境界要素法による形状最適化のための設計変数縮約法*

山崎 光悦^{*1}, 坂本 二郎^{*1}
尾田 十八^{*1}, 林 文俊^{*2}Design Variable Reduction Technique for Shape Optimization
by Boundary Element Method

Koetsu YAMAZAKI, Jiro SAKAMOTO, Juhachi ODA and Wen-jun LIN

Design variable reduction is a very important technique for obtaining efficient structural optimization using a mathematical programming technique. Two reduction techniques based on the isoparametric interpolation method and the trigonometric series interpolation method are suggested. The minimum compliance design problem subjected to volume constraint and its sensitivity analysis are formulated for these reduction techniques, based on the boundary element analysis. These techniques concatenated with the sequential quadratic programming method are applied to determine hole shapes in the plates under biaxial uniform loading with different stress ratios and a shape of a multiconnected cantilever structure. From these numerical results, the validity and applicability of the reduction techniques are confirmed.

Key Words: Optimum Design, Boundary Element Method, Design Engineering, Shape Optimization, Mathematical Programming Method, Design Variable Reduction.

1. 緒 言

“より軽く、より強く”を目標とする構造最適設計法では、一般に有限要素法(FEM)や境界要素法(BEM)による大規模な構造解析を繰返し実施するため、現在のコンピュータの能力をもってしても不十分な面が多く、それを克服するための努力が種々行われている。乗数法や一般縮小こう配法などより効率的で確実な数値計画法の開発と並行して、設計感度をいかに効率的に求めるかという点に研究努力が集中的に注がれてきた⁽¹⁾⁽²⁾。一方、解析効率の良い境界要素法を用いた形状最適化に関する研究が二次元問題を中心に盛んになりつつある^{(3)~(5)}が、数値計画法によって形状を徐々に修正していく連続体の形状最適化問題において、従来の手法では設計境界上のすべての節点位置を直接設計変数に取ることが多い。したがって一般的な形状設計問題は高次元の数値計画問題となってしまう、解の探索が極めて困難となり、解を最終的に得るまでには莫大な計算時間を必要とし、滑らかな形状が求まらないことも多い。また解析誤差などに起因して

最終的に求まる形状がジグザグとなるため、形状平滑化のための処理を必要とする。

そこで本研究では、二次元問題を対象に形状の任意性を失うことなく、設計変数の数を減少し、滑らかな最終形状を得る具体的な方法として、アイソパラメトリック補間と三角級数補間による設計変数縮約法を提案し、境界要素法による体積制約下の最大剛性設計問題に適用してその有効性を検討した結果について報告する。

2. 境界要素法による形状最適化法

以下では設計変数縮約のための具体的な方法を提案し、最大剛性設計への適用法を示す。

2.1 設計変数縮約法

(1) アイソパラメトリック補間法 アイソパラメトリック補間法とは、従来の形状を表す節点座標を直接設計変数とする方法とは違って、設計境界における少数の代表節点の形状ベクトルを設計変数とし、解析のためのほかの節点位置をアイソパラメトリック補間によって生成して最適化を行うものである。

二次元の場合、図1に示すように解析領域を Ω 、その境界を Γ 、形状を最適化しようとする設計境界を Γ_0 とすると、まず Γ_0 をいくつかの設計区間に分割し、

* 原稿受付 平成3年3月22日。

^{*1} 正員、金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野2-40-20)。^{*2} 学生員、金沢大学大学院。

各設計区間の形状を区間内の少数の代表点の形状ベクトル $\mathbf{b}_I (I=1, 2, \dots, L, L$ はアイソパラメトリック補間次数 + 1) で表す。また原点ベクトルを $\mathbf{b}_0$ 、各区間ごとに境界に沿って取った正規座標を ξ とすると、境界要素に分割するために設計区間に設ける任意節点 k の形状ベクトル $\mathbf{h}_k$ は次式で表される (英小文字の添字は区間内の節点を表す)。

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{b}_0 + N_I(\xi_k) \mathbf{b}_I \quad (k=1, 2, \dots, K) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 N_I は $L-1$ 次の内挿関数、 ξ_k は節点 k の ξ 座標値で、同一指標は総和規約に従うものとする。このとき節点 k の座標 x_a (ギリシャ文字の添字は $a=1, 2$ などとする) は、

$$x_a^k = b_{0a} + N_I(\xi_k) b_{Ia} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 b_{0a}, b_{Ia} は形状ベクトル $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_I$ の x_1, x_2 座標成分とする。ベクトルの方向を不変として $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_I$ の大きさが直接設計変数に取られる。

