接合異材角部の特異応力場について*

陳 玳 珩^{*1}, 西 谷 弘 信^{*2}Singular Stress Fields near a Corner of
Jointed Dissimilar Materials

Dai-heng CHEN and Hironobu NISITANI

In this paper, the singular stress fields near a corner of jointed dissimilar materials are discussed based on the expressions of the stress fields obtained recently by the authors. The stress fields are expressed as a sum of two terms: a symmetric term and a skew-symmetric term. The stress singularities for the two terms are different. The angle where the normal stress σ_θ or the shear stress $\tau_{r\theta}$ becomes the maximum is a function of the distance from the corner point, differing from the case of a crack.

Key Words: Composite Material, Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Stress Singularity, Expression of Singular Stress Field, Jointed Dissimilar Materials

1. 結 言

最近, 互いに異なる材料を接合した部材ないし複合材料が幅広く利用され, その強度評価が重要な問題となっている。一般に, 異材の接合部では, 材料および形状の不連続のために, 接合面の角部での応力分布には特異性が生じる。このような応力の特異性を考慮した強度評価を行う目的で, 特異応力場近傍の応力を近似的に

$$\sigma(r) = K/r^{1-\lambda} \dots\dots\dots (1)$$

と仮定し, その特異性の指数 $\lambda-1$ と特異場の強さ K をパラメータとする方法が提案され, その有効性が示されている⁽¹⁾。しかしこのような評価法を理論的に確立するためには, まず角部における特異応力場を基本的立場から検討する必要がある。

角部で最初の破壊が生じる方向を解明し破壊条件を明らかにするためにも解決すべき問題は多く残されている。角部で脆性破壊が生じるとすれば σ_θ の場の強さが最大となる方向が問題であり, 疲労き裂が発生

するとすれば $\tau_{r\theta}$ の場の強さが最大となる方向が問題である。したがって角部の各方向にそう特異応力 σ_θ または $\tau_{r\theta}$ の場の強さを検討することは重要な課題の一つであろう。本研究では, 著者らがさきに導いた角部特異応力場の式⁽²⁾に基づいてこの問題を取扱う。

著者らのさきの研究⁽²⁾⁽³⁾によれば, 両異材を接合した角部近傍では, モード I とモード II の負荷による応力特異性の指数が異なるため, 特異性の強さが異なる二つの特異応力場が同時に混在することになる。もし角部での破壊が先端における一点の応力のみによって支配されるとすれば, 二つの応力場中の特異性が強いほうだけを考慮すればよいが, もし角部での破壊がある有限領域における平均的応力場で支配されるとすれば, また両応力場の特異性の強さが同程度であるならば, 二つの特異応力場を同時に考慮する必要がある。したがって, 本研究では, モード I とモード II による特異応力場が同時に混在する場合を対象として, 特異応力 σ_θ または $\tau_{r\theta}$ の値が最大となる方向と先端からの距離との関係を検討する。

2. モード I とモード II による
角部の特異応力場

まずモード I とモード II によるそれぞれの特異応力

* 平成 3 年 3 月 30 日 第 68 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 平成 3 年 2 月 4 日。

^{*1} 正員, 九州工業大学情報工学部 (〒820 飯塚市大字川津 680-4)。

^{*2} 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

場について検討する。

図1に二つの異材，材料1と材料2（それぞれの横弾性定数，ポアソン比を G_1, ν_1 および G_2, ν_2 とする）を接合した角部の近傍を示す。このような角部での応力場の特異性の指数は，著者らのさきの研究⁽²⁾によれば変形モードにも関係する。モードIの場合 $\lambda_1 - 1$ となり，モードIIの場合 $\lambda_2 - 1$ となる。 λ_1 と λ_2 は，それぞれ次の特性方程式(2)と(3)の範囲 $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$ 内で根として与えられる⁽²⁾。

