は板の上表面に集中することがわかる。これはFGM板の場合と似ている (前報の文献(1)を参照)。そして図5と6の比較からFGPM板の電位と電界も均一板より板上部に偏ることがわかる。また、波数の増加につれ、変位はより板の上表面に集中する。図7は $\bar{k}=25$ ときFGPM板の最低15個のモードの変位形状を示している。比較するため、 $\bar{k}=25$ の均一板変位形状を図8に示す。この図から、均一板の場合には最低2次モードだけの変位が板の上下表面に集中するに対し、FGPM板の場合には最低14次モードまでの変位は完全に板の上部に集中することがわかる。図を省略するが、FGPM板の電位と電界も波数が大きいときに板の上表面に完全に集中する。応答解析結果を検討するときの便宜上のために、 $\bar{k}=25$ の i 番目のモードを M_i で表記し、求めた $M_1 \sim M_6$ の群速度を表1に示す。材料の異方性により板の三つの変位成分は連成し、前報の文献(1)で求めた純粋なSH表面波は現れていないが、FGPM板のモード2はSH波的な表面波 (以下準SH表面波と略称) である

と考えられる。この準SH表面波は次の三つの特徴を有する。(1) 変位成分 u, w と比べ v 成分の方が大きい。(2) 波数が非常に大きいときに群速度は $z-x$ LiTaO₃ のSH波と同じになる。(3) 変位の表面集中度はSHと同程度である。勿論、等方性FGPM板或は一定の条件を満足する異方性材料 (例えば6mm結晶) のFGPM板においてはある伝播方向で純粋なSH波が得られる。

図7,8にはそれぞれFGPM板と均一板の電気機械結合係数 K_p^2 を示す。均一板と比べ、FGPM板では K_p^2 の小さいモードがあるが、大きいモードもある。また一つのモードに関しても、ある波数の範囲ではFGPM板の K_p^2 が対応する均一板モードの K_p^2 より小さく、ある波数範囲では大きい。例えばモード2の場合、波数が小さいとき均一板の K_p^2 の方が大きい、波数が大きいときFGPM板の K_p^2 の方が大きい。この理由の一つとしては、波数が大きくなるとFGPM板の電位などが板の上表面に集中しているので、板の上表面が電氣的開放するときと短路するときの位相速度の差が大きくなり、結果として K_p^2 が大きくなることである。

4. 応答解析結果

4.1 y 方向のステップ線衝撃荷重による応答 この場合には、前報の式(71)において、 $q_x=0, q_y=1, q_z=0$ とおく。図11と12に示すのは、時刻 $\bar{t}=10.0$ のとき、それぞれFGPM板と均一板の x 方向の変位 u の応答である。各モードの到達する位置は矢印で示している。これらの図からわかるように、均一板の場合には上下表面共に大きい変位応答が生じるのに対し、FGPM板の場合は上表面の変位が大きい、下表面の変位が小さい。特にFGPM板の場合には M_1, M_2 が到達する場所で、板の上表面だけ大きな変位の急激な変化が生じる。つまり、荷重励振の場合には、 M_1, M_2 はFGPMの表面に大きく現れることがわかる。同様な現象は図13,14から観測できる。また図13,14から、板の変位は板全体の上下振動と波動の重ね合わせたものであることがわかる。荷重による電位の応答を図15,16に示す。FGPM板の上表面において M_1 と M_2 の到達する場所で変位の急激変化が見られる。特に M_2 の方が大きいことがわかる。これは波数が大きい場合には M_2 の電気機械結合係数が大きいからである (図9を参照)。

4.2 ステップ線衝撃電位による応答 この場合、電極は y 方向に無限に長いと仮定する: $\phi_e = p_0 \delta(x) H(t)$ 。例として、このような電極によるFGPM板と均一板の変位成分 v の応答を求め、結果を図17,18に示す。均一

表1. 最低6次モードの群速度 $\bar{c}_g$ ($kH = 25.0, \theta = 0$)

Plate	E.B.C.	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
FGPM	Open	0.885	1.048	0.990	1.139	1.055	1.116
	Short	0.884	1.039	0.987	1.140	1.058	1.116
LiTaO ₃	Open	0.918	0.914	0.929	0.896	0.917	0.997
	Short	0.917	0.915	0.929	0.899	0.928	0.991

E.B.C: Electrical Boundary Condition

図1. FGPM 板の固有周波数スペクトル
($\theta = 0$, 細線:open, 太線:short)

