だ円形の空孔または剛体介在物を有する 面内・面外問題の解析解とその応用*

(第2報, 等方性面内問題の数値計算例)

平島 健一^{*1}, 木村 清和^{*2}, 広瀬 幸雄^{*3}

Analytical Solutions for In-Plane and Out-of-Plane Problems with Elliptic Hole or Elliptic Rigid Inclusion and Their Applications (2nd Report, Numerical Examples for Isotropic In-Plane Problems)

Ken-ichi HIRASHIMA, Kiyokazu KIMURA and Yukio HIROSE

By using the theoretical results for closed-form analytical solutions of in-plane problems inclusion under point forces, dislocations and so on, several numerical examples are shown by many graphical representations. The previous results published by several authors can be included as particular cases of our solutions.

Key Words: Elasticity, Elliptic Hole, Elliptic Rigid Inclusion, In-Plane Problems, Numerical Examples

1. 緒 言

だ円孔を含む無限平板の有限位置に, 集中力, 集中偶力, 転位, あるいは集中力対, 転位対といった, いわゆる特異項が作用する問題の解析解は, これまで各研究者により個々の場合の目的に応じた限定的な形で求められてきた。本論文のシリーズではそれらの問題を統一的視点で整理することを目的としているが, このことはそれ自身に新しい解析解を含んでいるという新規性だけでなく, 他の種々の問題への応用性を考えれば極めて重要なものである。第1報ではそのことを踏まえて, だ円形の空孔またはだ円形の剛体介在物を有する等方性の任意の有限位置に集中力, 集中力対, 転位および転位対などが作用する場合の基本的かつ一般的な解析解を誘導した⁽¹⁾。そこでは, 円形から直線状のクラック, または剛体介在物の問題を統一的に扱えるようになっている。また通常, 応力または応力拡大係数の計算式のみが与えられるのに対して, ここでは変位の解析解も同時に求められるような配慮がなされている。

本報では第1報で記述できなかった新たな基本解のいくつかを提示するとともに, 代表的な場合の数値計算例を実施し, 従来までの研究者の成果と比較することにより, ここで求められた解析解の妥当性について考察を行う。

2. いくつかの問題の解析解 および数値計算例

2・1 無限遠から一様応力および回転が作用する問題 だ円形の空孔あるいはだ円形の剛体介在物を含む無限平板に無限遠より一様応力 $\sigma_x^{\infty}, \sigma_y^{\infty}, \tau_{xy}^{\infty}$, および回転 ω^{∞} が作用するものとすれば, 複素関数 $\phi(\zeta)$, $\chi(\zeta)$ は第1報の式(25), (26)で与えられる。これを用いて数値計算を行い, 境界上の各応力分布を求めた。ポアソン比を $\nu=0.25$ とし, だ円の扁平率を $b/a=0.01, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ と変化した場合の応力分布の変化を検討した。この種の問題の解析は従来, いろいろな教科書⁽²⁾ や論文で取り上げられているが, 本論文の統一的な視点での整理結果を以下に二, 三示すこととする。

まず, 図1に σ_x^{∞} が作用する場合のだ円形境界の周縁における σ_{θ} の応力分布を示したが, これより剛体介在物を含む場合はその長軸方向の無限遠より引張応

* 原稿受付 平成3年1月17日。

^{*1} 正員, 山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田4-3-11)。

^{*2} 金沢大学大学院。

^{*3} 正員, 金沢大学教育学部 (〒920 金沢市丸の内1-1)。

力が作用するほうが当然のことながら σ_y が大きく変化することがわかる。

次に、図2に無限遠での回転角 $\bar{\omega}^\infty$ が作用する場合の剛体介在物周縁の応力分布図を示す。この図で、 $b/a = 1.0$ (すなわち円形) の場合を境にして対称形となっているのは長軸方向が 90° ずれたことによるもので図形がその分シフトするためである。

2.2 だ円孔を持つ平板内の一点に集中力, 集中偶力または転位が作用する問題 領域内の一点に集中力 X, Y , 集中偶力 M_0 , 転位 (変位の食違い) u_x^*, u_y^* , および点膨張 K が作用する場合の複素関数は第1報の式(20)で与えられている。これを用いて孔縁境界での応力と変位の分布を, 特異項の作用点 z_0 を変化さ

せて数値計算を行った。その一例としてだ円形の空孔を持つ平板に集中力 X が x 軸上の有限位置に作用した場合のだ円形境界における応力分布を図3に示す。この図より, 作用点 z_0 が境界より遠ざかるにつれて応力値は減少し, その減少の割合はだ円の長軸上の点では比較的小さいことがわかる。明らかに 90° 付近でのグラフの膨らみは介在物がだ円形であることの影響を示している。