対称な場合の特性方程式：

$$\begin{aligned}
 & (\alpha - \beta)^2 \lambda^2 (1 - \cos 2\gamma) + 2\lambda(\alpha - \beta) \sin \gamma \\
 & \times \{\sin \lambda \gamma + \sin \lambda(2\pi - \gamma)\} + 2\lambda(\alpha - \beta) \beta \sin \gamma \\
 & \times \{\sin \lambda(2\pi - \gamma) - \sin \lambda \gamma\} + (1 - \alpha^2) \\
 & - (1 - \beta^2) \cos 2\lambda\pi + (\alpha^2 - \beta^2) \cos \{2\lambda(\gamma - \pi)\} \\
 & = 0 \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

図1 接合異材の角部近傍

(a) λ_1 (対称な場合)

(b) λ_2 (逆対称な場合)

図2 $\gamma = 270^\circ$ のときの λ_1, λ_2 と α, β との関係

逆対称な場合の特性方程式

$$\begin{aligned}
 & (\alpha - \beta)^2 \lambda^2 (1 - \cos 2\gamma) - 2\lambda(\alpha - \beta) \sin \gamma \\
 & \times \{\sin \lambda \gamma + \sin \lambda(2\pi - \gamma)\} - 2\lambda(\alpha - \beta) \beta \sin \gamma \\
 & \times \{\sin \lambda(2\pi - \gamma) - \sin \lambda \gamma\} + (1 - \alpha^2) \\
 & - (1 - \beta^2) \cos 2\lambda\pi + (\alpha^2 - \beta^2) \cos \{2\lambda(\gamma - \pi)\} \\
 & = 0 \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

式(2)，(3)中の α, β は Dundurs の複合パラメータ⁽⁴⁾で，材料1，2の弾性定数により決まる。

$$\alpha = \frac{G_1(k_2 + 1) - G_2(k_1 + 1)}{G_1(k_2 + 1) + G_2(k_1 + 1)}$$

$$\beta = \frac{G_1(k_2 - 1) - G_2(k_1 - 1)}{G_1(k_2 + 1) + G_2(k_1 + 1)}$$

$$k_i = \begin{cases} (3 - \nu_i) / (1 + \nu_i) & (\text{平面応力}) \\ 3 - 4\nu_i & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2)$$

図2に， $\gamma = 270^\circ$ の場合の λ_1, λ_2 を， α, β 平面上のマップとして示す。図3には，特異性の指数と両異材の弾性定数との関係について直観的なイメージを与えるため， $\nu_1 = 0, \nu_2 = 0$ の場合について G_2/G_1 をパラメータとして λ_1, λ_2 と角部の角度 γ との関係を示す。 λ_1 と λ_2 は，常に範囲0.5~1.0内の値をとる。また， G_2 と G_1 との差が大きいほど， λ_1 と λ_2 が小さい，すなわち特異性が強い。

各種の角度 γ について λ_1, λ_2 を求めた結果によれば，モードIIの変形による特異性の指数 λ_2 は， α, β の全範囲（図2平行四辺形の中）

(a) λ_1 (対称な場合)

(b) λ_2 (逆対称な場合)

図3 λ_1, λ_2 と角部の角度 γ との関係 ($\nu_1 = \nu_2 = 0$)

$$-1 \leq \alpha \leq +1, \frac{\alpha-1}{4} \leq \beta \leq \frac{\alpha+1}{4} \quad \dots\dots\dots (4)$$

内でその数はせいぜい1個であり**1, また常に実数である。モードIの変形による特異性の指数 λ_1 は範囲

$$\beta(\alpha-\beta) > 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

内では, 常に1個の実数であるが, その範囲以外では, 複素数となり, 多数の根が存在する場合もある。特性方程式の根が複素数となる場合, 対応する特異応力場は振動する項を含んでいる。

