一様磁場内におかれたき裂を有する電導体の特異応力* (間接境界積分法の電磁弾性応力解析への適用)

岸 田 路 也*¹, 佐々木 一彰*¹, 富 永 英 嗣*²

Singular Stresses of Electric Conductor with Crack in Uniform Magnetic Field (Application of Indirect Boundary Integral Method to Electromagnetic Stress Analysis)

Michiya KISHIDA, Kazuaki SASAKI and Eiji TOMINAGA

In this paper, the indirect boundary integral method is applied to the singular elastic stress analysis of an electric conductor with a crack in the uniform magnetic field. The simple-layer potentials and the double-layer potentials are used as the solution. The volumetric integrals, involving an electromagnetic body force, are transformed to surface integrals under uniform magnetic field and steady-state current field. As a concrete example, the ring-shaped crack in an infinite body is treated, and the stress intensity factor and the displacement on the crack surface are obtained.

Key Words: Elasticity, Indirect Boundary Integral Method, Conductor, Uniform Magnetic Field, Crack, Electromagnetic Stress, Stress Intensity Factor, Numerical Analysis

1. ま え が き

最近, プラズマ閉じ込めを目的とする核融合炉などに見られるように超電導マグネットの大形化・高磁界化が進み, これに伴って電磁弾性応力解析が構造・強度設計上非常に重要となってきた。とくに, 電磁弾性力学を基礎とする電磁破壊力学による構造物の力学的挙動の解明が必要とされている。

磁場内におかれた電導体に電流が流れると, 磁場と電流場との相互作用により電磁物体力が発生し, き裂先端に特異応力場を生ずる。進藤ら^{(1)~(5)}は, 積分変換を用いて, 軸方向磁場内における円板状き裂あるいは円柱状空か縁に環状き裂を有する電導体などの問題の解析を行った。しかし, 一般の任意形状問題に対して解析的な手法を適用することは困難であり, 有限要素法や境界積分法などの数値解析法が必要となる。矢川ら⁽⁶⁾は一様磁場内におかれた片側き裂を有する帯板が衝撃電流を受ける二次元問題の解析を行ったが, 三次元問題を取扱って, その応力拡大係数および変位を

求めた例は, 定常電流場に限っても, あまり見当たらないようである。

一方, 先に著者ら⁽⁷⁾は一重層および二重層ポテンシャルを用いた間接境界積分法により, 物体力のない三次元き裂の問題を取扱い, その応力拡大係数を精度良く求めた。本論文では, 一様磁場内におかれたき裂を有する電導体が定常電流を受ける場合を取扱い, 間接境界積分法による定式化を行い, 応力拡大係数を求める。ここでの具体例として, 円板状または円環状平面き裂を有する無限体にき裂に垂直な磁場および電流が作用する基本的な問題を取扱い, 厳密解との比較によって本解析法の有用性を示すこととする。

一般に, 物体力の存在する場で弾性応力解析を行う場合, 基本解と物体力の積の形で領域積分が必要となり, 境界のみの要素分割で良いという境界積分法の利点が失われることになる。しかし, 磁場が一様・電流が定常状態であるという仮定のもとでは電磁物体力に関する領域積分は境界積分に変換できるため, 境界積分法の利点を失うことはない。

2. 基 礎 理 論

2・1 電流解析 図 1 に示すように, 境界面 S によって囲まれ, き裂面 S_{c+} を含む領域 R を有する等

* 平成 2 年 11 月 29 日 材料力学講演会において講演, 原稿受付 平成 3 年 5 月 7 日。

^{*1} 正員, 北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)。

^{*2} 正員, ヤマハ(株)ピアノ事業部 (〒436 掛川市領家 1480)。

$$\begin{aligned}\vec{B}_2(\vec{P}) &= \int_{S_c} \vec{\mu}_c(\vec{q}_c) / |\vec{q}_c - \vec{P}| dS_c \\ \vec{B}_3(\vec{P}) &= \int_{S_c} c\vec{\xi}_c(\vec{q}_c) \frac{\partial}{\partial n_{qc+}} (1/|\vec{q}_c - \vec{P}|) dS_c \\ \vec{B}_4(\vec{P}) &= \frac{1}{16\pi G(\nu-1)} \int_R \vec{K}(\vec{Q}) / |\vec{Q} - \vec{P}| dR \\ &\dots\dots\dots(15)\end{aligned}$$

