信頼性に基づく繊維強化複合材料積層平板の最適設計*

邵 曉文^{*1}, 三木光範^{*2}, 室津義定^{*2}

Optimum Fiber Orientation Angle of Multiaxially Laminated Composites Based on Reliability

Shaowen SHAO, Mitsunori MIKI and Yoshisada MUROTSU

In this paper, the structural reliability theory is applied to multiaxial fiber-reinforced laminate systems. The first-ply-failure criterion is adopted for the reliability analysis of the laminate systems, and the multiple-check-point method is successfully applied to evaluate the reliabilities of biaxial, triaxial and tetraaxial laminates under the probabilistic in-plane stresses. The reliability-based optimum fiber orientation angles of multiaxial laminates are determined and compared with those under the deterministic conditions. Further, some effects of the random properties of loads and strengths are discussed. From the numerical results it is concluded that the optimum fiber orientation angles of laminates are very different between the deterministic and probabilistic conditions and that the reliability of the multiaxial laminates increases with the increase in the number of orientation axes under probabilistic conditions. As a result, the optimum laminates approach quasi-isotropic construction when the uncertainty in the stresses and strengths is taken into consideration.

Key Words: Composite Materials, Optimum Design, Multiaxial Laminates, Reliability Analysis, Multiple-Check-Point Method, First-Ply Failure, Optimum Orientation Angle

1. 緒論

繊維複合材料の材料設計の最適化は確定的条件のもとで多く行なわれている¹⁾²⁾。しかし、一般に実用的条件下では種々の確率的要因により材料強度や負荷荷重は必ずある程度の変動性を有しており、確定設計の結果がこういう確率的条件に対しても一致するという保証はない。三木、室津らは構造信頼性の立場から、確率条件下での一方向繊維強化複合材料(UD)の最適配向角の決定について、AFOSM法による複合材料の信頼性評価に基づく最適設計手法³⁾とITE最適性基準(内接楕円体法)⁴⁾を提案した。これらの研究によって、一方向繊維強化複合材料の確率的条件下で最適な繊維配向角は確定的条件下とは異なることが明らかになった。

実用的には、一方向繊維強化複合材料の単層板より積層板の最適設計が必要である。そこで、本研究はいくつかの異なる繊維配向角を持つプライを積層した繊維強化複合材料積層板を対象とし、積層板全体を一つ

のシステムとみなして、信頼性評価を行ない、それに基づく最適な繊維配向角を決定する。具体的な積層板としては $\pm\theta$ 層から成る2軸材(Biaxial)、 0° および $\pm\theta$ 層から成る3軸材(Triaxial)と 0° , $\pm\theta$ および 90° 層から成る4軸材(Tetraaxial)を考える。そして、それらの積層板の最適繊維配向角および同じ荷重条件下での信頼性の相違について考察する。

2. 積層板の信頼性解析と最適設計問題

Fig.1に単層板および3種の積層板複合材料を示して

Fig.1 Multiaxial laminates

* 原稿受付 平成3年1月28日。

^{*1} 正員, 大阪府立大学工学部 (〒591 堺市百舌鳥梅町4-804)。

^{*2} 大阪府立大学工学部。

いる。ここでは、積層板に作用する応力として面内応力 S_1, S_2 , および S_6 のみを考えることとする。 S_1, S_2 は1, 2軸の負荷応力で、 S_6 は1-2方向のせん断応力である。N層を含む積層板の中でi層目に働く応力が次式から計算される³⁾。

$$\begin{pmatrix} S_{x,i} \\ S_{y,i} \\ S_{6,i} \end{pmatrix} = Q_i \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 x_i はi層の繊維配向軸で、 y_i は x_i に直交する軸である。 Q_i は各層の剛性、含有率、繊維配向角などに関連するマトリクスである。

i層の限界状態関数をTsai-Wu破壊基準を用いて、次のように与える。

$$M_i = 1 - \left[\sum_{k=x_i}^{y_i} \left\{ \left(\frac{1}{R_{k,i}} - \frac{1}{R_{k,i}'} \right) S_{k,i} + \frac{S_{k,i}^2}{R_{k,i} R_{k,i}'} \right\} + \frac{S_{6,i}^2}{R_{6,i}^2} + \frac{2F_{x_i y_i}}{\sqrt{R_{x_i} R_{x_i'} R_{y_i} R_{y_i'}}} S_{x,i} S_{y,i} \right] \quad (2)$$

