高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換*

井上 裕嗣^{*1}, 上林 稔^{*2}, 岸本 喜久雄^{*1}
渋谷 寿一^{*1}, 小泉 堯^{*1}Numerical Laplace Transformation and Inversion
Using the Fast Fourier TransformHirotsugu INOUE, Minoru KAMIBAYASHI, Kikuo KISHIMOTO,
Toshikazu SHIBUYA and Takashi KOIZUMI

The Laplace transformation is known as one of the most powerful mathematical techniques for solving wide range of problems in engineering. For its application to practical problems, many authors have extensively studied methods of numerical inversion. On the other hand, the method of numerical transformation has not been studied very much. For this reason, most of the applications were limited to theoretical or numerical analysis and there were few applications to experimental analysis. To overcome this problem, both of the numerical transformation and inversion are studied in this paper. Numerical accuracy is evaluated and discussed using two test functions, sinusoidal and step function. A chart is presented for determining the parameters of computation under a specified accuracy.

Key Words: Numerical Analysis, Experimental Stress Analysis, Laplace Transform, Fast Fourier Transform

1. 緒 言

ラプラス変換法は、フーリエ変換法とともに多くの工学的問題を解析する際に有力な数学的手法の一つとして古くから知られており、各種の理論解析や数値解析に応用されている。一方、近年のパーソナルコンピュータの進歩によって種々の実験解析が容易に行えるようになってきており、衝撃荷重が作用する構造物の実験応力解析などにおいて、ラプラス変換法は有効な手法になり得ると考えられる。しかし、現在のところ、実験解析に対するラプラス変換法の応用例は、フーリエ変換法に比較して数少ないようである。この原因は、実験解析では測定データを扱うために変換・逆変換の両者を数値的に行う必要があるにもかかわらず、そのための数値計算手法が十分に研究されていないことにあると思われる。

従来、数値ラプラス逆変換については、理論解析や数値解析における必要性から数多くの手法^{(1)~(4)}が提案され、その精度や適用性に関する検討もなされてい

る。しかし、ラプラス変換と逆変換の両者を数値的に取扱う方法としては、著者らの知る限り Wilcox⁽⁵⁾の方法以外に見当たらず、また、この方法の精度や適用性についてはいまだ十分に検討されていないようである。Wilcoxの方法は時間領域の一定時間間隔のデータと周波数領域の一定周波数間隔のデータとが離散の変換対を形成するもので、高速フーリエ変換(FFT)⁽⁶⁾を利用して計算の高速化を図るものである。実験解析で変換対象となる測定データは一定時間間隔でサンプリングされることが多く、また、FFTはスペクトル解析などの実験解析に広く利用されていることから、Wilcoxの方法は実験解析に応用しやすい方法の一つであると考えられる。

そこで、本論文では、実験解析にラプラス変換法を応用することを目的として、FFTを利用した数値ラプラス変換・逆変換法の精度について基礎的な検討を行う。

2. 離散ラプラス変換・逆変換

2.1 ラプラス変換対 ラプラス変換は、 $t < 0$ において $f(t) = 0$ なる関数 $f(t)$ に対して、次のように定義される。

* 平成2年9月24日 第68期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成3年3月1日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

^{*2} 東京工業大学大学院。

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp \quad \dots\dots\dots (2)$$

$p = \gamma + i\omega$ (γ は正の定数, i は虚数単位) で変数変換し, $t < 0$ で $f(t) = 0$ であることを考慮すれば,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{-i\omega t} dt \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$f(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad \dots\dots\dots (4)$$

となり, ラプラス変換はフーリエ変換の形で表すことができる。

2・2 離散ラプラス変換 式(3)を数値的に計算するために, まず, 時間領域において離散化する。離散化のサンプリング関数として次の等間隔インパルス列を用いる。

$$g_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot \Delta t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $\delta(t)$ はデルタ関数である。 $g_1(t)$ のフーリエ変換 $G_1(\omega)$ は,

$$G_1(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{\Delta t}\right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

である⁽⁶⁾ から, 畳み込み則により,

$$F(\omega) * G_1(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\gamma t} g_1(t) e^{-i\omega t} dt \quad \dots\dots\dots (7)$$