なる層ポテンシャル $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ および体積ポテンシャル $\vec{B}_4$ を考えることができる。ここで、 $\vec{Q}$ は R 内の

点である。式(15)中、 $\vec{B}_1$ は S 上に配布したベクトル面密度 $\vec{\mu}$ による一重層ポテンシャル、 $\vec{B}_2$ および $\vec{B}_3$ は互いに距離 c だけ離れた S_{c+} 面と S_{c-} 面にそれぞれベクトル面密度 $(\vec{\mu}_c/2 + \vec{\xi}_c)$ と $(\vec{\mu}_c/2 - \vec{\xi}_c)$ とを配布して $c\vec{\xi}_c$ を一定に保ったまま $c \rightarrow 0$ とした場合のポテンシャルであって、 $\vec{B}_2$ は一重層ポテンシャル、 $\vec{B}_3$ は二重層ポテンシャルを表している⁽⁷⁾。また、 $\vec{B}_4$ は領域積分であるが、式(2)、(3)、(10)より

$$\begin{aligned}\vec{B}_4(\vec{P}) &= \vec{B}_4^I(\vec{P}) + \vec{B}_4^{II}(\vec{P}) \\ \vec{B}_4^I(\vec{P}) &= \frac{\kappa}{32\pi G(\nu-1)} \int_S \left\{ \phi(\vec{q}) \left(\frac{\partial}{\partial n_q} \nabla_q |\vec{q} - \vec{P}| - \vec{n}_q \frac{2}{|\vec{q} - \vec{P}|} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n_q}(\vec{q}) \nabla_q |\vec{q} - \vec{P}| \right\} \times \vec{H} dS \\ \vec{B}_4^{II}(\vec{P}) &= \frac{\kappa}{32\pi G(\nu-1)} \int_{S_c} \left[\{ \phi_+(\vec{q}_c) - \phi_-(\vec{q}_c) \} \left(\frac{\partial}{\partial n_{qc+}} \nabla_{qc} |\vec{q}_c - \vec{P}| - \vec{n}_{qc+} \frac{2}{|\vec{q}_c - \vec{P}|} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n_{qc+}}(\vec{q}_c) + \frac{\partial \phi}{\partial n_{qc-}}(\vec{q}_c) \right\} \nabla_{qc} |\vec{q}_c - \vec{P}| \right] \times \vec{H} dS_c \dots\dots\dots(16)\end{aligned}$$

なる S および S_c に関する境界積分に変換できる⁽⁹⁾。ここで、 $\vec{n}_q$ および $\vec{n}_{qc+}$ は、それぞれ、S 上の点 $\vec{q}$ および S_{c+} 上の点 $\vec{q}_c$ における外向き単位法線ベクトルである。さらに、式(7)、(8)によって、

$$\vec{B}_4^{II} = -\frac{\kappa}{8G(\nu-1)} \int_{S_c} c\lambda_c(\vec{q}_c) \left(\frac{\partial}{\partial n_{qc+}} \nabla_{qc} |\vec{q}_c - \vec{P}| - \vec{n}_{qc+} \frac{2}{|\vec{q}_c - \vec{P}|} \right) \times \vec{H} dS_c \dots\dots\dots(17)$$