図2. 均一板の固有周波数スペクトル
($\theta = 0$, 細線:open, 太線:short)

図3. FGPM 板の波動モードの変位分布
($kH = 3.927$, $\theta = 0$, 細線: u , 点線: w , 太線: v)

図4. 均一板の波動モードの変位分布
($kH = 3.927$, $\theta = 0$, 細線: u , 点線: w , 太線: v)

図5. FGPM 板の波動モードの電位と電界の分布
($kH = 3.927$, $\theta = 0$, 細線: E_x , 点線: E_y , 太線: φ)

図6. 均一板の波動モードの電位と電界の分布
($kH = 3.927$, $\theta = 0$, 細線: E_x , 点線: E_y , 太線: φ)

図7. FGPM 板の波動モードの変位分布
($kH = 25.0$, $\theta = 0$, 細線: u , 点線: w , 太線: v)

図8. 均一板の波動モードの変位分布
($kH = 25.0$, $\theta = 0$, 細線: u , 点線: w , 太線: v)

図9. FGPM 板の電気機械結合係数
($\theta = 0$, 細線: 偶数モード, 太線: 奇数モード)

図11. y 方向ステップ荷重による FGPM 板の x 方向変位の応答 ($i = 10$, —: 下表面, —: 中間面, —: 上表面)

図13. y 方向ステップ荷重による FGPM 板の z 方向変位の応答 ($i = 10$, —: 下表面, —: 上表面)

図15. y 方向ステップ荷重による FGPM 板の電位の分布
($i = 10$, —: 上表面, —: 下表面)

図10. 均一板の電気機械結合係数
($\theta = 0$, 細線: 偶数モード, 太線: 奇数モード)

図12. y 方向ステップ荷重による均一板の x 方向変位の応答 ($i = 10$, —: 下表面, —: 中間面, —: 上表面)

図14. y 方向ステップ荷重による均一板の z 方向変位の応答 ($i = 10$, —: 下表面, —: 上表面)

図16. y 方向ステップ衝撃荷重による均一板の電位の分布
($i = 10$, —: 上表面, —: 下表面)

図17. 線状電極のステップ電位励振によるFGPM板の y 方向変位の応答 ($i=10$, —: 上表面, ---: 下表面)

図18. 線状電極のステップ電位励振による均一板の y 方向変位応答 ($i=10$, —: 上表面, ---: 下表面)

図19. すだれ状電極の周期励振によるFGPM板の x 方向変位応答の振幅 (—: 下表面, ---: 中間面,: 上表面)

図20. すだれ状電極の周期励振による均一板の x 方向変位応答の振幅 (—: 下表面, ---: 中間面,: 上表面)

図21. すだれ状電極の周期励振によるFGPM板の y 方向変位応答の振幅 (—: 下表面, ---: 中間面,: 上表面)

図22. すだれ状電極の周期励振による均一板の y 方向変位応答の振幅 (—: 下表面, ---: 中間面,: 上表面)

図23. すだれ状電極の周期励振によるFGPM板の z 方向変位応答の振幅 (—: 下表面, ---: 中間面,: 上表面)

図24. すだれ状電極の周期励振による均一板の z 方向変位応答の振幅 (—: 下表面, ---: 中間面,: 上表面)

板の場合には板の上下表面とも応答が大きいのに対して、FGPM 板の場合には板の下表面の変位が非常に小さく、上表面の変位が非常に大きい。特に M_2 の到達する場所では非常に急激な変位変化が観測された。これは主に次の二つの理由によるものと考えられる。一つは波数が多いとき M_2 の電気機械結合係数 K_p^2 が大きいことである。もう一つは M_2 の変位が板の上表面に著しく集中することである。

4.3 すだれ状電極の周期励振による応答 上記の結果から FGPM 板の場合には準 SH 表面波 (モード2) を励振すれば大きな応答が期待できる。そこで、本節では戸田ら⁽²⁾が使用した電極

$$N_e=10, d_e=0.8H, h_e=d_e/2 \dots\dots\dots(5)$$

をそれぞれ FGPM 板と均一板の上表面に設置し、それらの二次モードを励振し、変位振幅の分布を調べる。板表面の電位分布は前報の式 (73) に与えられている。また、前報の式 (76) により、 $kH = \pi H/d_e \approx 3.927$ のとき励振効果が大きいことがわかる。板の上表面を電気的に開放する場合、 $kH = 3.927$ のときの FGPM 板と均一板の波動モードはすでに図 3,4 に示してある。電気的に短路する場合のモードはほとんど変わらないので、本節では図 3,4 を参照して検討を行う。そして、板の上表面を電気的に短路する場合、 $kH = 3.927$ のとき求めた FGPM 板と均一板の二次モードの固有周波数はそれぞれ $5.944\omega_0$ と $4.066\omega_0$ であるので、電極にかかる電位の励振周波数 ω_f を FGPM 板の場合は $5.994\omega_0$ で、均一板の場合は $4.066\omega_0$ とする。また、 $kH = 3.927$ のとき求めた FGPM 板の電気機械結合係数 K_p^2 は約 0.93% で、均一板の K_p^2 は約 1.6% である。