が成立する。ここで, $*$ は畳み込み演算を表す。上式の両辺はそれぞれ,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega') \cdot G_1(\omega') d\omega' \\ &= \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2n\pi}{\Delta t}\right) \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \cdot \Delta t) \cdot e^{-\gamma k \Delta t} \cdot e^{-i\omega k \Delta t}$$

となるから, $t < 0$ において $f(t) = 0$ であることを考慮して整理すれば,

$$F(\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} f(k \cdot \Delta t) e^{-\gamma k \Delta t} e^{-i\omega k \Delta t} + E_1(\omega) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで,

$$E_1(\omega) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[F\left(\omega - \frac{2n\pi}{\Delta t}\right) + F\left(\omega + \frac{2n\pi}{\Delta t}\right) \right] \quad \dots\dots\dots (9)$$

であり, 積分を無限和で近似したときの離散化による誤差を表す。通常, 工学問題で扱う関数 $f(t)$ では, $|\omega| \rightarrow \infty$ につれて $|F(\omega)| \rightarrow 0$ となるから, Δt が十分小さな値であれば $E_1(\omega)$ は無視できる。次に, 式(8)の無限和を $(K-1)$ 項までで打ち切って,

$$\hat{F}(\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{K-1} f(k \cdot \Delta t) \cdot e^{-\gamma k \Delta t} \cdot e^{-i\omega k \Delta t} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とすれば,

$$F(\omega) = \hat{F}(\omega) + E_1(\omega) + E_2(\omega) \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここで,

$$E_2(\omega) = \Delta t \sum_{k=K}^{\infty} f(k \cdot \Delta t) \cdot e^{-\gamma k \Delta t} \cdot e^{-i\omega k \Delta t} \quad \dots\dots\dots (12)$$

は無限和を有限で打ち切ったときの誤差を表す。 K および γ が十分大きな値であれば $E_2(\omega)$ は無視できるので, 式(10)によってラプラス変換が近似的に計算できる。

2・3 離散ラプラス逆変換 式(4)の積分を離散化して無限和とし, これを有限項で打ち切る。前項と同様の手順により,

$$\hat{f}(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \Delta \omega \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{F}(n \cdot \Delta \omega) \cdot e^{i n \Delta \omega t} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$f(t) = \hat{f}(t) + E_3(t) + E_4(t) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} E_3(t) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left[f\left(t - \frac{2k\pi}{\Delta \omega}\right) \cdot e^{\gamma 2k\pi / \Delta \omega} \right. \\ &\quad \left. + f\left(t + \frac{2k\pi}{\Delta \omega}\right) \cdot e^{-\gamma 2k\pi / \Delta \omega} \right] \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4(t) &= \frac{e^{\gamma t} \Delta \omega}{2\pi} \left[\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{F}(n \cdot \Delta \omega) \cdot e^{i n \Delta \omega t} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=N/2}^{\infty} \hat{F}(n \cdot \Delta \omega) \cdot e^{i n \Delta \omega t} \right] \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となる。式(13)によってラプラス逆変換を近似する場合, $E_3(t)$ は離散化誤差を表し, $E_4(t)$ は打ち切り誤差を表す。 $\Delta \omega$ を十分小さく, N を十分大きくすれば, $E_3(t)$ と $E_4(t)$ はともに小さくなる。しかし, γ が大きくなると, $E_3(t)$ は小さくなるのに対し, $E_4(t)$ は係数 $\exp(\gamma t)$ のために大きくなる。Wilcox⁽⁵⁾ は経験的に $\gamma = \Delta \omega$ とすれば, 多くの場合に十分な精度が得られるとしている。

2・4 高速フーリエ変換の利用 式(10)と式(13)は離散フーリエ変換と同様の形になっているので, サンプリング定理により離散化のきざみ幅と点数を定める。すなわち, $f(t) \exp(\gamma t)$ が区間 $0 \leq t \leq T$ の外部で零, $F(\omega)$ が区間 $0 \leq |\omega| \leq \Omega/2$ の外部で零であるものとすれば,

$$\begin{aligned} \Delta t &= 2\pi/\Omega, \quad \Delta \omega = 2\pi/T \\ T &= K \cdot \Delta t, \quad \Omega = N \cdot \Delta \omega, \quad K = N \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。このとき, 式(10)と式(13)はそれぞれ

$$\hat{F}(n \Delta \omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k \Delta t) \cdot e^{-\gamma k \Delta t} \cdot e^{-2\pi i k n / N} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\hat{f}(k \Delta t) = \frac{e^{\gamma k \Delta t}}{2\pi} \Delta \omega \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{F}(n \cdot \Delta \omega) \cdot e^{2\pi i k n / N} \quad \dots\dots\dots (19)$$