さらに, これらの応力値を孔縁だけでなく領域内の各点で求め, それから任意点での等最大せん断応力線を計算した場合の例を図4に示した。これは x 軸より上半分がだ円空孔, 下半分が剛体介在物の場合のものである。また, 図5には集中偶力 M_0 が作用する場合の応力分布を示した。この場合には図3で見られただ円の影響はほとんど出ていないことが観察される。

次に, 転位 u_y^* が作用する場合のだ円形境界におけ

図1 σ_x が作用する場合の自由境界のだ円孔境界における σ_y の分布

図3 x 軸上に集中力 X が作用する場合の σ_y の分布

図2 $\bar{\omega}^\infty$ が作用する場合の剛体介在物境界における σ_y の分布

図4 x 軸上に集中力 X が作用する場合の $\tau_{\max}$ の分布

る応力, 変位の分布図を図6~8に示した。なお, 一般的に有限位置の一点で u_y^* の転位が発生する場合, 周知のようにその発生点の左側の領域において変位に食違い量だけのずれが一様に生じる。このため作用点をだ円孔の右側位置に設定すると, x 軸をはさんで孔の上下で一定の食違いが生じる結果となる。これを避けるために作用点を孔の左側の x 軸上の対称点に移動して計算を行った。

次に, y 軸上の原点をはさんで対称な二点に集中力,

図5 集中偶力 M_0 が作用する場合の $\tau_{\theta\theta}$ の分布

図6 転位 u_y^* が作用する場合の σ_y の分布

図7 転位 u_y^* が作用する場合の σ_x の分布

集中偶力が作用する場合の計算例を図9, 10に示した。この例は, 宮尾が級数解法を用いて求めた計算例⁽⁹⁾にほぼ近い値を示しているものの多少の差異が認められる。これは本論文においては厳密解として閉じた形の解を用いているのに対し, 宮尾は級数解を用いているためであると推定される。

2.3 領域内の一点に集中力対, 転位対などが作用する問題 第1報において集中力対, 転位対などが作用する場合について閉じた形の解析解を誘導した。そこで本報では図11に示すように二つの集中力対を重ね合わせた, いわゆる引張りの標準型集中力対, およびせん断の標準型集中力対を考える。これらは石田, 西谷らの指摘のように, だ円孔を有する場合の各種のき裂問題の解析に利用できるものである⁽⁴⁾⁽⁵⁾。そこで,

図8 転位 u_y^* が作用する場合の σ_y の分布

図9 y 軸上の対向する二点に集中偶力 M_0 が作用する場合の σ_y の分布

図 10 y 軸上の対向する二点に集中力 X が作用する場合の σ_y の分布

ここでは第1報の式(32)で定義した複素関数の係数を、次式のように新たに定義しなおすことにしよう。

$$\left. \begin{aligned} M^* &= \frac{G}{\pi(x+1)} D^* e^{-i\alpha} - \frac{1}{2\pi(x+1)} P^* e^{i\alpha}, \\ N^* &= \frac{G}{\pi(x+1)} D^* e^{i\alpha} + \frac{x}{2\pi(x+1)} P^* e^{-i\alpha}, \\ K^* &= K^{**} + \frac{i}{2\pi} M_0^*. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに,

$$P^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (P\epsilon), \quad D^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (D\epsilon). \dots\dots\dots (2)$$

図 11 標準型集中力対

上式の P, D はそれぞれ集中力, 転位を示し, α はその方向を示す。なお, 上式中の x は平面応力状態のとき $x = (3-\nu)/(1+\nu)$ を, また平面ひずみ状態のとき $x = 3-\nu$ とする。 G, ν はせん断弾性係数, ポアソン比である。また, 第1報の式(31)で用いられている γ および上式中の α は次に示すような関係式を代入してやればよい。

◎引張型の場合

$$\left. \begin{aligned} ① \alpha &= \beta + \pi/2, \quad \gamma = \beta + \pi/2, \\ ② \alpha &= \gamma = \beta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

◎せん断型の場合

$$\left. \begin{aligned} ① \alpha &= \beta, \quad \gamma = \beta + \pi/2, \\ ② \alpha &= \beta + \pi/2, \quad \gamma = \beta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