$M_i \leq 0$: 破損; $M_i > 0$: 安全。

ここで、

$R_{x,i}$: x_i 軸の引張強度, $R_{y,i}$: y_i 軸の引張強度。

$R_{x,i}'$: x_i 軸の圧縮強度, $R_{y,i}'$: y_i 軸の圧縮強度。

$R_{6,i}$: x_i, y_i 方向のせん断強度。

また、 $F_{x_i y_i}$ は強度の相関項で、十分な実験データがない場合には $-1/2$ の値が推奨されている。

(1)および(2)式に含まれる負荷応力 S_1, S_2 , および S_6 と各層の強度 $R_{x,i}, R_{x,i}', R_{y,i}, R_{y,i}', R_{6,i}$ を確率変数として扱い、それらをベクトル $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ で表わす。そうすると、各層の限界状態関数 M_i はすべて X の関数 $M_i(X)$ ($i=1, \dots, N$)で表わされる。

積層板の中の任意の一層が破損すれば、積層板システムの破損になると仮定する。従って積層板の破損確率は各層の破損の和事象の確率となる。

$$P_f = P[(M_1 \leq 0) \cup (M_2 \leq 0) \cup \dots \cup (M_N \leq 0)] \quad (3)$$

P_f を計算するために、確率変数 X を独立な標準正規確率変数 U に変換する。 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ がもとより互いに独立であれば、 U への変換は容易にできる。しかし、材料強度の分布などは非正規分布で、それぞれの周辺密度関数と相関係数しか与えられない場合も多い。そのような確率変数を取り扱う場合に、 X から U への変換を行うために、まず X から相関のある正規確率変数 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ に変換する。さらに、 Y に対して無相関化を行い、独立な標準正規確率変数 U に変換する手順を取る。周辺確率分布関数 $F_{X_k}(X_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$)と相関係数 $\rho_{x_i x_j}$ ($i, j=1, 2, \dots, n; i \neq j$)が既知である X から Y への変換については、室津ら⁴⁾が次の変換式を提案している。

$$Y_k = \Phi^{-1} [F_{X_k}(X_k)] \quad k=i, j \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1} X_i [\Phi(y_i)] \cdot F^{-1} X_j [\Phi(y_j)] \cdot \\ & \quad \phi(y_i, y_j; \rho_{y_i y_j}) dy_i dy_j \\ & = \rho_{X_i X_j} \cdot \sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j} + \mu_{X_i} \cdot \mu_{X_j} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 μ : 平均値

σ : 標準偏差

Φ : 標準正規確率分布関数

$$\begin{aligned} \phi(y_i, y_j; \rho_{y_i y_j}) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho_{y_i y_j}^2}} \cdot \\ & \exp \left[-\frac{y_i^2 - 2\rho_{y_i y_j} y_i y_j + y_j^2}{2(1-\rho_{y_i y_j}^2)} \right] \end{aligned}$$

実際には、式(5)を満足するように Y の相関係数

$\rho_{y_i y_j}$ ($i, j=1, 2, \dots, n; i \neq j$)を決定する。

X が U に変換されると同時に、限界状態関数 $M_i(X)$ も U 空間の関数 $h_i(U)$ に変換される。 U 空間での $h_i(U)$ の概念図をFig. 2に示す。これより(3)式の破損確率の計算は、 U 空間で複数の非線形限界状態関数を有する信頼性評価問題になる。いままでのAFOSM法は限界状態関数を原点が一番近い点(β -点)で線形化して、破損確率を近似的に評価する。これは β -点での確率密度が破損領域の他の所と比べてはるかに高い場合、いわゆる限界状態関数が線形に近い時良い近似解を与える。しかし、Fig. 2のように安全領域が複数の非線形限界状態関数で囲まれている場合、ただ一つの点で線形化を行えば明らかに大きな誤差を生じる。そこで、本研究では次のような探索手順によって破損領域と安全領域の境界の上でいくつかの破損確率密度の高い点(評価点と呼ぶ)を見つける。

Fig. 2 A multiple-check-point method for evaluating reliability.

Step 1: 最大繰り返し数 $N_{1,1}, \dots$, 最大設計点数 $N_{1,1}, \dots$, γ , θ を与える. $\beta_{1,1}=20$, $m=1$, $N_0=1$, 初期点を $U^0=[0,0,\dots]^T$ とする.

Step 2: 乗数法によって, 原点から限界状態関数 $h_1(U)=0$ までの局所最短距離 β_1 を見つけて, その座標を U^1 とする.

Step 3: $\beta_{1,1} > \beta_1$ ならば, $\beta_{1,1} = \beta_1$, $\beta_1 = -\Phi^{-1}[\Phi(-\beta_{1,1}) \cdot 10^{-7}]$ とおく.

Step 4: $m=m+1$ とおく.

