球かを有する半無限体の軸対称接触問題*

秋 山 孝 夫^{*1}, 原 利 昭^{*2}
渋谷 寿 一^{*3}, 小 泉 堯^{*3}An Axisymmetric Contact Problem of an Elastic Half-Space
with a Spherical CavityTakao AKIYAMA, Toshiaki HARA,
Toshikazu SHIBUYA and Takashi KOIZUMI

The problem of a smooth circular punch penetrating an elastic half-space with a spherical cavity is considered. The solution, which accounts for the disturbances in the contact stress distribution under the punch due to the subsurface cavity, is carried out within the classical theory of elasticity. The mixed boundary-value problem is reduced first to a pair of dual integral equations, and then to an infinite system of simultaneous equations. The results are presented, illustrating the dependence of the contact stress disturbance upon the geometrical parameter of the punch.

Key Words: Elasticity, Computational Mechanics, Contact Problem, Elastic Half-Space, Circular Punch, Spherical Cavity, Stress Singularity

1. 結 言

剛体パンチを弾性体表面に押し込む弾性接触問題は、古典弾性問題の一つとして数多くの研究者によって扱われ、得られた結果は種々の分野で利用されている。最近では、関節軟骨の特性⁽¹⁾や関節内の力の伝達メカニズム⁽²⁾を解明する整形外科バイオメカニクスの研究にもこの種の考え方が適用されているのをはじめ、その他のさまざまな分野⁽³⁾においても応用例が見られる。

従来扱われてきた円柱、円すい、球状等の剛体パンチを半無限弾性体表面に押し込む“パンチ問題”では、ハンケル変換法を利用した Harding ら⁽⁴⁾や Sneddon⁽⁵⁾の解法が、また、半無限体が横等方性の場合の Elliott⁽⁶⁾および Deutsch⁽⁷⁾の解法が知られている。

一方、弾性体内部に球かや介在物を含む“パンチ問題”の研究は種々の多孔質体や粒子分散形複合材料の

強度評価に関連したマイクロメカニクスの観点からも重要であるが、理論的解析例は極めて少ないようである。例えば、円孔または円形剛体介在物を有する半無限板表面を剛体円柱で押付ける二次元問題を Miller ら⁽⁸⁾が扱い、接触応力分布を明示している。また、三次元問題では Rukhovets ら⁽⁹⁾が球かまたは球状剛体介在物を有する半無限体表面に接着した円柱状剛体パンチをねじる問題を扱い、双極座標を用いて第二種フレドホルム形積分方程式の解法問題に帰着させる解法を提案しているが数値結果は全く示されていない。この種の混合境界値問題に対して数値的解法の適用も考えられるが、数値結果が比較的容易で精度良く得られる理論的解析法を提案することも重要である。

このような観点から本研究では球かを有する半無限弾性体表面を円柱状剛体パンチで押し込む場合を解析した。解析では、著者らが先に示した解法⁽¹⁰⁾と土田ら^{(11)~(13)}の解法を組合せ、球および円柱調和関数の相互関係式を利用するとともにパンチ接触部の応力を級数表示することによってこの問題を簡単な無限連立一次方程式を解く問題に帰着する方法を用いた。数値計算を行って接触応力や球か面の応力を明示するとともにこれらに及ぼす球か深さおよび球か半径の影響を明らかにした。さらには、半無限体中に球かがない場合

* 平成2年9月23日 第68期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成3年5月13日。

^{*1} 正員、新潟大学大学院 (〒950-21 新潟市五十嵐2の町 8050)。

^{*2} 正員、新潟大学工学部。

^{*3} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

の結果も併せて示し、球かによる応力場の乱れ等を示した。

2. 応力解析

円柱座標 (r, θ, z) における変位成分と応力成分を各々 $(u_r, v_\theta, w_z), (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ とする。ねじりのない軸対称応力状態における境界条件のみに関係する変位と応力成分は Boussinesq の調和応力関数 φ_0, φ_3 を用いて次の様に表示できる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gw_z &= \partial\varphi_0/\partial z + z\partial\varphi_3/\partial z - (3-4\nu)\varphi_3 \\ \sigma_z &= \partial^2\varphi_0/\partial z^2 + z\partial^2\varphi_3/\partial z^2 \\ &\quad - 2(1-\nu)\partial\varphi_3/\partial z \\ \tau_{rz} &= \partial^2\varphi_0/(\partial r\partial z) + z\partial^2\varphi_3/(\partial r\partial z) \\ &\quad - (1-2\nu)\partial\varphi_3/\partial r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比である。

