介在物の角部における特異応力場の数値解析*

陳 玳 珩^{*1}, 西 谷 弘 信^{*2}

Analysis of Singular Stress Fields around a Corner Tip of Inclusion

Dai-heng CHEN and Hironobu NISITANI

The stress field near the corner of an inclusion has singularities. For the mode I deformation, the stress singularity is $1/r^{1-\lambda_1}$, and for the mode II deformation, it is $1/r^{1-\lambda_2}$. Thus, the stress fields around the singular point must be described in terms of two pairs of constants: $\lambda_1, K_{I,\lambda_1}$ and $\lambda_2, K_{II,\lambda_2}$, where K_{I,λ_1} and K_{II,λ_2} are the parameters representing the intensity of the stress field. In this study, the body force method is used for calculating K_{I,λ_1} and K_{II,λ_2} in the problem of an infinite plate with an inclusion. In the numerical analyses, the singularity of the stress field at the corner tip is taken into account by introducing new basic density functions of the body forces.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Composite Material, Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Inclusion

1. 結 言

複合材料の強度評価を行うためには、図 1 に示すような二つの異なる材料を接合した角部近傍での特異応力場を求めなければならない。著者らの先の研究⁽¹⁾によれば、複合材料に含まれる接合部の角点における特異応力場は、多くの場合、次式のように、モード I に対して $1/r^{1-\lambda_1}$ 、モード II に対して $1/r^{1-\lambda_2}$ の特異性をもつ形で、二つのパラメータ K_{I,λ_1} と K_{II,λ_2} により一義的に記述できる。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) \dots\dots\dots (1)$$

式(1)において、 $f_{ij}^I(\theta), f_{ij}^{II}(\theta)$ は、文献(1)の式(46)～(57)で示されるように、それぞれの変形様式および応力成分ごとに定まる θ の無次元関数である。したがって、四つのパラメータ $\lambda_1, K_{I,\lambda_1}, \lambda_2, K_{II,\lambda_2}$ が求まれば、式(1)を通じて二つの異なる材料を接合して得られた弾性体の接合角部近傍における特異応力場が具体的に求まる。 λ_1, λ_2 は応力特異性の次数である。それ

は文献(1)で導いた特性方程式の解として求まる。 $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$ は特異応力場の強さを表すパラメータである。それは数値解析によって求めなければならない。それを求める計算手法の開発が本論文の目的である。

特異性を有する問題に数値解析の手法を適用する場合、特異性を考慮した計算手法が必要となる。とくに、ここで取扱う異材境界の角部では、モード I とモード II の変形による特異応力場の次数が異なる。このように次数が異なる二つの特異応力場が同時に混在しているときには、角部先端に特異要素など特別な解析手法を導入しないで、応力の値から直接 $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$ を求めることは困難である。著者らはさきに、半無限板の V 形切欠先端における応力場を体積力法により解析する際、切欠先端における二つの応力特異性を代表する基

図 1 介在物の角部近傍

* 平成 2 年 11 月 28 日 材料力学講演会において講演、原稿受付 平成 3 年 1 月 9 日。

^{*1} 正員、九州工業大学情報工学部 (〒820 飯塚市大字川津 680-4)。

^{*2} 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

本密度関数⁽²⁾を導入することによって特異応力場を精度よく求めた。本研究では、このようなモード I, II の応力特異性を同時に考慮する計算手法を介在物の問題に適用し、具体例として図 2 に示すような 1 個の介在物が存在する無限板が遠方でモード I とモード II の荷重を受けるときの角部先端での応力場の数値解析を行う。

2. 数値解析方法

数値解析としては、図 2 において介在物の辺 AF, AB, DC, DE をそれぞれ n_1 個の区間に、辺 EF, BC をそれぞれ $2n_2$ 個の区間に分割して、各区分で代表点の境界変位と表面力の合力とのマトリックス関係を、均質材に適用された体積力法⁽³⁾を用いて求める。

具体的には、まず領域 1 (図 2 中の六角形 ABC-DEFA の孔をもつ無限板) の境界変位と表面力との関係を求めるには、弾性定数 G_1, ν_1 の均一な無限板中の境界となるべき仮想境界上に体積力を分布させる [図 3 (a)]。その体積力の密度を折線で近似し $\{\varphi_1\}$ で離散化する。その際、体積力 $\{\varphi_1\}$ による境界各分割区間の変位 $\{u_1\}$ 、合力 $\{F_1\}$ の表現式