と求められる。

また、 S_c 上のポテンシャル $\vec{B}_2$ および $\vec{B}_3$ は、 $\vec{P}$ が S_c の法線に沿って S_c に近づくとき

$$\lim_{\vec{P} \rightarrow \vec{p}_{c\pm}} \frac{\partial \vec{B}_2}{\partial n_{pc-}}(\vec{P}) = \frac{\partial \vec{B}_2}{\partial n_{pc-}}(\vec{p}_c) \mp 2\pi\vec{\mu}_c(\vec{p}_c), \quad \lim_{\vec{P} \rightarrow \vec{p}_{c\pm}} \vec{B}_3(\vec{P}) = \vec{B}_3(\vec{p}_c) \mp 2\pi c\vec{\xi}_c(\vec{p}_c) \dots\dots\dots(18)$$

のような跳躍挙動を示し、これに伴う変位の不連続量はき裂上下面の開口変位に対応する。

このとき、境界方程式は $S_{c\pm}$ 上の点 $\vec{p}_c$ で

$$\vec{n}_{\pm} \cdot \left[\frac{d\vec{u}}{d\vec{r}} + \nabla \vec{u} + \frac{2\nu}{1-2\nu} I \nabla \cdot \vec{u} \right] = 0 \dots\dots\dots(19)$$

および S 上の点 $\vec{p}$ で

$$\vec{u} = \vec{U}(\vec{p}) \quad \text{または} \quad G\vec{n} \cdot \left[\frac{d\vec{u}}{d\vec{r}} + \nabla \vec{u} + \frac{2\nu}{1-2\nu} I \nabla \cdot \vec{u} \right] = \vec{T}(\vec{p}) \dots\dots\dots(20)$$

なる条件を満たすような、S 上の $\vec{\mu}$ および S_c 上の $\vec{\mu}_c$ と $c\vec{\xi}_c$ に関する連立第一種または第二種フレッドホルム形積分方程式に帰着される。ここで、 $\vec{n}_+$ 、 $\vec{n}_-$ および $\vec{n}$ はそれぞれ S_{c+} 上の点 $\vec{p}_c$ 、 S_{c-} 上の点 $\vec{p}_c$ および S 上の点 $\vec{p}$ における外向き法線、 I は単位テンソルである。これより求めた $\vec{\mu}$ 、 $\vec{\mu}_c$ および $c\vec{\xi}_c$ によって、R 内の変位および応力は

$$\vec{u}(\vec{P}), \quad \vec{T}(\vec{P}) = G \left[\frac{d\vec{u}}{d\vec{r}} + \nabla \vec{u} + \frac{2\nu}{1-2\nu} I \nabla \cdot \vec{u} \right] \quad (\text{R 内}) \dots\dots\dots(21)$$

と求められる。ここで $\vec{T}$ は応力テンソルである。

3. 三次元軸対称問題

x_3 軸に関して軸対称な問題の場合、面密度関数 $\sigma, \sigma_c, c\lambda_c$ およびベクトル面密度関数 $\vec{\mu}, \vec{\mu}_c, c\vec{\xi}_c$ の円柱座標系成分 $(\mu_r, \mu_\theta, \mu_z), (\mu_{cr}, \mu_{c\theta}, \mu_{cz}), (c\xi_{cr}, c\xi_{c\theta}, c\xi_{cz})$ は $\rho = \text{const.}$ または $\rho_c = \text{const.}$ な円周上で一定であり、直交座標系成分 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3), (\mu_{c1}, \mu_{c2}, \mu_{c3}), (c\xi_{c1}, c\xi_{c2}, c\xi_{c3})$ との間には

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_r \cos \theta - \mu_\theta \sin \theta, \quad \mu_2 = \mu_r \sin \theta + \mu_\theta \cos \theta, \quad \mu_3 = \mu_z \quad (\rho \text{ 上}) \\ \mu_{c1}(c\xi_{c1}) &= \mu_{cr}(c\xi_{cr}) \cos \theta_c - \mu_{c\theta}(c\xi_{c\theta}) \sin \theta_c, \quad \mu_{c2}(c\xi_{c2}) = \mu_{cr}(c\xi_{cr}) \sin \theta_c + \mu_{c\theta}(c\xi_{c\theta}) \cos \theta_c \\ \mu_{c3}(c\xi_{c3}) &= \mu_{cz}(c\xi_{cz}) \quad (\rho_c \text{ 上}) \dots\dots\dots(22)\end{aligned}$$