図4は, 式(5)を満足する α, β の可能な範囲を示したものである。図4には, 図2の(a), (b)に基づいて求めた $\gamma=270^\circ$ の場合の $\lambda_1=\lambda_2$ となる α, β の組合せも示されている。したがって, 式(5)を満足する α, β の領域を, さらに $\lambda_1 > \lambda_2$ となる領域と $\lambda_2 > \lambda_1$ (または λ_2 が消失すること)となる領域とに分けることができる。 $\lambda_1 > \lambda_2$ となる領域では, モードIIの変形による応力特異性が強いが, $\lambda_2 > \lambda_1$ となる領域では, 逆にモードIの変形による応力特異性が強い。しかし, λ_1 と λ_2 の差は一般には大きくない。とくに, α, β のマッ プ上の $\lambda_1=\lambda_2$ となる線の近傍では, 二つの応力場の特異性はほぼ同程度である。したがって, その中の一つだけではこのような特異応力場を正確に評価することができない。

特性方程式(2)と(3)の根 λ_1 と λ_2 がそれぞれせいぜい1個の実数の場合, すなわち式(5)を満足する α, β については, 角部近傍の特異応力場は次式で与えられる**2。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad \dots\dots\dots (6)$$

図4 式(5)を満足する α, β の範囲

**1 根が存在しない場合もある。例えば, 図3(b)からわかるように, G_2/G_1 と角度 γ の値によって(例えば $G_2/G_1=0.1$ のとき $\gamma < 260^\circ$, $G_2/G_1=10$ のとき $\gamma > 300^\circ$ の場合), λ_2 が存在しない。すなわちモードIIの変形による応力場には特異性が生じないこともある。

$f_{ij}^I(\theta)$ と $f_{ij}^{II}(\theta)$ はそれぞれの変形様式および応力成分ごとに定まる θ の無次元関数であり, 文献(2)の式(46)~(57)から求まる。 K_{I,λ_1} と K_{II,λ_2} は, 特異応力場の強さを表すパラメータである。

以下では式(6)を考慮して角部の各 θ 方向での特異応力 σ_θ または $\tau_{r\theta}$ の場の強さを次式

$$\begin{aligned} K_\sigma^I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_\theta^I \cdot r^{1-\lambda_1} \\ K_\sigma^{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_\theta^{II} \cdot r^{1-\lambda_2} \\ K_\tau^I &= \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{r\theta}^I \cdot r^{1-\lambda_1} \\ K_\tau^{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{r\theta}^{II} \cdot r^{1-\lambda_2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

で定義される K_σ, K_τ を用いて評価する。図5と図6は, それぞれ $f_{ij}^I(\theta)$ と $f_{ij}^{II}(\theta)$ の式に基づいて求めた, $K_{I,\lambda_1}=1$ と $K_{II,\lambda_2}=1$ のときの角部の各方向にそう K_σ^I と K_τ^{II} の分布をいくつかの G_2/G_1 について示したものである。

図5, 6からわかるように, $G_2 < G_1$ の場合, モードIによる σ_θ またはモードIIによる $\tau_{r\theta}$ は, 常に $\theta=0^\circ$ のとき最大となるが, $G_2 > G_1$ の場合, それらが最大となるのはもはや $\theta=0^\circ$ のとき(x 軸上)ではない。図7と図8は, それぞれ図5と図6に基づいて求めた, モードIによる σ_θ またはモードIIによる $\tau_{r\theta}$ が最大となる角度を示したものである。それらの図からわかるように, $G_2 > G_1$ の場合その角部は約 $90^\circ \sim 110^\circ$ の範囲内で変化する。 G_2/G_1 の値が大きいほど, その角度も大きい。したがって, き裂の場合と異なって, 材料1(すなわち先端角度が 180° より大きいほう)の G_1 より材料2の G_2 が大きい場合では, 角部先端の $\theta=$