(2) 三角級数補間法 一方、三角級数補間法では、設計境界 Γ_s の形状を一つまたは複数個の三角級数補間によって近似する。この時、境界法線方向の形状ベクトル $\mathbf{h}_k$ の大きさ、座標は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_k &= x_a^k \mathbf{n}_a, \\ n_1 &= dx_2/d\Gamma, n_2 = -dx_1/d\Gamma \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$x_a^k = \sum_{n=0}^N A_{an} \cos n\theta_k + \sum_{m=1}^M B_{am} \sin m\theta_k \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\mathbf{n}_a$ は生成する節点 k での境界法線方向の方向余弦、 θ_k はあらかじめ与える角度パラメータとする。また、 $d\Gamma$ は設計境界に沿った微小線素とし、 A_{an}, B_{am} を直接設計変数に取る。三角級数補間によれば、最初の数項を用いて基本的な多角形状を近似的に表現することができるので、アイソパラメトリック補間法のような形状表現の自由度はないが、空孔形状などのより縮約した取扱いが可能となる。

図 1 アイソパラメトリック補間による形状表現

2.2 最大剛性設計問題の定式化 最大剛性設計問題とは荷重点の荷重方向変位を最小にすることであり、分布荷重を受ける場合には解析領域の全ひずみエネルギーを最小にすることと等価であることが多い。そこで、負荷される外荷重を不変と仮定し、目的関数として外力仕事を考え、これを最小化する。境界表面力を t_a 、変位を u_a とすると、目的関数は次のようになる。

$$f = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_a u_a d\Gamma \rightarrow \text{Min} \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、制約条件として本研究では体積制約を考えた。体積の上限を V_0 とすると、制約条件 g は次式となる。

$$g = \int_{\Omega} d\Omega - V_0 \leq 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

2.3 設計感度解析法 最適化手法として本研究では、逐次二次計画法の一つである PLM 法⁽⁶⁾ を用いた。この手法では目的関数、制約条件の設計変数に関する微分、いわゆる設計感度を必要とする。そこで、目的関数、制約条件の設計変数に関する第一変分を考え、設計感度を導く。

まず目的関数の設計感度は、設計境界上のひずみエネルギー密度を U_0 とすると、次式より求められる⁽¹⁾。

$$\delta f = - \int_{\Gamma_s} U_0 \delta h d\Gamma \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\int_{\Gamma_s}$ は設計境界における積分を表す。 δh は設計境界上の形状ベクトルの法線方向の摂動であり、離散化によって、要素内にとった正規座標を ξ とすると、アイソパラメトリック補間法の場合では式(8)で、三角級数補間法の場合には式(9)で近似される。

$$\delta h = N_I(\xi) N_J(\xi_I) \delta b_I \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\delta h = N_I(\xi) \delta x_a^I n_a \quad \dots\dots\dots (9)$$

図 2 平板構造解析モデル

$$\delta x_a^i = \sum_{n=0}^N \delta A_{an} \cos n\theta_i + \sum_{m=1}^M \delta B_{am} \sin m\theta_i$$

一方、体積制約条件の設計感度は次式のように表される。

$$\delta g = \int_r \delta h d\Gamma \dots\dots\dots (10)$$

3. 最大剛性設計問題への適用例

上述の設計変数縮約法の有効性を示すために、3節点二次要素を用いて実施した形状最適化の例を以下に示す。

3・1 二軸引張応力場下の平板 解析モデルとして図2に示すような二軸引張応力場下の正方形板（寸法 $2a \times 2a$ ）中の空孔形状の最適化を考えた。負荷条件として外部境界に、 x_1 方向に $\sigma_{11} = \sigma_0$ 、 x_2 方向には、アイソパラメトリック補間法の場合では $\sigma_{22} = \sigma_0$ 、三角級数補間法の場合では $\sigma_{22} = 2\sigma_0$ を負荷する。制約条件として空孔面積を正方形板の 2.25% 以上に保つようにした。正方形の空孔形状（三角級数補間法ではそれに近い形状）を初期形状として、解析モデルの対称性から 1/4 領域を要素分割した。アイソパラメトリック補間法では、全境界を節点数 59、要素数 28 に分割し、空孔部分を設計区間数 2、各区間内の補間節点数 19、要素数 9 に分割し、5 つの設計変数でその形状を表した。三角級数補間法では、全境界を節点数 53、要素数 25 に分割し、空孔境界における節点の座標値を次式で近似し、

$$x_1^k = A_{11} \cos \theta_k + A_{13} \cos 3\theta_k$$

$$x_2^k = B_{21} \sin \theta_k + B_{23} \sin 3\theta_k \dots\dots\dots (11)$$

31 個の補間節点を設けた。ここに、係数 A_{11} 、 A_{13} 、 B_{21} 、 B_{23} の 4 個を直接設計変数とし、初期形状では、 $A_{11} = B_{21} = 0.18a$ 、 $-A_{13} = B_{23} = 0.03a$ 、 $0 \leq \theta \leq 1/2\pi$ とした。