変位振幅の x 方向の分布を図 19-24 に示す。左側の図 (図 19,21,23) は FGPM 板に関するもので、右側の図 (図 20,22,24) は均一板に関するものである。まず、これらの図から、波長 $\lambda = 1.6H$ の波が励振されていることがわかる。そして、図 19,21,23 を図 3 と、図 20,22,24 を図 4 と比べて見ると、確かに板の二番目のモードが励振されたことがわかる。また、図 19,21,23 をそれぞれ図 20,22,24 と比べると、均一板の上下表面の変位振幅はほぼ同じ大きさを有する (図 22 の場合三本の線はほとんど重なっている)。これに対し FGPM 板の上表面の変位の振幅は下表面よりはるかに大きいことがわかる。さらに、板の上表面の変位振幅に限って言えば、均一板の電気機械結合係数は FGPM 板の約 1.7 倍にもかかわらず、FGPM 板の変位の振幅は均一板より u は 2 倍余り、 v は約 3 倍、 w は約 1.7 倍大きいことがわかる。これは FGPM 板の場合には変位が上表面に集中する効果が大きいからである。

一般に言えば、 K_p^2 が大きければ電極の励振による板の変位応答が大きく、あるいは機械的荷重による電気量の応答が大きい。しかし上記の計算例は、FGPM 板を均一板と比較する場合、均一板の K_p^2 が大きいとし

ても必ずしも同一電極の励振による応答が大きいとは限らないという事実を示している。

5. 結 言

本報では、前報の式を用いて想定した傾斜機能圧電材料の板と均一 $z-x$ LiTaO₃ 板の波動伝播特性および線ステップ衝撃荷重、線状電極の衝撃電圧およびすだれ状電極の周期励振によるこれらの板の応答の解析結果を報告した。本解析結果から次の結論を得る。(1) FGPM 板の波動モードの変位はより柔らかい表面に集中する;(2) 板表面は電気的に開放するとき各モードの電位、電界も変位の集中する面に集中する、言い換えれば FGPM 板の場合には低次モードの波はすべて表面波になる;(3) FGPM 板の場合には Rayleigh 波と同程度の表面集中度を有する準 SH 表面波が存在し、この表面波をすだれ状電極で励振すると大きい応答が得られる。また波数が多い場所で励振すれば (電極の間隔を短くする) 電気機械高結合と変位の高表面集中の両効果が得られるので高い励振効果が期待できる。

概して言えば圧電板の物性値を板の厚さ方向に適当に勾配を持たせることによって、より効率の高い表面波デバイスが期待できる。本研究ではこのような板における波動伝播問題を解析する方法を提案した。今後この方法を用いて実際の表面波デバイスの設計の研究を進める予定である。

付 録

LiTaO₃ 圧電単結晶材料の材料定数⁽²⁾

$$c = \begin{bmatrix} 22.98 & 0.440 & 0.812 & -0.104 & 0.000 & 0.000 \\ 0.440 & 2.298 & 0.812 & 0.104 & 0.000 & 0.000 \\ 0.812 & 0.812 & 2.798 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.104 & 0.104 & 0.000 & 0.968 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.968 & -0.104 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.104 & 0.929 \end{bmatrix} \times 10^{11} (\text{N/m}^2)$$

$$e = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.72 & -1.67 \\ -1.67 & 1.67 & 0.00 & 2.72 & 0.00 & 0.00 \\ -0.38 & -0.38 & 1.09 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times (\text{C/m}^2)$$

$$g = \begin{bmatrix} 42.6 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 42.6 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 42.8 \end{bmatrix} \times \epsilon_0, \quad \rho_0 = 7456 \text{ kg/m}^3$$

文 献

- (1) 刘・谷, (本文の第一報), 機論, 投稿中, A(1990).
- (2) 戸田・水谷, 信学論, J71-A, (1988), 1225.