$m > N_{1,1}$ ならば, Step 11 へ.

そうでなければ, 乱数による単位ベクトル l を発生する. l と $U^1, \dots, U^{m-1}$ との間の角度 θ_i ($i=1, 2, \dots, N_0$) を計算する. $\theta_i \leq \theta$ ならば, $R=1 \cdot \beta_i$ とおく. 全ての i に対して $\theta_i > \theta$ ($i=1, \dots, N_0$) ならば, $R=1 \cdot \beta_1$ とおく.

さらに, $k=0$, $j=0$ とおく.

Step 5: $k=k+1$ とおく. $k > N$ ならば, Step 7 へ.

Step 6: $h_k(R) \geq 0$ ならば, Step 5 へ.

そうでなければ, R と同じ方向で $h_k(R')=0$ を満足する R' を求める. $R=R'$, $j=k$ とおく. Step 5 へ.

Step 7: $j=0$ ならば, Step 4 へ.

そうでなければ, $\beta_{m+1}=|R|$, $U^{m+1}=R$ とおく.

Step 8: U^{m+1} を初期点として, 乗数法によって, 原点から限界状態曲面 $h_1(U)=0$ までの局所最短距離 β_{m+1} を見つけて, その座標を U^{m+2} とする.

Step 9: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}$ を昇順に並べ替えて, $U^1, U^2, \dots, U^{m+1}, U^{m+2}$ をもそれぞれに対応して入れ替える.

Step 10: ベクトル $U^1, U^2, \dots, U^{m+2}$ の中互いに θ 以下の角度をなす場合, β の大きいものを捨てる. 残ったベクトルの数を新しい N_0 とする. β の昇順にもう一度 $U^1, U^2, \dots, U^{m+2}$ を入れ替える. $N_0 > N_{1,1}$ ならば, $N_0 = N_{1,1}$ とおく. Step 3 へ.

Step 11: Stop.

得られた N_0 個の評価点と原点との距離は $\beta_{1,1}$ と $\beta_1 = -\Phi^{-1}[\Phi(-\beta_{1,1}) \cdot 10^{-7}]$ の間にあり, しかも互いに θ 以上の角度を保っている. 各評価点 U^i で線形化し, 次のような新しい線形限界状態関数を定義する.

$$m_i(U) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_{i,j}(U)}{\partial U_j} \bigg|_{U=U^i} \cdot (U_j - U_j^i) \quad (6)$$

($i=1, 2, \dots, N_0$)

ここで, N_0 は評価点の数で, $U^i=(U_1^i, U_2^i, \dots, U_n^i)^T$. $h_{i,j}$ は評価点 U^i を与える限界状態関数である. Fig. 2 に示されたように非線形関数 $h_i(U)=0$ ($i=1, 2, \dots, N_0$) の代わりに線形関数 $m_i(U)=0$ ($i=1, 2, \dots, N_0$) を用いて,

$P[(m_1 \leq 0) \cup (m_2 \leq 0) \cup \dots \cup (m_{N_0} \leq 0)]$ の上・下限値 (Ditlevsen's bounds) を計算し, P_i を評価する. この方法をここでは多点近似FOSM法と呼ぶ.

求められた N_0 個の評価点がモンテカルロ法における重点サンプリングの中心点としても使われる. すなわち, それらを中心とした正規乱数を発生させて, 乱数が Fig. 2 の破損領域 $[(h_1 \leq 0) \cup (h_2 \leq 0) \cup \dots \cup (h_n \leq 0)]$ に入る相対度数が P_i の近似解となる.

破損確率 P_i から次のように信頼性指標 β を定義する.

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_i) \quad (7)$$

本研究では, この信頼性指標 β が最大となるように繊維強化複合材料積層板の最適繊維配向角を決定する.

3. 数値計算例

計算に用いた材料は典型的なCFRP(T300/5208)で, 各層の強度特性を以下に示す.

$$E(R_x)=1.5, E(R_y)=1.5, E(R_z)=0.04, E(R_{xy})=0.246, E(R_{yz})=0.068 \text{ (GPa)}. \text{ 変動係数はすべて } 0.1 \text{ とする.}$$

負荷応力の平均値および標準偏差は以下の値を仮定する.

$$\begin{aligned} E(S_1) &= 0.1, & SD(S_1) &= 0.03, \\ E(S_2) &= -0.1 \sim 0.1, & SD(S_2) &= 0.03, \\ E(S_3) &= 0, & SD(S_3) &= 0 \text{ (GPa)}. \end{aligned}$$

さらに, 3.1と3.2節では, 各確率変数が独立な正規分布に従うとする. 2軸材, 3軸材および4軸材の各繊維配向角をもつ層の比率は3.2節以外の計算ではすべて等しくする.

