面外せん断を受ける接合異材角部の特異応力場*

陳 玳 珩^{*1}, 西 谷 弘 信^{*2}

Singular Stress Fields near a Corner of Jointed Dissimilar Materials under Antiplane Loads

Dai-heng CHEN and Hironobu NISITANI

In this paper the characteristics of the stress fields near a corner of jointed dissimilar materials under antiplane loads are studied. It is found that the singular stress fields due to the antiplane loads can be divided into two types: a symmetric type with a stress singularity of $1/r^{1-\lambda_1}$ and a skew-symmetric type with a stress singularity of $1/r^{1-\lambda_2}$. If $G_2 < G_1$, there exists only the singularity of skew-symmetric type, and if $G_2 > G_1$, there exists only the singularity of symmetric type. An expression of stress fields at the close vicinity of the corner is presented. Based on the expression the singular stress fields are defined in terms of two constants K_{III,λ_1} and K_{III,λ_2} for the symmetric type and the skew-symmetric type, respectively.

Key Words: Elasticity, Composite Material, Fracture Mechanics, Stress Singularity, Antiplane Load

1. 緒 言

複合材料の強度評価を行う際には、強化材と母材の異材境界の角部での応力分布を知る必要がある。一般に、異材の接合部では、材料および形状の不連続のため、接合面の角部での応力分布には特異性が生じる。したがって、角部の応力場を把握するためには、まず角部における応力特異性の次数およびそれらの次数に対応する応力場の一般式を求めなければならない。

このような特異応力場を検討するため、著者らはさきに、面内変形問題として、図1に示すような二つの異材、材料1と材料2(それぞれの横弾性定数、ポアソン比を G_1, ν_1 および G_2, ν_2 とする。また、材料1の角点の角度を γ とし、材料2の角点の角度を $2\pi - \gamma$ とする^{**1)}), を接合した角部での二次元応力解析を行った⁽¹⁾。その結果によれば、接合異材の角部近傍での応力特異性の次数は変形モードにも関係する。モード

I とモード II の変形による特異応力場の指数は異なる。そして、その特異応力場は、多くの場合、次式のよう、モード I に対して $1/r^{1-\lambda_1}$ 、モード II に対して $1/r^{1-\lambda_2}$ の特異性をもつ形で、二つのパラメータ K_{I,λ_1} と K_{II,λ_2} により一義的に記述できる。

$$\sigma_{\theta} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{\theta}^I(\theta) + \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{\theta}^{II}(\theta) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $f_{\theta}^I(\theta)$ と $f_{\theta}^{II}(\theta)$ は、文献(1)の式(46)~(57)で示されるように、それぞれの変形様式および応力成分ごとに定まる θ の無次元関数である。

図1 接合異材の角部近傍

* 平成3年3月 日 第68期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成3年1月9日。

^{*1} 正員、九州工業大学情報工学部 (〒820 飯塚市大字川津 680-4)。

^{*2} 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

^{***1} ここで、混乱を避けるため、 γ は常に 180° より大きいものとする。

周知のように、き裂面の基本的な変形様式については、面内変形のモードⅠとモードⅡのほかに、モードⅢと呼ばれる面外せん断の変形様式がある。三次元き裂の変形様式は、一般にこれらの三つのモードの組合せとなる。したがって、これから想像できるように、角部の特異応力場についても、面内変形のほかに、面外せん断の変形様式による特異応力場を検討する必要がある。本研究では、面外せん断の問題として、図1に示すような角部における応力特異性の解析を行うとともに、角部近傍の応力場の式を導いて、その角部での力学特性を検討する。