$$\{u_1\} = (u_1^f)\{\varphi_1\} + \{u_1^\infty\} \quad (2)$$

$$\{F_1\} = (F_1^f)\{\varphi_1\} + \{F_1^\infty\} \quad (3)$$

を求めれば、境界変位と表面力との関係式

$$\{u_1\} = (u_1^f)\{F_1\} + \{u_1^\infty\} \quad (4)$$

ここで、

$$(u_1^f) = (u_1^f)(F_1^f)^{-1}$$

$$\{u_1^\infty\} = \{u_1^\infty\} - (u_1^f)\{F_1^\infty\}$$

が得られる。同様に、領域 2 (図 2 中の六角形 ABC-DEFA の介在物) の境界変位と表面力との関係を求めるには、弾性定数 G_2, ν_2 の均一な無限板の仮想境界 [図 3 (b)] 上に分布させた体積力 $\{\varphi_2\}$ による変位 $\{u_2\}$ 、合力 $\{F_2\}$ の表現式

$$\{u_2\} = (u_2^f)\{\varphi_2\} \quad (5)$$

$$\{F_2\} = (F_2^f)\{\varphi_2\} \quad (6)$$

を求めれば、境界変位と表面力との関係式

$$\{u_2\} = (u_2^f)\{F_2\} \quad (7)$$

ここで、

$$(u_2^f) = (u_2^f)(F_2^f)^{-1}$$

が得られる。したがって、異材境界での応力と変位が連続となる条件

$$\begin{cases} \{F_1\} = -\{F_2\} \\ \{u_1\} = \{u_2\} \end{cases} \quad (8)$$

から、未知数 $\{F_1\}, \{F_2\}$ を求めるべき連立一次方程式が得られる。 $\{F_1\}, \{F_2\}$ が求まれば、関係する各式から $\{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}$ も求まり、各領域における応力場も求まることになる。

以上は、これまでの複合材の解析に適用された体積力法の解析⁽⁴⁾と同様である。しかし、本問題では、接合の角部に応力特異性が生じており、求めようとするのは、その特異応力場の強さを表すパラメータである。したがって、離散化数値解法によって具体的な解析を行う際には、接合角部先端付近の体積力の密度を、重み関数と応力特異性を代表する基本密度関数との積で表さなければならない。

$$\begin{cases} \varphi_{\theta,i}(r) = W_{\theta,i}^I(r)r^{\lambda_i-1} + W_{\theta,i}^{II}(r)r^{\lambda_i-1} \\ \varphi_{r,i}(r) = W_{r,i}^I(r)r^{\lambda_i-1} + W_{r,i}^{II}(r)r^{\lambda_i-1} \end{cases}$$

$$(i=1, 2) \quad (9)$$

すなわち、離散化数値解析で求めるのは、体積力密度 $\varphi_{\theta,i}(r), \varphi_{r,i}(r)$ そのものではなく、式 (9) 中の、基本密度関数 r^{λ_i-1} にかけるべき重み関数 $W_{\theta,i}^I(r), W_{r,i}^I(r)$ と基本密度関数 r^{λ_i-1} にかけるべき重み関数 $W_{\theta,i}^{II}(r), W_{r,i}^{II}(r)$ の値である。体積力の密度そのものは角部先端で無限大となるので、数値解析法によって求めることは困難であるが、式 (9) 中の重み関数は、接合角部の先端付近でも有限な値となるので、高精度な解析が可能となる。

またこの際、角部先端における重みの値 $W_{\theta,1}^I(0), W_{r,1}^I(0), W_{\theta,2}^I(0), W_{r,2}^I(0)$ はいずれも K_{I,λ_1} に、また $W_{\theta,1}^{II}(0), W_{r,1}^{II}(0), W_{\theta,2}^{II}(0), W_{r,2}^{II}(0)$ はいずれも K_{II,λ_2}

図 2 介在物を有する無限板

(a) 領域 1 の解法

(b) 領域 2 の解法

図 3 領域 1, 2 に対する体積力法の解析

にそれぞれ関係している。そのような関係に基づけば、角部先端における重みの値から K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} を求めることができる。それらの関係式、例えば $W_{\theta,1}^I(0)$, $W_{r,1}^I(0)$ と K_{I,λ_1} との関係式を求める方法は、以下のとおりである。