となり, N 点の離散ラプラス変換対が定式化される。なお, $\gamma = 0$ とした場合には, 両式は離散フーリエ変換

対となる。

一般に、実験解析において、 $f(t)$ は一定間隔でサンプリングされた数値データとして与えられる。式(18)の離散ラプラス変換は、正の定数 γ を適当に定めれば、このようなデータから直接計算できる。このとき、離散ラプラス変換は p 平面上の虚軸に平行な直線 $p=\gamma$ 上の等間隔な点における値しか得られないが、式(19)の離散ラプラス逆変換はこれらの点における値のみから直接計算できる。

なお、式(18)、(19)は離散フーリエ変換と同様の形であるから、高速フーリエ変換(FFT)⁽⁶⁾を利用することが可能であり、 N を2のべき乗にとれば計算を効率よく行うことができる。

図1 数値ラプラス変換例
(正弦関数 $\omega_0=2\pi/T$, $N=32$)

3. 数 値 計 算

一般に、ラプラス変換法では、構造物に作用する衝撃荷重などのように、ある時刻において零から立上がる過渡信号を取扱うことが多い。そこで、そのような関数の例として次のような正弦関数と単位ステップ関数を試験関数に用い、本研究の数値ラプラス変換・逆変換法の精度について検討した。

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)] = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\mathcal{L}[H(t - T/2)] = \frac{1}{p} e^{-pT/2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

3.1 数値変換・逆変換例 図1, 2はそれぞれ正弦関数 ($\omega_0=2\pi/T$) の数値ラプラス変換、逆変換を種々の γ の値に対して $N=32$ として計算した例である。本方法による数値変換の実部を●印、虚部を○印で示し、理論値の実部を実線、虚部を破線で示している。変換においては、 $\gamma=1/T$ の場合は p 平面上の極に近いために理論値の変動が大きく、このとき数値変換結果は理論値との差が大きい。しかし、 γ の値が大きくなると、理論値の変動は小さくなり、数値変換結果は理論値にほぼ一致している。一方、逆変換においては、 $\gamma=4/T$ の場合は数値逆変換結果と理論値がほぼ一致しているが、 $\gamma=1/T$, $8/T$ の場合は数値逆変換結果と理論値は大きく異なっている。

3.2 精度の評価法 式(9)、(12)、(15)、(16)からわかるように、本研究の数値ラプラス変換・逆変換法では、正の定数 γ 、計算点数 N (または、分割幅 Δt)、および変換の対象とする関数によって精度が変化する。そこで、種々の条件における数値変換・逆変換の計算精度を総合的に評価するために、 N 点の理論値の二乗平均値に対する二乗平均誤差の比をとり、次のように精度を定義した。すなわち、数値ラプラス変換については、

$$R_1 = \left[\frac{\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |\hat{F}(n \cdot \Delta\omega) - F(n \cdot \Delta\omega)|^2}{\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |F(n \cdot \Delta\omega)|^2} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

数値ラプラス逆変換については、

$$R_2 = \left[\frac{\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}(k \cdot \Delta t) - f(k \cdot \Delta t)|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} |f(k \cdot \Delta t)|^2} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (23)$$

を尺度として精度を評価することにした。

なお、図1, 2の数値ラプラス変換・逆変換例の場合、 R_1 , R_2 はそれぞれ同図中に示した値となる。

3.3 定数 γ の影響 まず、 γ の値に対する精度

の変化について調べた。図3は、正弦関数($\omega_0=2\pi/T$, $T=\text{const}$)および単位ステップ関数について数値ラプラス変換の精度 R_1 をプロットしたもので、 $N=32$ とした。いずれの関数でも、ある γ の値において精度は最も高くなっている。図中の破線と一点鎖線は、それぞれ理論的誤差 $E_1(\omega)$, $E_2(\omega)$ を計算してプロットしたもので、数値変換結果の誤差とよく一致している。これより、数値ラプラス変換においては、 γ の小さい範囲では打ち切り誤差 $E_2(\omega)$, 大きい範囲では離散化誤差 $E_1(\omega)$ が支配的であることがわかる。