図5 $K_{I,\lambda_1}=1$ のときの特異応力 σ_θ の場の強さ K_σ^I

**2 λ_2 が存在しない場合, モードIIによる特異性が消失することとなり, 式(6)はモードIによる特異応力の項だけとなる。

0°にそう σ_θ (または $\tau_{r\theta}$) の場の強さで、モード I (またはモード II) の変形による応力場のきびしさを代表させることができない。

界面接合強度が弱い場合、界面に沿ってはく離が生じると考えられる。図9には、界面にそう σ_θ または $\tau_{r\theta}$ の場の強さ K_σ または K_τ と材料1におけるそれらの最大値 $K_{\sigma, \max}$ または $K_{\tau, \max}$ との比を示す。図9は、接合面の接着強さと材料1の強さとの比較から、界面ではく離が生じるか材料1内で破壊が生じるかを検討するための力学背景を与えるものである。

図6 $K_{II, \lambda_2} = 1$ のときの特異応力 $\tau_{r\theta}$ の場の強さ K_τ^{II}

図7 モード I による σ_θ が最大となる方向

図8 モード II による $\tau_{r\theta}$ が最大となる方向

3. 一般荷重による角部の特異応力場

異材角部の応力特異性に基いてその強度評価を行うためには、特異応力場の強さ、すなわち式(6)中のパラメータ K_{I, λ_1} と K_{II, λ_2} を数値解析によって求めなければならない。図10~12には、体積力法⁽⁵⁾⁽⁶⁾によって求めた、1個の菱形介在物を有する無限板が遠方で一様な引張りまたはせん断荷重を受けるときの角点での K_{I, λ_1} と K_{II, λ_2} の値を示す。それらの角点における特異応力場の指数は2章の特性方程式(2), (3)から求まり、図13に示されている。したがって、式(6)と図10~13に基づいて、一般荷重を受ける角部先端での特異応力場を評価することができる。一例として正方形の介在物が図14のように一軸引張荷重を受ける場合について検討する。図15と図16に、角部A (図14)の各方向にそう特異応力 σ_θ と $\tau_{r\theta}$ の場の強さ K_σ と K_τ を示す。ここでは、特異性の指数が異なる、モード I とモード II による二つの応力場が同時に存在していることに注意しておきたい。例えば、このとき界面に作用する特異応力場は、

図9 界面にそう K_σ および K_τ と材料1内におけるそれらの最大値との比

図10 菱形介在物を有する無限板が一軸引張荷重を受けるときの K_{I, λ_1}

$\theta=180^\circ$ の界面では,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta(r) &= \frac{0.35}{r^{0.232}} + \frac{0.44}{r^{0.165}} \\ \tau_{r\theta}(r) &= \frac{0.30}{r^{0.232}} - \frac{0.15}{r^{0.165}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$\theta=270^\circ$ の界面では,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta(r) &= \frac{0.35}{r^{0.232}} - \frac{0.44}{r^{0.165}} \\ \tau_{r\theta}(r) &= -\frac{0.30}{r^{0.232}} - \frac{0.15}{r^{0.165}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となり, r の指数が異なる二つの項の和として表される。式(8), (9)からわかるように, $\theta=180^\circ$ と 270° の界面において, 垂直応力 σ_θ は前者において, せん断応力 $\tau_{r\theta}$ は後者において, よりきびしい。

図 17 には, 式(8), (9)に基づいて求めた, 角点のごく近傍 ($r=10^{-10}$ まで) の界面における応力 σ_θ の値を示す (○: $\theta=180^\circ$ の界面, ●: $\theta=270^\circ$ の界面)。このような応力分布に式(1)をあてはめることによって

図 11 菱形介在物を有する無限板が両軸引張荷重を受けるときの K_{I, λ_1}

図 12 菱形介在物を有する無限板がせん断荷重を受けるときの K_{II, λ_2}

式(1)中の特異応力場に関する強さのパラメータ K と指数のパラメータ $\lambda-1$ を求めようとする, 図中の実線で示すように, K と $\lambda-1$ の値は, いずれもあてはめる r の値によって変化し, 真のそれ ($r \rightarrow 0$ のときの値) と大きく異なっている。また, 応力場のモード I とモード II の成分の割合が角点に近づく方向によ