2. 解析方法

座標軸を図1のようにとり、固有関数展開を用いて解析を行う。

面外せん断の変形状態は次の形の変位関数によって定義することができる。

$$u=0, v=0, w=w(x, y) \quad (2)$$

このとき、複素関数 $f(z)$ を用いれば、変位および応力は次の式

$$w=\operatorname{Re}[f(z)] \quad (3)$$

$$\tau_{xt}-i\tau_{yt}=Gf'(z) \quad (4)$$

で表される。ここでは、図1の領域1と領域2におけるそれぞれの複素関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ を次のべき表示として考える。

$$f_k(z)=a_{1k}z^\lambda+a_{2k}z^{\bar{\lambda}} \quad (k=1,2) \quad (5)$$

(指数 λ , 係数 a_{1k} , a_{2k} は複素数であるとする)

式(5)を式(3), (4)に代入して $z=re^{i\theta}$ とおけば、ある角度 θ の射線上にそう変位 w と応力 $\tau_{\theta t}$ の式が得られる。

$$w_k=\frac{r^\lambda}{2}[a_{1k}e^{i\lambda\theta}+\overline{a_{2k}}e^{-i\lambda\theta}] + \frac{r^{\bar{\lambda}}}{2}[\overline{a_{1k}}e^{-i\lambda\theta}+a_{2k}e^{i\lambda\theta}] \quad (6)$$

$$\tau_{\theta t k}=\frac{G}{2i}[\lambda r^{\lambda-1}\{-a_{1k}e^{i\lambda\theta}+\overline{a_{2k}}e^{-i\lambda\theta}\} - \bar{\lambda} r^{\bar{\lambda}-1}\{-\overline{a_{1k}}e^{-i\lambda\theta}+a_{2k}e^{i\lambda\theta}\}] \quad (7)$$

接合面での変位、応力の連続条件は

$$\left. \begin{aligned} w_1|_{\theta=\gamma/2} &= w_2|_{\theta=\gamma/2} \\ w_1|_{\theta=-\gamma/2} &= w_2|_{\theta=2\pi-(\gamma/2)} \\ \tau_{\theta t 1}|_{\theta=\gamma/2} &= \tau_{\theta t 2}|_{\theta=\gamma/2} \\ \tau_{\theta t 1}|_{\theta=-\gamma/2} &= \tau_{\theta t 2}|_{\theta=2\pi-(\gamma/2)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。条件式(8)は r に無関係に成立つ。したがって、式(6), (7)を式(8)に代入すれば、次の方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} e^{i\lambda\gamma/2} & e^{-i\lambda\gamma/2} & -e^{i\lambda\gamma/2} & -e^{-i\lambda\gamma/2} \\ e^{-i\lambda\gamma/2} & e^{i\lambda\gamma/2} & -e^{i\lambda(2\pi-(\gamma/2))} & -e^{-i\lambda(2\pi-(\gamma/2))} \\ e^{i\lambda\gamma/2} & -e^{-i\lambda\gamma/2} & -\Gamma e^{i\lambda\gamma/2} & \Gamma e^{-i\lambda\gamma/2} \\ e^{-i\lambda\gamma/2} & -e^{i\lambda\gamma/2} & -\Gamma e^{i\lambda(2\pi-(\gamma/2))} & \Gamma e^{-i\lambda(2\pi-(\gamma/2))} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ \overline{a_{21}} \\ a_{12} \\ \overline{a_{22}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで、

$$\Gamma=G_2/G_1 \quad (10)$$

a_{11} , $\overline{a_{21}}$, a_{12} , $\overline{a_{22}}$ のすくなくとも一つは零ではないので、式(9)の諸式が同時に成立つための条件から、指数 λ が満足すべき特性方程式が得られる。それを整理すれば次のようになる。

$$\frac{\sin \lambda(\gamma-\pi)}{\sin \lambda\pi} = +\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \quad (11)$$

または

$$\frac{\sin \lambda(\gamma-\pi)}{\sin \lambda\pi} = -\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1} \quad (12)$$

3. 解析およびその結果

応力特異性の次数は、方程式(11)または(12)を満足する、範囲 $0<\operatorname{Re}(\lambda)<1$ 内の根である^{**2}。ここで、このような根をそれぞれ λ_1 [方程式(11)] と λ_2 [方程式(12)] と記する。