β は図11に示した微小部分の傾きを表す。また, 上式の定義式を踏まえてこれに関係する複素関数の整理を行うと, 引張型およびせん断型の両者に対して共通に用いることのできる次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_d(\zeta) &= \frac{e^{i\beta}}{R_0(1-m/\zeta_0^2)} \left\{ -\frac{\hat{M}_1^*}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{k_0} \cdot \frac{\hat{M}_2^*}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_0} h_1(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) \right\} + \frac{e^{-i\beta}}{R_0(1-m/\bar{\zeta}_0^2)} \\ &\quad \times \frac{1}{k_0} \left[\frac{\hat{N}^*}{\bar{\zeta}_0(\bar{\zeta}_0\zeta - 1)} + \hat{M}_2^* \left\{ -\frac{h_1(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)}{(\bar{\zeta}_0\zeta - 1)^2} + \frac{h_1^*(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_0} \right\} + \hat{K}^* \left\{ \frac{h_2(\bar{\zeta}_0)}{(\bar{\zeta}_0\zeta - 1)^2} - \frac{h_2^*(\bar{\zeta}_0)}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_0} \right\} \right], \\ \chi_d(\zeta) &= \frac{e^{i\beta}}{R_0(1-m/\zeta_0^2)} \left[-\frac{\hat{N}^*}{\zeta - \zeta_0} - \hat{M}_1^* \left\{ \frac{g_1(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{g_1'(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)}{\zeta - \zeta_0} \right\} + \hat{K}^* \left\{ \frac{g_2(\zeta_0)}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{g_2'(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right\} \right] \\ &\quad + \frac{e^{-i\beta}}{R_0(1-m/\bar{\zeta}_0^2)} \left\{ \frac{\hat{M}_2^*}{\zeta - \zeta_0} g_1(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) + k_0 \frac{\hat{M}_1^*}{(\bar{\zeta}_0\zeta - 1)} \right\}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式中の複素関数の係数は、次のように与えられる。

◎引張型の場合

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_1^* &= \frac{Ge^{-i\beta}}{\pi(x+1)} (D_1^* + D_2^*) + \frac{e^{i\beta}}{2\pi(x+1)} (P_1^* - P_2^*), \quad \hat{M}_2^* = \frac{Ge^{-i\beta}}{\pi(x+1)} (D_1^* - D_2^*) + \frac{e^{i\beta}}{2\pi(x+1)} (P_1^* + P_2^*), \\ \hat{N}^* &= -\frac{Ge^{i\beta}}{\pi(x+1)} (D_1^* - D_2^*) + \frac{x e^{-i\beta}}{2\pi(x+1)} (P_1^* + P_2^*), \quad \hat{K}^* = i(K_1^{**} - iK_2^{**}) - \frac{1}{2\pi} (M_{01}^* - iM_{02}^*). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

◎せん断型の場合

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_1^* &= \frac{iGe^{-i\theta}}{\pi(x+1)}(D_1^* - D_2^*) - \frac{ie^{i\theta}}{2\pi(x+1)}(P_1^* + P_2^*), & \hat{M}_2^* &= \frac{iGe^{-i\theta}}{\pi(x+1)}(D_1^* + D_2^*) - \frac{ie^{i\theta}}{2\pi(x+1)}(P_1^* - P_2^*), \\ \hat{N}_1^* &= \frac{iGe^{i\theta}}{\pi(x+1)}(D_1^* + D_2^*) + \frac{ixe^{-i\theta}}{2\pi(x+1)}(P_1^* + P_2^*), & \hat{K}^* &= i(K_1^{**} - iK_2^{**}) - \frac{1}{2\pi}(M_{01}^* - iM_{02}^*). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

(添字の 1, 2 は式(3), (4)の場合分けの記号である①, ②を表す)。

図 11 に示した場合で、引張型においては平面応力状態のとき $P_2 = \nu P_1$ (ν : ポアソン比), 平面ひずみ状態のとき $P_2 = \nu P_1 / (1 - \nu)$, せん断型においては $P_2 = P_1$ とおき、だ円空孔 (すなわち $k_0 = -1$) の場合に対する上述の複素関数を整理したものは西谷らの論文中の式(6), (7)と完全に一致したものとなっている⁽⁶⁾。以下では、この複素関数を用いてだ円孔境界上の応力分布を計算した。

図 12 は、引張りの標準型集中力対が作用する場合の σ_θ の分布図である。この図より、作用点が境界に近づくとき $\theta = 15^\circ$ において応力値のくびれが生じることがわかる。図 13 は、同じくせん断の標準型集中力対が作用する場合のものである。

2.4 だ円形の剛体介在物に働く合モーメントまたは回転角の算定 だ円形剛体介在物を含む無限平板に、無限遠荷重ないし任意の有限位置の $z = z_0$ に特異項が作用する場合には、介在物は回転もしくは移動を生じる。この回転に関しては、無限遠荷重作用の場合について Muskhelishvili⁽²⁾ が基本的な考察を実施し、また有限位置に集中力が作用する場合の rigid line inclusion の問題については Chen および Cheung が論文発表を行っている⁽⁶⁾。第 1 報においては無限遠荷重、回転および有限位置での特異項が作用する場合の合モーメントの算定式を誘導し、その妥当性について