PLM 法を用いた解析結果を、アイソパラメトリック補間法の場合について表 1 に、三角級数補間法の場合について無限板中の空孔の理論値とともに表 2 にそれぞれ示す。表中の f_0 、 V_0 は目的関数の初期値および体積の上限を表す。また空孔形状の最適解への変化過程をそれぞれ図 3 に、初期形状および最終形状における空孔縁の接線応力分布を図 4 に示す。いずれの補間法の場合も、スムーズな収束が得られ、最終形状はそれぞれ円および長短軸比 2 のだ円形状に近い形状とな

(a) アイソパラメトリック補間法 ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=1$)

(b) 三角級数補間法 ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=2$)

図 3 平板中の空孔形状の変化過程

表 1 アイソパラメトリック補間法による空孔形状の最適化過程 ($a=200$ mm)

Iteration number q	Design variables					Objective function f/f_0	Constraint condition g/V_0
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		
0	30.0	31.62	42.43	31.62	30.0	1.0	1.0044
4	30.17	33.42	36.83	33.43	30.62	0.9850	1.0031
9	33.57	33.92	33.85	34.00	33.74	0.9825	1.0002
Theoretical	33.85	33.85	33.85	33.85	33.85	—	1.0

表 2 三角級数補間法による空孔形状の最適化過程 ($a=200$ mm)

Iteration number q	Design variables				Objective function f/f_0	Constraint condition g/V_0
	b_1 (A_{11})	b_2 (A_{13})	b_3 (B_{21})	b_4 (B_{23})		
0	36.0	6.0	36.0	6.0	1.0	1.0357
25	26.64	2.056	40.08	0.0	0.9742	1.0321
45	24.19	0.246	47.45	0.0	0.9710	1.0
Theoretical	23.937	0.0	47.87	0.0	—	1.0

表 3 片持構造の最適化過程

Iteration number q	Design variables								Objective function f/f_0	Constraint condition g/V_0
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8		
0	80.0	62.93	75.10	84.36	31.25	35.80	60.51	80.0	1.0	0.7389
20	91.88	67.35	77.49	88.72	26.35	35.27	59.81	78.08	0.8108	0.9042
49	99.99	85.77	75.44	68.90	78.86	85.36	90.30	93.54	0.7478	1.0

(a) アイソパラメトリック補間法 ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=1$) (b) 三角級数補間法 ($\sigma_{22}/\sigma_{11}=2$)

図 4 空孔縁の接線応力分布

り、空孔縁で一様な応力分布が得られた。

3・2 片持構造 次に自由端に分布力を受ける図 5 に示すような片持構造を考え、アイソパラメトリック補間法によって形状を表し、最適化を試みた。負荷条件として分布力を $p=100 \text{ kgf/mm}^2$ とし、初期形状として図中の各寸法を $a=31.25 \text{ mm}$, $c=80 \text{ mm}$, $L=$

図 5 片持構造解析モデル

図 6 片持構造の形状変化過程

90 mm , $2d=10 \text{ mm}$, $e=80 \text{ mm}$ と設定して体積の上限を $V_0=0.715 eL$ に制約した。全境界を節点数 118, 要素数 56 に分割し、荷重点を除く外部境界および内部境界を設計境界として設計区間数を 8 とし、各区間ごとに 13 個の補間節点を設けた。モデルの対称性から上半分の領域の形状を表す 8 個の基準節点の形状ベク

図 7 境界接線応力分布の比較

トルを設計変数にとった。

解析結果を表 3 に示すが、最終形状の剛性は 25.2% 上昇した。形状最適化の変化過程を図 6 に、初期形状および最終形状における境界接線応力分布を図 7 に示す。前例題とは異なり、最終形状でも境界上の応力分布は完全に一様とはなっていないが、支持端における応力集中がかなり緩和されている。

4. 結 言

連続体の形状最適化問題を対象に、より少ない設計変数で任意形状を表現する具体的な方法として、アイソパラメトリック補間法と三角級数補間法による設計変数縮約法を示し、最大剛性設計問題に適用してそれら補間法の有用性を確認した。これらの結果より、一般的な境界形状に対してはアイソパラメトリック補間法が、また空孔形状などに対してはより縮約した形状表現が可能な三角級数補間法が有用であると考えられ、両補間法を併用することにより複雑な形状の取扱も可能である。

文 献

- (1) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, (1986), 179, Academic Press.
- (2) Okada, H., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **55**(1988), 786.
- (3) Mota Soares, C. A., Rodrigues, H. G. and Choi, K. K., *Trans. ASME, J. Mech., Trans. Automat. Des.*, **106**(1984), 518.
- (4) Choi, J. H. and Kwak, B. M., *Int. J. Num. Methods Eng.*, **26-7**(1988), 1579.
- (5) Hajela, P. and Jih, J., *Int. J. Solids Struct.*, **26-1**(1990), 29.
- (6) Choi, K. K., Haug, E. J., Hou, W., Sohoni, V. N., *Trans. ASME, J. Mech., Trans. Automat. Des.*, **105**(1983), 97.