$\Gamma=0$ の場合、それは材料1に対して両縁応力自由のV形切欠きの問題とみなされる。このとき、方程式(11)から λ_1 は存在しないことになり、方程式(12)から

^{**2} 頂角でも変位が有限でなければならないことから $\operatorname{Re}(\lambda)>0$ となる。また、ここで頂角で応力が無限大となる項だけを検討するので、 $\operatorname{Re}(\lambda)<1$ としてよい。

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{\gamma} \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。とくに、 $\gamma=360^\circ$ のときき裂の問題となる。このとき、式(13)の λ_2 が $1/2$ となり、これまでのモードⅢによるき裂の特異性と一致する。

$\Gamma=\infty$ の場合、それは材料1に対して両縁固定のV形切欠きの問題とみなされる。このとき、方程式(11)から

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{\gamma} \dots\dots\dots (14)$$

が得られ、方程式(12)から λ_2 が存在しないことになる。

Γ が他の値をとるとき、 λ_1 と λ_2 は数値解析の手法によって求められる。図2に求めた λ_1 と λ_2 の値を示す。図からわかるように、 $\Gamma < 1$ の場合 λ_1 が存在しない、 $\Gamma > 1$ の場合 λ_2 が存在しない。 $\Gamma < 1$ の場合の λ_2 と $\Gamma > 1$ の場合の λ_1 は、それぞれ1個あり実数である。また、特性方程式(11)と(12)との比較から分かるように、 $\Gamma = \Gamma_0 (\Gamma_0 < 1)$ のときの λ_2 の値は常に $\Gamma = 1/\Gamma_0$ のときの λ_1 の値に等しい。

$$\lambda_2|_{\Gamma=\Gamma_0} = \lambda_1|_{\Gamma=1/\Gamma_0} \quad (\Gamma_0 < 1) \dots\dots\dots (15)$$

λ_1, λ_2 を求めれば、それに対応する式(5)の係数 $a_{11}, \bar{a}_{21}, a_{12}, \bar{a}_{22}$ が求まる。

特性方程式(11)が満足されているとき、式(9)から

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \bar{a}_{21} \\ a_{12}e^{i\lambda_1\pi} &= \bar{a}_{22}e^{-i\lambda_1\pi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。したがって、根 λ_1 に対応する複素関数は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= (a_{11} + \bar{a}_{11})z^{\lambda_1} \\ f_2(z) &= (a_{12}e^{i\lambda_1\pi} + \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_1\pi})e^{-i\lambda_1\pi}z^{\lambda_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

式(17)の係数 $a_{11} + \bar{a}_{11}$ と $a_{12}e^{i\lambda_1\pi} + \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_1\pi}$ は実数であることに注意しておきたい。それは、この場合の変位場が x 軸に関して対称であることを意味している。

式(9)から、係数 $a_{11} + \bar{a}_{11}$ と $a_{12}e^{i\lambda_1\pi} + \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_1\pi}$ と

図2 応力特異性の次数 λ_1 と λ_2

の間に次のような関係がある。

$$\frac{a_{11} + \bar{a}_{11}}{a_{12}e^{i\lambda_1\pi} + \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_1\pi}} = \frac{\cos\left\{\lambda_1\left(\frac{\gamma}{2} - \pi\right)\right\}}{\cos\left(\lambda_1\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma \sin\left\{\lambda_1\left(\frac{\gamma}{2} - \pi\right)\right\}}{\sin\left(\lambda_1\frac{\gamma}{2}\right)} \dots\dots\dots (18)$$

式(18)に基づいて、式(17)の二つの係数を次式

$$\left. \begin{aligned} a_{11} + \bar{a}_{11} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{III, \lambda_1}}{G_1 \sin\left(\lambda_1\frac{\gamma}{2}\right)} \\ a_{12}e^{i\lambda_1\pi} + \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_1\pi} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{III, \lambda_1}}{G_2 \sin\left\{\lambda_1\left(\frac{\gamma}{2} - \pi\right)\right\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