図4は、同様に数値ラプラス逆変換の計算精度 R_2 をプロットしたものである。逆変換においても変換の場合と同様にある γ の値において精度が最も高くなっているが、 γ の値が大きい範囲での精度は変換の場

合と比較して極端に低下している。図中の破線と一点鎖線は、それぞれ理論的誤差 $E_3(t)$, $E_4(t)$ を計算してプロットしたもので、 γ の小さい範囲では離散化誤差 $E_3(t)$, 大きい範囲では打ち切り誤差 $E_4(t)$ が支配的であることがわかる。これは変換の場合とは逆の傾向である。

以上のことから、計算点数 N が一定の場合、変換・逆変換ともに γ の値により精度が大きく変化し、ある γ の値で最も精度が高くなることがわかる。

3.4 計算点数の影響 次に、計算点数 N の影響について調べた。図5, 6は、それぞれ正弦関数($\omega_0=2\pi/T$, $T=\text{const}$)の数値ラプラス変換・逆変換の精度を、 N をパラメータとしてプロットしたものである。容易に予想されるように、計算点数 N が大きくなるにつれて、変換・逆変換の精度はともに向上している。しかし、精度が最高になるときの γ の値は N が大きくなるとともに大きくなり、一定の値ではないことがわかる。

3.5 周波数成分の影響 最後に、変換の対象とする関数による影響について調べるために、 T と N を一定に保ち正弦関数の周波数 ω_0 を変化させて周波数の影響について調べた。図7, 8は、それぞれ数値ラプラス変換・逆変換の精度を、 ω_0 をパラメータとしてプロットしたもので、 $N=1024$ としている。 ω_0 が大きくなるにつれて変換・逆変換はともに精度が低下して

図2 数値ラプラス逆変換例
(正弦関数 $\omega_0=2\pi/T$, $N=32$)

図3 数値ラプラス変換の精度 (理論的精度との比較)

図4 数値ラプラス逆変換の精度 (理論的精度との比較)

おり、精度が最高になるときの γ の値は小さくなっている。したがって、種々の周波数成分を含む任意の関数では、その関数に含まれる周波数成分のうちで周波数の大きい成分が変換・逆変換の精度に大きな影響を及ぼすと考えられる。

3・6 精度の推定 以上のように、正の定数 γ 、計算点数 N 、および、対象とする関数に含まれる周波数成分の三者が精度に及ぼす影響がそれぞれ明らかになった。数値変換・逆変換の誤差は、式(9)、(12)、(15)、(16)の理論的誤差を計算すれば求められる。ところが、任意の関数を数値変換・逆変換する際には、変換・逆変換後の理論値は未知であるから、理論的誤差を算定することはできず、要求される精度が得られるような計

算条件を決定するのは困難である。一方、与えられた関数に対して試行錯誤的に計算条件を変化させて、精度のよい数値変換・逆変換結果を得ることは合理的でない。

先に述べたように、ラプラス変換法では零から立上がる過渡信号を取扱うことが多いが、このような過渡信号は種々の周波数の正弦関数の重ね合わせで表すことができる。そこで、正弦関数について種々の γ 、 N 、 ω_0 に対して数値変換・逆変換の精度を求め、その結果を総合して精度が所定の値になるような条件を整理してグラフにプロットした。

図9は、 ω_0 をパラメータとし、 $R_1, R_2=0.05$ となる γ と N の条件をプロットして折れ線で結んだものである。破線は数値変換、実線は数値逆変換の精度を示しており、破線、実線の右上側がそれぞれ $R_1, R_2 < 0.05$ となる領域を示している。同図より、 ω_0 が一定の場合、変換よりも逆変換のほうが所定の精度を得るための条件が厳しいことがわかる。すなわち、変換では γ をかなり大きくしても N はほぼ一定でよいが、逆変換では γ を大きくするにつれて N も大きくする必要がある。また、変換・逆変換のいずれにおいても、 γ が $3/T$ 以下では N をいくら大きくしても $R_1=R_2=0.05$ の精度は得られない。結局、 $R_1=R_2=0.05$ の精度を得るためには、 $\gamma=4/T$ 程度とし、 ω_0 に応じて適当