(a) $\Delta=30^\circ$

(b) $\Delta=60^\circ$

(c) $\Delta=90^\circ$

図 13 図 10~12 中の角部での応力特異性の指数 λ_1, λ_2

図 14 一軸引張荷重を受ける正方形の介在物

図 15 図 14 の角部 A の近傍での特異応力 σ_θ 図 16 図 14 の角部 A の近傍での特異応力 $\tau_{r\theta}$ 図 17 角点近傍の界面における応力 σ_θ の分布

て異なることを反映して、 $\theta=180^\circ$ の界面から求めた特異性の指数 $\lambda-1$ は、 $\theta=270^\circ$ の界面から求めたものとも大きく異なっている。また、特性方程式から特異性が強いほうの特異性の指数だけを求め、それを式 (1) に代入し、この式 (1) を角部近傍の応力の値にあわせてパラメータ K だけを求めることは、図中の点線と実線の相違からもわかるように、困難である。このように、接合異材の角点における応力場は応力特異性の一つ指数では規定できない。

モード I とモード II の混在する特異応力場がき裂問題のように一つの指数で規定されている場合には、特異点近傍での垂直応力 σ_θ またはせん断応力 $\tau_{r\theta}$ が最大となる方向は特異点先端からの距離 r と無関係である。これに対して、図 14 の場合のように特異応力場

図 18 角部 A の近傍で σ_θ が最大となる角度 θ 図 19 角部 A の近傍で $\tau_{r\theta}$ が最大となる角度 θ

が二つの指数で表されるとき、式(8)、(9)からもわかるように、モードⅠとモードⅡの変形による特異応力の割合は、角点からの距離 r によって変化する。このことは、角点近傍での σ_θ または $\tau_{r\theta}$ が最大となる角度 θ が r によって変化するを意味している。図18と図19は、角部A近傍でのそれぞれの σ_θ と $\tau_{r\theta}$ が最大となる角度 θ を r の関数として示したものである。 $G_2/G_1=10$ のとき $\lambda_1 < \lambda_2$ となるので、 r が小さいほどモードⅠによる応力成分の割合が大きくなる。これに対して、 $G_2/G_1=\infty$ のときは $\lambda_1 > \lambda_2$ となるので、 r が小さいほど逆にモードⅡによる応力成分の割合が大きくなる。したがって、図18、19では、 $G_2/G_1=0$ のカーブと $G_2/G_1=0.1$ のカーブの差は小さいが、 $G_2/G_1=\infty$ のカーブの差は小さいが、 $G_2/G_1=\infty$ のカーブと $G_2/G_1=10$ のカーブの差は大きい。

4. 結 論

両異材を接合した角部近傍での特異応力場を、モードⅠとモードⅡの指数が異なる二つの特異応力場の和として検討した。とくに、角部での垂直応力 σ_θ またはせん断応力 $\tau_{r\theta}$ が最大となる方向や界面での特異応力の場の強さなどを、著者らがさきに導いた角部特異応力場の式および菱形の介在物を有する無限板の問題の数値解析結果に基づいて具体的に示した。

文 献

- (1) 服部・ほか3名, 機論, 54-499, A(1988), 597.
- (2) 陳・西谷, 機論, 57-534, A(1991), 366.
- (3) 陳・西谷, 機論, 57-538, A(1991), 1404.
- (4) Dundurs, J., *J. Appl. Mech.*, 36(1969), 650.
- (5) 西谷・陳, 体力法, (1987), 第2章, 培風館.
- (6) 陳・西谷, 材力講演会講演論文集, No. 900-86(1990-11), 114.