3.1. 繊維複合材料積層板の信頼性および最適繊維配向角

信頼性を基準とする最適設計と比較するために, ま

Fig. 3 Strength ratios for multiaxial laminates under deterministic condition.

Fig. 4 Reliability of biaxial laminates.

Fig. 6 Reliability of tetraaxial laminates

 (a) $E(S_2) = -0.1 \sim 0$

(a) For the deterministic condition.

 (b) $E(S_2) = 0 \sim 1.0$

(b) For the probabilistic condition.

Fig. 5 Reliability of triaxial laminates

Fig. 7 Optimum orientation angle of multiaxial laminates.

Fig. 8 Reliability of biaxial laminates evaluated by the multiple-point importance sampling method.

ず確定設計の結果をFig. 3に示す。ここで、負荷応力に対する強度比を各配向角ごとに示している。30°付近の2軸材が一番高い強度比を与えている。

Fig. 4, 5, 6はそれぞれ2軸材, 3軸材および4軸材の信頼性設計の結果である。

各負荷応力に対応する曲線の中で β が一番大きい点が最適な配向角を与える。確定設計と違って、2軸材の信頼性がほかの2種の積層板よりかなり低くなっている。その原因は、Fig. 3から分かるように最適配向角付近での2軸材の強度比の変化が配向角に対して非常に敏感であることにある。すなわち、そこでは荷重と強度の条件がすべて確定の場合だけ高い強度が実現できるが、もし少しでも変動があれば強度がすぐ低下する。結果として、信頼性が低くなる。この意味では、Fig. 3の確定設計が強度比だけを重視するのは、ある程度の危険性を伴う。

確定設計と信頼性設計の最適繊維配向角が S_2 の変動に従って推移する様子をFig. 7に示す。強度と荷重に変動がある場合、最適配向角が大きくなる。すなわち、等方性化する傾向がある。特に3軸材は0°層がすでにあるので、ほかの2層の配向角はいつも $\pm 60^\circ$ 前後で、等方性を保って、荷重の変動に対応する。

以上の計算結果はすべて多点近似FOSM法によるものである。Fig. 8は多点重点サンプリングを用いて、2軸材の信頼性を計算したものである。Fig. 8とFig. 4を比較すると、二つの信頼性評価法による結果がよく一致していることがわかる。

3.2. 繊維配向角および含有率の同時最適化問題

これまでの計算では異なる繊維配向角をもつ層の比

Fig. 9 Reliability of triaxial laminates (Contents: $P[+\theta]=P[-\theta]=0.4$, $P[0^\circ]=0.2$).

Fig. 10 Reliability of triaxial laminates (Contents: $P[+\theta]=P[-\theta]=0.25$, $P[0^\circ]=0.5$).

率を等しくし、繊維配向角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N$)のみをパラメータとして最適化を行ってきたが、さらに、各繊維配向角の層の含有率 P_i ($i=1, 2, \dots, N$)をもパラメータとして、 θ_i と P_i を同時に最適化する問題も考えられる。Fig. 9とFig. 10は含有率が異なる2種の3軸材の信頼性設計の結果を示している。Fig. 5は0°, -θ, +θ層の含有率が等しい場合の結果であるので、Fig. 5, 9, および10の信頼性と最適繊維配向角を比較すると、Fig. 10が一番高い信頼性を与えている。つまり、0°層の含有率が多くて、 θ の値が大きい($>60^\circ$)方がよいことがわかる。しかし、これはまだ厳密な最適解ではない。このような配向角 θ_i と含有率 P_i の同時最適化は非常に興味深い課題の一つと考えられる。

Fig. 11 Effect of distributions of stresses and strengths.

(a) Effect of the correlation coefficient among the strengths of different plies.

Fig. 12 Effect of the correlation coefficient between stresses S_1 and S_2 .

(b) Effect of the correlation coefficient among the strengths of the same plies.

Fig. 13 Effects of the correlation coefficients among strengths.