のように仮定する。すなわち一つの実数のパラメータ K_{III, λ_1} を用いて、二つの係数、したがってそのときの特異応力場を表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xtk} &= \frac{K_{III, \lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{x, k}^{III, \lambda_1}(\theta) \\ \tau_{ytk} &= \frac{K_{III, \lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{y, k}^{III, \lambda_1}(\theta) \end{aligned} \right\} (k=1, 2) \dots\dots\dots (20)$$

ここで、材料1に対しては、

$$\left. \begin{aligned} f_{x, k}^{III, \lambda_1}(\theta) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sin\left(\lambda_1\frac{\gamma}{2}\right)} \cos\{(\lambda_1-1)\theta\} \\ f_{y, k}^{III, \lambda_1}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sin\left(\lambda_1\frac{\gamma}{2}\right)} \sin\{(\lambda_1-1)\theta\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

材料2に対しては、

図3 対称形の面外せん断 ($K_{III, \lambda_1}=1$) による特異応力 $\tau_{\theta t}$ の場の強さ

$$\left. \begin{aligned} f_{x,2}^{\text{III},\lambda_1}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sin\left\{\lambda_1\left(\frac{\gamma}{2}-\pi\right)\right\}} \\ &\times \cos\{(\lambda_1-1)(\pi-\theta)\} \\ f_{y,2}^{\text{III},\lambda_1}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda_1}{\sin\left\{\lambda_1\left(\frac{\gamma}{2}-\pi\right)\right\}} \\ &\times \sin\{(\lambda_1-1)(\pi-\theta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

図3に $\gamma=270^\circ$ の場合を例として、 $K_{\text{III},\lambda_1}=1$ のときの、各角度 θ にそうせん断応力 $\tau_{\theta t}$ の場の強さ $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_{\theta t} \cdot r^{1-\lambda_1}$ を示す。図からわかるように、 $\tau_{\theta t}$ の場の強さが最大となる角度は、両材料の横弾性定数 G の比 $\Gamma (=G_2/G_1)$ によって異なる。 $\Gamma=2$ のとき、その角度は約 100° である。 Γ が大きくなるとともに、その角度もしだいに大きくなる。 $\Gamma=\infty$ のとき、すなわち材料2が剛体となると、界面にそう $\tau_{\theta t}$ の場の強さが最大となる。

同様に、特性方程式(12)が満足されているとき、式(9)から

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -\bar{a}_{21} \\ a_{12}e^{i\lambda_2\pi} &= -\bar{a}_{22}e^{-i\lambda_2\pi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

が得られ、根 λ_2 に対応する複素関数は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= (a_{11} - \bar{a}_{11})z^{\lambda_2} \\ f_2(z) &= (a_{12}e^{i\lambda_2\pi} - \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_2\pi})e^{-i\lambda_2\pi}z^{\lambda_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

式(24)の係数 $a_{11} - \bar{a}_{11}$ と $a_{12}e^{i\lambda_2\pi} - \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_2\pi}$ は純虚数であるので、 λ_2 に対応する変位場が x 軸に関して逆対称となる。

また、式(9)から、係数 $a_{11} - \bar{a}_{11}$ と $a_{12}e^{i\lambda_2\pi} - \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_2\pi}$ との間に次のような関係がある。

$$\frac{a_{11} - \bar{a}_{11}}{a_{12}e^{i\lambda_2\pi} - \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_2\pi}} = \frac{\sin\left\{\lambda_2\left(\frac{\gamma}{2}-\pi\right)\right\}}{\sin\left(\lambda_2\frac{\gamma}{2}\right)}$$

図4 逆対称形の面外せん断($K_{\text{III},\lambda_1}=1$)による特異応力 $\tau_{\theta t}$ の場の強さ

$$= \frac{\Gamma \cos\left\{\lambda_2\left(\frac{\gamma}{2}-\pi\right)\right\}}{\cos\left(\lambda_2\frac{\gamma}{2}\right)} \dots\dots\dots (25)$$