また、球座標 (R, θ, φ) における変位と応力成分を $(u_R, v_\theta, w_\varphi), (\sigma_R, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \tau_{R\varphi}, \tau_{\theta\varphi}, \tau_{R\theta})$ とすれば、境界条件のみに関係する変位と応力成分は次式で表示できる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \partial^2\varphi_0/\partial R^2 + R\mu\partial^2\varphi_3/\partial R^2 \\ &\quad - 2(1-\nu)\mu\partial\varphi_3/\partial R + 2\nu\bar{\mu}\partial\varphi_3/(R\partial\varphi) \\ \tau_{R\varphi} &= \partial^2\varphi_0/(R\partial R\partial\varphi) - \partial\varphi_0/(R^2\partial\varphi) \\ &\quad + (1-2\nu)\bar{\mu}\partial\varphi_3/\partial R + \mu\partial^2\varphi_3/(\partial R\partial\varphi) \\ &\quad - 2(1-\nu)\mu\partial\varphi_3/(R\partial\varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

図 1 押し込みを受ける球かを有する半無限体

ここで、 $\mu = \cos \varphi$, $\bar{\mu} = \sin \varphi$ である。

図 1 に示すように、半径 b の球かを有する半無限体表面を半径 a の円柱状剛体パンチで微量 ε_0 だけ押し込む場合を解析する。球か中心 O と半無限体表面の距離を h とし、パンチと半無限体は滑らかに接触しているものとするれば、境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad (w_z)_{z=-h} &= \varepsilon_0 \quad (0 \leq r \leq a) \\ \text{(ii)} \quad (\sigma_z)_{z=-h} &= 0 \quad (a < r) \\ \text{(iii)} \quad (\tau_{rz})_{z=-h} &= 0 \quad (0 \leq r) \\ \text{(iv)} \quad (\sigma_R)_{R=b} &= 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \text{(v)} \quad (\tau_{R\varphi})_{R=b} &= 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ \text{(vi)} \quad &\text{無限遠方ですべての応力は消失} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

境界条件(vi)を考慮して φ_0, φ_3 を次のように選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\zeta\varphi_0}{\varepsilon_0} &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} f(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \sum_{n=0}^\infty A'_n \frac{P_n(\mu)}{R^{n+1}} \\ \frac{\zeta\varphi_3}{\varepsilon_0} &= \int_0^\infty g(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \sum_{n=0}^\infty B'_n \frac{P_n(\mu)}{R^{n+1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\zeta = (1-\nu)/G$, $J_n(X)$ と $P_n(X)$ はそれぞれ n 次の第一種ベッセル関数およびルジャンドル関数であり、 $f(\lambda), g(\lambda)$ は λ のみの未知関数、 A'_n, B'_n は n に関する未知係数である。

境界条件 (i) ~ (iii) および公式⁽¹¹⁾

$$\frac{P_j(\mu)}{R^{j+1}} = \frac{(-1)^j H(-z) + H(z)}{j!} \int_0^\infty \lambda^j J_0(\lambda r) e^{-\lambda|z|} d\lambda \quad (z \neq 0) \dots\dots\dots (5)$$

を考慮して式(4)を書き換えれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\zeta\varphi_0}{\varepsilon_0} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\lambda} f(\lambda) e^{-\lambda z} + \sum_{n=0}^\infty A'_n \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n e^{\lambda z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \\ \frac{\zeta\varphi_3}{\varepsilon_0} &= \int_0^\infty \left\{ g(\lambda) e^{-\lambda z} + \sum_{n=0}^\infty B'_n \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n e^{\lambda z} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} (z < 0) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $H(X)$ はヘビサイドのステップ関数である。

式(1)と式(6)によって得られる τ_{rz} に境界条件(iii)を適用すれば、次式を得る。

$$f(\lambda) = g(\lambda)(2\nu - 1 + \lambda h) + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n e^{-2\lambda h} \{A'_n \lambda - B'_n(1 - 2\nu + \lambda h)\} \dots\dots\dots (7)$$

式(7)を考慮するとともに式(1)と(6)による変位と応力に境界条件(i), (ii)を適用すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{(w_z)_{z=-h}}{\varepsilon_0} &= - \int_0^\infty \left\{ g(\lambda) e^{\lambda h} + \sum_{n=0}^\infty B'_n \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n e^{-\lambda h} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda = 1 \quad (0 \leq r \leq a) \\ \frac{\zeta(\sigma_z)_{z=-h}}{\varepsilon_0} &= \int_0^\infty \left[g(\lambda) e^{\lambda h} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n e^{-\lambda h} \{ 2A'_n \lambda + B'_n (4\nu - 3 - 2\lambda h) \} \right] J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (a < r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

Busbridge⁽¹⁴⁾の公式を用いて式(8)を満足する $g(\lambda)$ を決定することもできるが、極めて煩雑となる。そこで、本研究では文献(10)で示した解法を拡張して適用し、式(8)を満足する $g(\lambda)$ を決定する。