図3(a)の無限板中の仮想境界上に分布させるべき体積力は、注目領域に補助領域をすきまなくはめ合わせるために必要なものとみなすこともできる。介在物の角部近傍に関しては、それは図4のようになる。すなわち、まず文献(1)の式(26), (31), (32)に基づいて、 $K_{I,\lambda_1}=1$ のときの領域1の特異性を示す境界応力 $\sigma_{\theta,1}|_r$, $\tau_{r\theta,1}|_r$ と境界変位 $u_{\theta,1}|_r$, $u_{r,1}|_r$ を求める[図4(a)]。次に、変位 $u_{\theta,1}|_r$, $u_{r,1}|_r$ を領域1の補助領域の縁に生じさせるのに必要な表面応力 $\sigma_{\theta,1}^{aux}|_r$, $\tau_{r\theta,1}^{aux}|_r$ (特異項に対応するものだけ) を求める[図4(b)]。体積力法の原理⁽⁵⁾によれば、無限板中の仮想境界上に分布させるべき体積力は、注目領域の表面力と、注目領域と補助領域をすきまなくはめ合わせるための表面力との和である。したがって、 $K_{I,\lambda_1}=1$ のとき、体積力 $\varphi_{\theta,1}$, $\varphi_{r,1}$ は先端近傍では次式のように書くことができる[図4(c)]。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\theta,1} &= \sigma_{\theta,1}|_r - \sigma_{\theta,1}^{aux}|_r \\ \varphi_{r,1} &= \tau_{r\theta,1}|_r - \tau_{r\theta,1}^{aux}|_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式(10)中で、 r^{λ_1-1} にかかる係数は $K_{I,\lambda_1}=1$ のときの $W_{\theta,1}^I(0)$, $W_{r,1}^I(0)$ に等しい。

3. 解析結果

特異応力場を表すパラメータ K_{I,λ_1} (または K_{II,λ_2}) は、先端点における重みの値 $W_{\theta,1}^I(0)$, $W_{r,1}^I(0)$, $W_{\theta,2}^I(0)$, $W_{r,2}^I(0)$ [または $W_{\theta,1}^{II}(0)$, $W_{r,1}^{II}(0)$, $W_{\theta,2}^{II}(0)$, $W_{r,2}^{II}(0)$] のいずれを用いても求めることができる。有限な分割による数値解析の誤差を除けば、各重みの値から求め

図4 仮想境界上に分布させるべき体積力の物理的意味

た K_{I,λ_1} (または K_{II,λ_2}) の値は一致するはずである。これらの値が一致するかどうかをみることは、本法の有効性を理解する一つの間接的な手段と考えられる。図5に、 $G_2/G_1=0.022$, $\nu_1=0.250$, $\nu_2=0.364$ のときの、 $\Delta=90^\circ$ の菱形介在物 ($h/l \cdot \tan \Delta/2=1$) が両軸引張り ($\sigma_x^\infty=\sigma_y^\infty$) を受けるときの K_{I,λ_1} の値 (平面ひずみ) と分割数 n_1 との関係を示す。 $W_{\theta,1}^I(0)$, $W_{r,1}^I(0)$, $W_{\theta,2}^I(0)$ と $W_{r,2}^I(0)$ から計算された K_{I,λ_1} の値 (図中の○, ●, ▲と△) は、それぞれ異なっているが n_1 の増加にしたがって、その差は次第に小さくなってゆく。それぞれの $n_1=80, 120$ の値に基づいて直線で外そうして得られた $n_1=\infty$ の各値の差は、約0.005である。このことから、本解析の有効性が理解される。また、これらの四つの重みの値を一つの未知数で代表させて数値解析を行うと、求められた K_{I,λ_1} の値は、図5の点線で示すように、同様な特徴を示すが外そう性はさらによくなる。したがって、以下の数値計算で K_{I,λ_1} と K_{II,λ_2} を求める際、モードIとモードIIに関連するそれぞれの、先端における四つの重みの値をそれぞれの一つの未知数で代表させた。そのようにして、まず境界分割数 $n_1+n_2=80, 120$ のときの K_{I,λ_1} と K_{II,λ_2} の値を求め、それらをもとにして外そうし最終結果を求めた。結果を示すに際して、次式のように無次元化した値 F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} を用いた。

$$\left. \begin{aligned} F_{I,\lambda_1} &= K_{I,\lambda_1} / \sigma_y^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_1} \\ F_{II,\lambda_2} &= K_{II,\lambda_2} / \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

表1に G_2/G_1 の比が零と ∞ との両極端の場合について数値計算結果を示す。表1からわかるように、厚

図5 $W_{\theta,1}^I(0)$, $W_{r,1}^I(0)$, $W_{\theta,2}^I(0)$ と $W_{r,2}^I(0)$ から計算されたそれぞれの K_{I,λ_1} の値

表 1 $G_2/G_1=0$ と ∞ のときの計算結果

$$\left(F_{I,\lambda_1} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_1}}, F_{II,\lambda_2} = \frac{K_{II,\lambda_2}}{\tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi} l^{1-\lambda_2}} \right)$$