関係式(25)に基づけば、式(24)の係数を次式のように一つの実数のパラメータ K_{III,λ_2} で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} - \bar{a}_{11} &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{\text{III},\lambda_2}}{G_1} \cos\left\{\lambda_2\left(\frac{\gamma}{2}-\pi\right)\right\} \\ a_{12}e^{i\lambda_2\pi} - \bar{a}_{12}e^{-i\lambda_2\pi} &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{\text{III},\lambda_2}}{G_2} \cos\left(\lambda_2\frac{\gamma}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

したがって、このときの特異応力場もパラメータ K_{III,λ_2} によって表される。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xts} &= \frac{K_{\text{III},\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{x,k}^{\text{III},\lambda_2}(\theta) \\ \tau_{yts} &= \frac{K_{\text{III},\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{y,k}^{\text{III},\lambda_2}(\theta) \end{aligned} \right\} (k=1, 2) \dots\dots\dots (27)$$

ここで、材料1に対しては、

$$\left. \begin{aligned} f_{x,1}^{\text{III},\lambda_2}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left\{\lambda_2\left(\frac{\gamma}{2}-\pi\right)\right\} \\ &\times \sin\{(\lambda_2-1)\theta\} \\ f_{y,1}^{\text{III},\lambda_2}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left\{\lambda_2\left(\frac{\gamma}{2}-\pi\right)\right\} \\ &\times \cos\{(\lambda_2-1)\theta\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

材料2に対しては、

(a) 面内変形

(b) 面外せん断変形

図5 接合異材の角部における特異応力場の基本様式

$$\left. \begin{aligned} f_{x,2}^{\text{III},\lambda_2}(\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left(\lambda_2 \frac{\gamma}{2}\right) \\ &\quad \times \sin\{(\lambda_2-1)(\pi-\theta)\} \\ f_{y,2}^{\text{III},\lambda_2}(\theta) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_2 \cos\left(\lambda_2 \frac{\gamma}{2}\right) \\ &\quad \times \cos\{(\lambda_2-1)(\pi-\theta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

図4に、 $K_{\text{III},\lambda_2}=1$ のときの、 $\gamma=270^\circ$ の異材角部の各方向にそうせん断応力 $\tau_{\theta t}$ の場の強さ $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_{\theta t} r^{1-\lambda_2}$ を示す。図からわかるように、各 Γ の値に対して、 $\tau_{\theta t}$ の場の強さは常に $\theta=0^\circ$ 、すなわち材料1内の x 軸にそって最大となる。

4. 結 論

接合異材角部における特異応力場については、図5に示すように、基本的には面内変形と面外せん断変形とに分けて検討される。そして、面内変形と面外せん断変形についてもさらにそれぞれを対称形の変形様式と逆対称形の変形様式とに分けることができる。き裂の場合と大きく異なる点は、接合異材角部での応力特異性の次数が、一般に変形様式にも関係するというこ

とである。き裂の場合、モードI、II、IIIによる応力特異性の次数はいずれも $-1/2$ であり同一である。これに対して、接合異材の場合、同じ角点であっても、対称形の面内変形(すなわちモードI)、逆対称形の面内変形(すなわちモードII)および面外せん断変形による応力特異性の次数はそれぞれ異なる。

また、面外せん断変形による特異応力場については、材料2(すなわち先端角度が 180° より小さいほう)の横弾性定数 G_2 が材料1のそれより小さいとき、角部に特異性が生じるのは逆対称形の変形様式のときだけである。そのとき、角部での特異応力場は、式(27)のように、 $1/r^{1-\lambda_2}$ の特異性をもつ形で、一つのパラメータ K_{III,λ_2} により一義的に記述できる。逆に、 G_2 が G_1 より大きいとき、角部に特異性が生じるのは対称形の変形様式のときだけである。そのとき、角部での特異応力場は、式(20)のように、 $1/r^{1-\lambda_1}$ の特異性をもつ形で、一つのパラメータ K_{III,λ_1} により一義的に記述できる。

文 献

- (1) 陳・西谷, 機論, 57-534, A(1991), 366.