3.3. 確率変数の分布による信頼性および最適繊維配向角への影響

これまでの計算は負荷応力と荷重が正規分布に従うという仮定に基づいて行われたが、実用条件下では、他の種々の分布、例えば、対数正規分布、ワイブル分布、ガンベル分布なども考えられている。そこで、確率変数の分布の違いが積層板の信頼性および信頼性に基づく最適繊維配向角に及ぼす影響について調べる。Fig. 11には負荷応力と強度の分布の4種の異なる組合せによる積層板の信頼性の相違が示されている。強度

の平均値および変動係数は3章の最初で与えられた数値を使っている。負荷応力の平均値及び変動係数は $E(S_1)=0.1$, $E(S_2)=0.04$, $CV(S_1)=CV(S_2)=0.3$ (GPa)である。計算に用いられた積層板は4軸材である。負荷応力と強度の平均値および変動係数がすべて同じなのに、確率分布の違いによって積層板の信頼性が大きく変化することがFig. 11から分かる。また、Fig. 11の中の各曲線の最大信頼性を実現する最適繊維配向角も多少異

なる。この結果から、強度と荷重の正確な確率分布を把握した上で信頼性設計を行えば、より精密な結果が得られることが分かる。

3.4. 確率変数間の相関係数が信頼性および最適繊維配向角に及ぼす影響

負荷応力および強度の各変数の間の相関係数が積層板の信頼性および最適設計に及ぼす影響について考える。負荷応力の分布を正規分布、強度の分布を対数正規分布とする。このような独立でない確率変数の無相関化、標準正規確率変数 U への変換には2章で述べた方法を用いる。なお、強度と負荷応力の平均値及び変動係数、そして、計算に用いた積層板は3.3節と同じである。

Fig.12は負荷応力 S_1 と S_2 の相関による積層板信頼性への影響を示している。相関係数 ρ_{12} が -1.0 から 1.0 まで変化すると積層板の最大信頼性が低くなることが分かる。すなわち、多軸積層板では荷重の相関係数が高くなると、荷重ベクトルの作用方向がそろってくることによる信頼性の向上よりもそれらの荷重の振幅が増大することによる信頼性の低下の影響が著しいと考えられる。これは一方向材の結果²⁾とは異なる。Fig.13は強度変数間の相関の影響を示したものである。ここで、 ρ_{11} と ρ_{22} はそれぞれ各層の強度の間の相関係数と同じ層の強度の間の相関係数を表している。Fig.13から ρ_{11} 、 ρ_{22} による影響は比較的小さいことが分かる。これは各強度変数の変動係数が小さい ($CV=0.1$) ことと関連していると思われる。

4. 結論

繊維強化複合材料積層板を対象に、構造信頼性理論を用いて確率的条件下における積層板の信頼性評価およびそれに基づく最適設計を行った。繊維複合材料積層板を一つの構造システムと見なして、各層の限界状態関数を Tsai-Wu 破壊規準に基づいて定義し、積層板システムの破壊は任意一層の破壊によって生じるものと仮定した。複数の非線形限界状態関数を有する積層板の信頼性評価問題について、多点近似FOSM法を提案した。それを用いて、2軸材、3軸材および4軸材の信頼性を評価し、確率的条件と確定的条件下での積層板の最適繊維配向角の相違について考察を行った。また、繊維配向角と含有率の同時最適化の可能性、作用荷重および材料強度の確率分布と相関による信頼性への影響についても調べた。

数値計算の結果から、次のようなことが分かった。確定設計の中では異なる繊維配向角を持つ層の数が増

えれば積層板全体の強度が低下するのに対して、確率的設計の中では繊維の配向角の種類が多ければ信頼性が高くなる傾向がある。そして、確率的条件下と確定的条件下とでは積層板の最適配向角も大きく異なる。荷重および強度の変動が大きいときには等方性化が有利である。

なお、本研究は文部省科学研究費補助に関連してなされたことを付記する。

参考文献

- 1) Tsai, W., Composite Design (3rd ed.), Think Composites, Dayton, Ohio, 1987.
- 2) Park, W.J., "An Optimum Design of Simple Symmetric Laminates Under the First Ply Failure Criterion," Journal of Composite Materials, Vol.16, July 1982, pp. 341-355.
- 3) Miki, M., Murotsu, Y., Tanaka, T., and Shao, S., "Reliability of Unidirectional Fibrous Composites," AIAA Journal, Vol.28, No.11, 1990, pp. 1980-1986.
- 4) Miki, M., Murotsu, Y., and Tanaka, T., "Optimum Fiber Angle of Unidirectional Composites for Load With Variations," Proceedings of 31st SDM Conference, Long Beach, April 2-4, 1990, pp. 1333-1339; AIAA Paper 90-1071.
- 5) Tsai, S. W. and Hahn, H. T., Introduction to Composite Materials, Technomic, Westport, CT, 1980.
- 6) Murotsu, Y., Shao, S., Murayama, N., and Yonezawa, M., "Importance Sampling Method for Reliability Assessment of Structures with Multi-Modal Limit States," Proceedings of ISUMA' 90, University of Maryland, Dec. 3-5, 1990, pp. 49-54.