			Uniaxial tension: F_{I,λ_1} ($\sigma_x^\infty = 0$)				Biaxial tension: F_{I,λ_1} ($\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty$)				Shear : F_{II,λ_2}				
$h/\ell \cdot \tan(\frac{\Delta}{2})$			1.00	0.75	0.50	0.25	1.00	0.75	0.50	0.25	1.00	0.75	0.50	0.25	
$G_2/G_1 = 0$			$\Delta = 30^\circ$	1.040	1.039	1.039	1.032	1.014	1.015	1.016	1.016	1.155	1.156	1.161	1.186
			$\Delta = 90^\circ$	1.293	1.284	1.271	1.260	1.010	1.039	1.071	1.116	4.280	4.334	4.523	5.110
$G_2/G_1 = \infty$	Plane stress state $\nu_1 = \nu_2 = 0.0$	$\Delta = 30^\circ$	0.004	0.004	0.003	0.002	0.364	0.364	0.364	0.368	-0.350	-0.350	-0.349	-0.350	
		$\Delta = 90^\circ$	0.050	0.047	0.043	0.035	0.527	0.525	0.525	0.539	-0.441	-0.437	-0.435	-0.438	
	Plane stress state $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$	$\Delta = 30^\circ$	-0.116	-0.116	-0.117	-0.120	0.289	0.289	0.289	0.292	-0.506	-0.505	-0.504	-0.505	
		$\Delta = 90^\circ$	-0.080	-0.084	-0.094	-0.114	0.479	0.476	0.474	0.484	-0.655	-0.648	-0.639	-0.637	
	Plane strain state $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$	$\Delta = 30^\circ$	-0.177	-0.177	-0.178	-0.182	0.251	0.251	0.251	0.253	-0.584	-0.583	-0.582	-0.582	
		$\Delta = 90^\circ$	-0.152	-0.156	-0.170	-0.200	0.453	0.451	0.448	0.456	-0.769	-0.758	-0.746	-0.739

図 6 先端Aでの K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} に関する近似
(K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} は主に l と Δ のみによって支配される)

さ h が変化しても、先端点Aでの F_{I,λ_1} と F_{II,λ_2} の値はそれぞれほぼ一定である。このことは特異応力場が主に l と Δ によって支配されることを意味している。したがって、先端A近傍での応力場に関しては、図6に示すように、菱形の介在物[図6(b)]の K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} を用いて図6(a)の介在物のそれを近似することができる。菱形の介在物に関する計算結果を図7～9に示す。図7～9中の α , β は、次式

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{G_1(k_2+1) - G_2(k_1+1)}{G_1(k_2+1) + G_2(k_1+1)} \\ \beta &= \frac{G_1(k_2-1) - G_2(k_1-1)}{G_1(k_2+1) + G_2(k_1+1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、

$$k_i = \begin{cases} (3-\nu_i)/(1+\nu_i) & \text{(平面応力)} \\ 3-4\nu_i & \text{(平面ひずみ)} \end{cases}$$

で定義される Dundurs⁽⁶⁾ の複合材料パラメータである。二つの材料から構成される複合材料中の応力場は、三つの材料弾性定数 G_2/G_1 , ν_1 , ν_2 のいずれとも関係するが、その関係の仕方は本問題では α , β という二つ

(a) $\alpha > 0$ の場合

(b) $\alpha < 0$ の場合

図 7 一軸引張荷重を受けるときの F_{I,λ_1} の値

のパラメータだけで表現される。したがって、図7～9の値を用いて、任意の材料弾性定数をもつ図2の介在物の角部Aにおける特異応力場を、式(1)から評価することができる。

(a) $\alpha > 0$ の場合 (b) $\alpha < 0$ の場合図 8 両軸引張荷重 ($\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty$) を受けるときの F_{I, λ_1} の値

4. 結 論

介在物角部先端での特異応力場は、式(1)のように、モード I とモード II の二つの変形様式に分けて、二つのパラメータ K_{I, λ_1} と K_{II, λ_2} により一義的に記述できる。数値解析で K_{I, λ_1} , K_{II, λ_2} の値を求める際には、次数が異なる二つの特異応力場を同時に考慮しなければならない。本研究では、先の研究結果⁽¹⁾⁽²⁾に基づいて、角部近傍の応力特異性を代表する体積力の基本密度関数を導入し、 K_{I, λ_1} と K_{II, λ_2} を体積力法を用いて効率的に計算することができる手法を示した。

(a) $\alpha > 0$ の場合 (b) $\alpha < 0$ の場合図 9 せん断荷重を受けるときの F_{II, λ_2} の値

文 献

- (1) 陳・西谷, 機論, 57-534, A(1991), 366.
- (2) 陳・西谷, 機論, 57-538, A(1991), 1406.
- (3) 西谷, 機誌, 70-580(1967), 627.
- (4) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 第2章, 培風館.
- (5) 陳・ほか2名, 機論, 56-524, A(1990), 775.
- (6) Dundurs, J., *J. Appl. Mech.*, 36(1969), 650.