述べた。ここでは、それを利用して図 14 に示した重ね合わせにより剛体介在物の回転を考察する。

まず図 14(d) の場合における合モーメント T_0 は第 1 報の式(40)で求められる。次に図 14(c) の場合を考えると、これは同じく第 1 報の式(40)において $\bar{\omega}_0 = -\gamma$, $\tau_{xy}^\infty = \bar{\omega}^\infty = 0$ とおくことにより次式が得られる。

$$\gamma = \frac{T_0(x+1)}{4\pi GR_0^2(1+m^2/x)(k_0+1)} \dots\dots\dots (8)$$

次に、図 14(b) に示した回転 γ が生じたことによる変位の補正を行う。これも第 1 報の無限遠荷重問題において、無限遠での回転角を $\bar{\omega}^\infty = \gamma$ として計算を行えばよい。したがって、これらの場合を重ね合わせることにより剛体介在物の回転を考慮した問題の解が得られたことになる。

なお、自由境界のクラック (すなわち, $m=0$) を有する平板の無限遠に等分布荷重が作用する場合のクラック周辺部分での回転の効果を議論した論文が Bhattacharya and Kishor によって発表されている⁽⁷⁾。

2.5 各種の集中力, 集中力対などが作用する問題の応力拡大係数 領域内の有限位置に集中力や標準型の集中力対が作用する場合のクラックや直線状の介在物 (すなわち, $b=0$) の先端における応力拡大係数の算定式は、それぞれ第 1 報の式(47), および本論文の

図 12 x 軸上に引張りの標準型集中力対が作用する場合の σ_θ の分布

図 13 x 軸上にせん断の標準型集中力対が作用する場合の σ_θ の分布

式(5)で $m=0$ (すなわち, $b=0$) とした場合について整理した式で与えられる。ここではそれらを用いて荷重の作用点を $z_0=\mu_0 a$ に設定し, $\mu_0=1.2, 1.6, 2.4, 4.0$ と変化させ, また原点を中心とした位置に作用点を移動させることにより, パラメータ $m=0$ (すなわち, $b=0$) としたクラック先端での応力拡大係数の変動を調べた。

図15は空孔または剛体介在物を有する平板の任意点に集中力 X が作用する場合である(ただし, 第1報でも述べたように剛体介在物のときには応力拡大係数ではなく応力特異係数と呼ばれる)。これらの図より, 作用点がラックの先端部に近づくにつれて応力拡大係数の 0° 付近での変動が著しくなるのがわかる。図16~18に引張りおよびせん断の標準型集中力対が作用する場合のクラック先端における, 応力拡大係数

K_I, K_{II} を図示したものを与えた。この場合, 0° 付近で応力拡大係数は減少するような特性をもつことがわかる。

3. 結 言

本論文では, 第1報で述べた解析解を用いて種々の

図14 剛体介在物の回転を考慮するための解析モデル

図15 集中力 X が作用する場合の作用点の変化によるクラックまたは剛体介在物先端の応力拡大係数 K_I の分布

図16 引張りの標準型集中力対が作用する場合の作用点の変化によるクラック先端の応力拡大係数 K_I の分布

図17 せん断の標準型集中力対が作用する場合の作用点の変化による剛体介在物先端の応力拡大係数 K_I の分布

図18 せん断の標準型集中力対が作用する場合の作用点の変化による剛体介在物先端の応力拡大係数 K_I の分布

数値計算を行い, その特別な場合について他の研究者らによる結果と比較を行い, それらが一致ないしはほぼ等しい結果となることを確認した。これより第1報で述べた解析解は, だ円空孔, およびだ円形剛体介在物 (および, それらを特殊化した円形およびクラック) を持つ無限平板に無限遠荷重, 集中力, 集中力対 (標準型集中力対), 転位などが作用する場合を統一的に取扱えることを立証した。続報においては, これらの基本解の重ね合わせによる各種の問題への適用例を示す予定である。

文 献

- (1) 平島・木村・広瀬, 機論, 57-540, A(1991), 1897.
- (2) Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, (1962), 339, 357.
- (3) 宮尾, 機論, 26-161(1960), 114; 27-179(1961), 997.
- (4) 石田・中村, 機論, 46-409, A(1980), 947.
- (5) 西谷・才本・野口, 機論, 56-530, A(1990), 79.
- (6) Chen, Y. Z. and Cheung, Y. K., *Eng. Fract. Mech.*, 26-5 (1987), 729.
- (7) Bhattacharya, A. and Kishor, B., *Eng. Fract. Mech.*, 30-4(1988), 451.