なる関係が成立する。

数値計算のために、き裂面 S_c を、 i 番目の要素の中点、端点、区間長さが、それぞれ、 $\vec{q}_{ci}, \vec{q}_{ci\pm(1/2)}, h_{ci}$ である、 m_c 個の円輪要素に分割し、各要素内で面密度およびベクトル密度の円柱座標系成分を一定とする。S または $S_{c\pm}$

上の一点 $\vec{p}$ を固定点とする S_c 上の一円輪要素に関する面積分 ΔI_{ci} は、 $\vec{p} \neq \vec{q}_{ci}$ のとき円輪要素内の 5 分点での周積分値 $f_1 \sim f_5$ および重み $w_1 \sim w_5$ によって、また、 $\vec{p} = \vec{q}_{ci}$ のとき一円輪要素を図 2 に示すように扇形要素と部分円輪要素に分割し、部分円輪要素内の 5 分点での線積分値 $g_1 \sim g_5$ および重み $w_1 \sim w_5$ と扇形要素に関する特異面積分 ΔH_{ci} とによって

$$\Delta I_i = \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^5 w_k f_k \quad (\vec{p} \neq \vec{q}_{ci})$$

$$\Delta I_i = \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^5 w_k g_k + \Delta H_{ci} \quad (\vec{p} = \vec{q}_{ci})$$

(S_c 上).....(23)

なるガウス・ルジャンドルの積分公式により数値的に求められる。ここで、 $\Delta \theta_c = h_{ci}/\rho_{ci}$ ($\rho_{ci} = \overline{oq_{ci}}$) とした。周積分 f および部分周積分 g においては、常に $\vec{p} \neq \vec{q}_{ci}$ であって、積分核に特異性は生じず、一般的に、

$$A_i = x_1^2 + \rho_{ci}^2 + (x_3 - x_{3ci})^2$$

$$B_i = 2x_1 \rho_{ci} \dots \dots \dots (24)$$

として

$$\int_{\Delta \theta_{ci}/2}^{2\pi - \Delta \theta_{ci}/2} \cos^{n_1} \theta_c (A_i - B_i \cos \theta_c)^{-n_2/2} \rho_{ci} d\theta_c$$

.....(25)

なる形で表される。ただし、 f の場合には $\Delta \theta_c = 0$ である。結局、積分(25)は

$$2\rho_{ci} B_i^{-n_1} \sum_{k=0}^{n_1} (-1)^k \binom{n_1}{k} A_i^{n_1-k} (A_i + B_i)^{(2k-n_2)/2}$$

$$\times \int_{\Delta \theta_{ci}/2}^{\pi} \{1 - e_i^2 \cos^2(\theta_c/2)\}^{(2k-n_2)/2} d\theta_c$$

.....(26)

のように求められる。ここで $e_i^2 = 2B_i/(A_i + B_i)$ である。また、この中の積分

$$E_n = \int_{\Delta \theta_{ci}/2}^{\pi} \{1 - e_i^2 \cos^2(\theta_c/2)\}^{-n/2} d\theta_c \dots \dots \dots (27)$$

は、 $e_i^2 \neq 1$ のとき

$$E_n = \{(n-3)(e_i^2-2)E_{n-2} + (n-4)E_{n-4}$$

$$+ 2e_i^2 v \sqrt{(1-v^2)/(1-e_i^2 v^2)^{n-2}}\} / \{(n-2)(e_i^2-1)\}$$

.....(28)

図 2 特異積分領域の細分 (平面き裂の例)