図5 数値ラプラス変換の精度
(計算点数 N の影響：正弦関数 $\omega_0=2\pi/T$)

図6 数値ラプラス逆変換の精度
(計算点数 N の影響：正弦関数 $\omega_0=2\pi/T$)

図7 数値ラプラス変換の精度
(周波数成分の影響：正弦関数、 $N=1024$)

図8 数値ラプラス逆変換の精度
(周波数成分の影響：正弦関数、 $N=1024$)

図9 精度 $R_1=R_2=0.05$ となる計算条件 (正弦関数)

な N の値を用いればよいと言える。図 10 は同様にし、 $R_1, R_2=0.01$ となる条件をプロットしたもので、この場合 $\gamma=5/T$ 程度とすればよいことがわかる。

4. 結 言

本研究では、実験解析にラプラス変換法を応用することを目的として、FFT を利用した数値ラプラス変換・逆変換法を取り上げ、その精度について検討した。本研究で得られた結論は以下のとおりである。

(1) 離散ラプラス変換対は離散フーリエ変換対と同様の形に定式化でき、FFT により数値計算することが可能である。また、離散ラプラス変換対の理論的誤差は、積分範囲の打ち切り誤差と積分の離散化誤差により表される。

(2) 数値ラプラス変換では、定数 γ (ラプラス変換パラメータの実部) が小さい場合は打ち切り誤差、 γ が大きい場合は離散化誤差が支配的である。一方、数値ラプラス逆変換では、 γ が小さい場合は離散化誤差、 γ が大きい場合は打ち切り誤差が支配的である。

(3) 本研究の離散ラプラス変換対の精度は、変換する関数 (正弦関数) の周波数 ω_0 、計算点数 N 、および定数 γ の三つの条件に影響される。 ω_0 が小さく、 N が大きいほど数値変換・逆変換の精度は向上する。 ω_0 と N が一定の場合には γ がある適当な値の時に精度は最高になるが、その γ の値は ω_0 と N に依存する。

(4) 正弦関数の数値ラプラス変換・逆変換において、所定の精度を得るための γ の値には下限がある。また、逆変換が所定の精度で計算できる条件のもとでは変換も所定の精度で計算できるが、この逆は成り立たない。

なお、本研究の離散ラプラス変換・逆変換は、窓関数として指数関数 $\exp(-\gamma t)$ を用いた離散フーリエ変換・逆変換と考えることもできる。一般に、スペクトル

図 10 精度 $R_1=R_2=0.01$ となる計算条件 (正弦関数)

解析などではフーリエ変換積分の打ち切り誤差を抑制するために窓関数が用いられ、Hanning 窓⁽⁶⁾などが知られている。しかし、窓関数の関数形によっては時間領域の畳み込みが周波数領域の乗算に対応しないなど、実験解析では不都合を生じることがある。窓関数として指数関数を用いれば、打ち切り誤差が抑制されるだけでなく、ラプラス変換として種々の考察ができるため、実験解析に应用する上では都合がよいと考えられる。

文 献

- (1) Davies, B. and Martin, B., Numerical Inversion of the Laplace Transform: a Survey and Comparison of Methods, *J. Comput. Phys.*, **33**(1979), 1.
- (2) 細野, 数値ラプラス変換, 電気学会論文誌, **99-10**, A (1979), 494.
- (3) Piessens, R. and Huysmans, R. Algorithm 619: Automatic Numerical Inversion of the Laplace Transform, *ACM Trans. Math. Software*, **10**(1984), 348.
- (4) Kwok, Y. K. and Barthez, D., An Algorithm for the Numerical Inversion of Laplace Transforms, *Inverse Problems*, **5**(1989), 1089.
- (5) Wilcox, D. J., Numerical Laplace Transformation and Inversion, *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, **15**(1978), 247.
- (6) Brigham, E. O. (宮川・今井訳), 高速フーリエ変換, (1979), 25, 102, 161, 166, 科学技術出版社.