なる漸化式によって、第一種だ円積分 ($n=1$) および第二種だ円積分 ($n=-1$) に帰着される。ここで $v = \cos(\Delta \theta_c/4)$ である。また、 $\Delta \theta_c = 0$ の場合第一種および第二種完全だ円積分となる。

さらに、特異積分 ΔH_{ci} は、境界 S_c の法線に沿った $\vec{P} \rightarrow \vec{p}_{c\pm}$ なる通常の極限操作によって、

$$\int_0^\pi \{a(\phi)\}^{n'} \cos^{n''} \phi d\phi \dots \dots \dots (29)$$

または

$$\int_0^\pi \ln \{a(\phi)\} \cos^{n''} \phi d\phi \dots \dots \dots (30)$$

なる線積分に帰着され、積分区間を m_s 分割して台形則により数値的に求められる。

き裂面以外の境界 S についても同様に数値面積分を行う。

すなわち、最終的に、この問題の数値解析は S および S_c 上の、それぞれ、 m および m_c 個の点 $\vec{p}_j$ に関する条件を満たすように S 上の m 個の σ_i および S_c 上の m_c 個の σ_{ci} と $c\lambda_{ci}$ (電流解析) または S 上の m 個の $\vec{\mu}$ および S_c 上の m_c 個の $\vec{\mu}_{ci}$ と $c\vec{\xi}_{ci}$ (応力解析) を求める選点法となる。なお、ここでは、各区間の中点 $\vec{q}_i$ および $\vec{q}_{ci}$ を選点 $\vec{p}_j$ とする。

4. 数 値 解 析

一例として、図 3 に示すとき外直径 $2a$ 、内直径 $2b$ の円環状き裂を有する無限体に磁束密度 H_0 の一様な x_3 軸方向磁場と無限遠方で x_3 軸方向定常電流 J_0 が作用する場合の解析を行う。このとき、き裂の存在により擾乱された電流場と磁場との相互作用により、き裂先端に特異ねじり応力を生ずる。取扱った寸法比は $b/a = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ の 9 種類である。

問題の対称性により、考慮すべき面密度および面密

図 3 解析形状：円環状き裂を有する無限体

度ベクトル成分は $c\lambda_c$ および $c\xi_c$ のみで良い。また、面密度および選点などは $x_3 \geq 0$ のみで定義することにより $x_3 < 0$ では対称性によって決定できる。さらに取扱うき裂形状から、式(16)などのき裂面法線ベクトル $\hat{n}_{qc}$ の成分は $n_{qc1} = n_{qc2} = 0$ である。

応力拡大係数の決定には、き裂先端近傍での応力による外挿法を用いた。ここでは、 r の二次項までを考慮した

$$\tau_{32}\sqrt{2r} = K_{III} + (\alpha_1 r + \alpha_2 r^2)$$

なる二次回帰曲線近似を用いた外挿法⁽⁷⁾ によって応力拡大係数を求めた。

数値計算を終了するための解析精度の判定は、き裂面 S_c についての分割数 m_c の増大に伴う解の収束によって行った。

5. 結 果

以下に解析結果を示す。本解析においては、特異積分領域分割数 $m_s = 150$ とした。これによる特異積分の精度は十分に高いものである⁽⁸⁾。

5.1 円板状き裂 まず始めに $b/a = 0.0$ の場合について、図4に無次元化応力拡大係数 $F_{III} = K_{III}/(H_0 J_0 a^{3/2})$ の外挿例を示す。き裂面分割数 $m_c = 100$ である。外挿線と縦軸 ($r/a = 0$) との交点が F_{III} の値である。ここでの外挿範囲は、き裂先端近傍での数値計算の誤差が大きいため、 $0.1 \leq r/a \leq 0.2$ とし、この区間で等間隔にとった11点での値を用いた。また、表1に m_c の増大に伴う F_{III} の収束状況および厳密解⁽²⁾

図4 無次元化応力拡大係数 F_{III} の外挿例 ($b/a = 0.0, m_c = 100$)

($F_{III}^0 = 0.1061$) との誤差, $\text{Error} = |F_{III}^0 - F_{III}|/F_{III}^0 \times 100$ (%) を示す。これより、 $m_c = 100$ で計算値は収束しているものと考えられる。このとき、 $F_{III} = 0.1067$ であり、厳密解との誤差は1%以内であった。さらに、図5に、無次元き裂面電位 $\phi/(J_0 a/\kappa)$ および無次元き裂面変位 $u_2/(h_0 J_0 a^2/G)$ を示してある。き裂面変位の厳密解⁽²⁾ を細線で併記するが、両者は良く一致している。

5.2 円環状き裂 表2および図6に、無限体中の種々の内外径比 b/a に対するき裂外側・内側先端での無次元化応力拡大係数 $F_{IIIi} = K_{IIIi}/(H_0 J_0 a^{3/2})$ および $F_{IIIo} = K_{IIIo}/(H_0 J_0 a^{3/2})$ を示す。また、図7および図8に、 $b/a = 0.2$ および 0.4 の場合の無次元き裂面電位および無次元き裂面変位を示す。これより、 b/a の増大に伴って、 F_{IIIo} は単調に減少し、 $|F_{IIIi}|$ は増大の後減少する傾向にあることが示されている。また、内側および外側き裂先端近傍でのき裂面変位は互いに逆方向であることがわかる。

6. ま と め

本報では、岸田ら⁽⁷⁾ が以前示した一重層および二重層ポテンシャルを用いた間接境界積分法によって、円輪状き裂を有する電導体の電磁弾性特異応力解析を行

表1 き裂面分割数 m_c の増大に伴う F_{III} の収束および厳密解との比較 ($b/a = 0.0$)

	Number of subdivisions, m_c			
	50	75	100	125
F_{III}	0.1091	0.1076	0.1067	0.1060
Error(%)	2.8	1.4	0.6	0.1
F_{III}^e	0.1061

図5 き裂面電位および変位 ($b/a = 0.0$)

表 2 無次元化応力拡大係数の値

b/a	F_{m0}	F_{mi}
0.0	1.067×10^{-1}	$\times 10^{-1}$
0.1	0.9387	*****
0.2	0.7946	-0.2292
0.3	0.6501	-0.2503
0.4	0.5107	-0.2392
0.5	0.3804	-0.2106
0.6	0.2631	-0.1708
0.7	0.1621	-0.1240
0.8	0.0811	-0.0745

図 6 b/a に対する F_{m0} , F_{mi} の変化 図 7 き裂面電位および変位 ($b/a=0.2$) 図 8 き裂面電位および変位 ($b/a=0.4$)

った。取扱った例題は無限体中のき裂に垂直な磁場を受け、き裂に垂直な電流の流れる基本的な問題である。この解法によって求められた応力拡大係数およびき裂面変位の精度は、厳密解と比較することにより、十分に高いものであることがわかった。これより、三次元電磁弾性問題に対する層ポテンシャルを用いた本解法の有用性が示された。

文 献

- (1) Shindo, Y., *Z. Angew. Math. Mech.*, **62**-11 (1982), 599.
- (2) Shindo, Y., *Eng. Fract. Mech.*, **23**-6 (1986), 977.
- (3) Shindo, Y. and Takeuchi, A., *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **8**-3 (1987), 213.
- (4) 竹内・進藤・渥美, 機論, **54**-497, A (1988), 78.
- (5) 進藤・田村, 機論, **55**-514, A (1989), 1328.
- (6) 矢川・吉村, 機械の研究, **35**-3 (1983), 359.
- (7) 岸田・佐々木・石田・野口, 機論, **53**-489, A (1987), 878.
- (8) 岸田・佐々木・町野, 機論, **57**-533, A (1991), 181.
- (9) Stippes, M. and Rizzo, F., *Z. Angew. Math. Phys.*, **28** (1977), 339.