パンチ接触部における $(\sigma_z)_{z=-h}$ はSneddon⁽¹⁵⁾の結果を参考にすれば、パンチ縁で $(a^2 - r^2)^{-1/2}$ の特異性を有し、それ以外では有限かつ連続であると考えられる。したがって、 $(\sigma_z)_{z=-h}$ は未知係数 a_n ($n=0, 1, \dots$)を用いて次のように級数表示できる。

$$\frac{\zeta(\sigma_z)_{z=-h}}{\varepsilon_0} = - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{T_{2n+1}(r/a)}{r(a^2 - r^2)^{1/2}} \quad (0 \leq r < a) \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $T_n(X)$ は n 次のチェビシェフ多項式である。式(8)の第2式と式(9)を用いてハンケル逆変換し、積分公式⁽¹⁰⁾を利用すれば $g(\lambda)$ は次式で与えられる。

$$g(\lambda) = - \sum_{n=0}^\infty [a_n M_n(\lambda) + N_n(\lambda) \{ 2A'_n \lambda - B'_n (3 - 4\nu + 2\lambda h) \}] e^{-\lambda h} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$M_n(\lambda) = J_{n+1/2}(\lambda a/2) J_{-n-1/2}(\lambda a/2), \quad N_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n e^{-\lambda h} / n! \dots\dots\dots (11)$$

式(10)は任意の a_n, A'_n, B'_n に対して $(\sigma_z)_{z=-h}$ の境界条件を常に満足する。そこで、式(10)を式(8)の第一式に代入すれば次式を得る。

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty [a_n M_n(\lambda) + 2N_n(\lambda) \{ A'_n \lambda - B'_n (2 - 2\nu + \lambda h) \}] J_0(\lambda r) d\lambda = 1 \quad (0 \leq r \leq a) \dots\dots\dots (12)$$

式(12)は r の領域で r に無関係に成立しなければならない。そこで、式(12)にゲーゲンバウアーの加法定理⁽¹⁶⁾を用いることにより次式を得る。

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty [a_n M_n(\lambda) + 2N_n(\lambda) \{ A'_n \lambda - B'_n (2 - 2\nu + \lambda h) \}] \sum_{m=0}^\infty (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda) \cos 2m\phi d\lambda = 1 \quad (0 \leq \phi \leq \pi/2) \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカ・デルタであり、

$$\left. \begin{aligned} X_m(\lambda) &= J_m^2(\lambda a/2) \quad (m=0, 1, \dots) \\ \phi &= \sin^{-1}(r/a) \quad (0 \leq r \leq a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(13)は $0 \leq \phi \leq \pi/2$ を満足する任意の ϕ に対して成立することから両辺の $\cos 2m\phi$ に関する係数を等置すれば、次式を得る。

$$\sum_{n=0}^\infty [a_n \xi_{m,n} - 2A'_n (n+1) \eta_{m,n+1} - 2B'_n \{ 2(1-\nu) \eta_{m,n} - h(n+1) \eta_{m,n+1} \}] = \delta_{0m} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$\xi_{m,n} = \int_0^\infty X_m(\lambda) M_n(\lambda) d\lambda, \quad \eta_{m,n} = \int_0^\infty X_m(\lambda) N_n(\lambda) d\lambda \quad (m, n=0, 1, \dots) \dots\dots\dots (16)$$

次に、残りの境界条件(iv), (v)を考慮するために次の関係式⁽¹⁷⁾

$$J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{(\lambda R)^m}{m!} P_m(\mu) \dots\dots\dots (17)$$

および式(7), (10)を利用すれば、式(4)は次式のように球調和関数のみで表示できる。

$$\frac{\zeta \varphi_0}{\varepsilon_0} = \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{A'_m}{R^{m+1}} + \beta'_m R^m \right) P_m(\mu), \quad \frac{\zeta \varphi_3}{\varepsilon_0} = \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{B'_m}{R^{m+1}} + \gamma'_m R^m \right) P_m(\mu) \dots\dots\dots (18)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned}
\beta'_m &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \beta_{m,n}^1 + A'_n \beta_{m,n}^2 + B'_n \beta_{m,n}^3) \quad (m=1, 2, \dots) \\
\gamma'_m &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \gamma_{m,n}^1 + A'_n \gamma_{m,n}^2 + B'_n \gamma_{m,n}^3) \quad (m=0, 1, \dots) \\
\beta_{m,n}^1 &= (1-2\nu)I_{m-1,n}/m + hI_{m,n}, \quad \beta_{m,n}^2 = (3-4\nu)J_{m,n} + 2h(n+1)J_{m,n+1} \\
\beta_{m,n}^3 &= 4(1-\nu)(1-2\nu)\{\delta_{0n}J_{m-1,0}/m + (1-\delta_{0n})J_{m,n-1}/n\} - 2h^2(n+1)J_{m,n+1} \\
\gamma_{m,n}^1 &= I_{m,n}, \quad \gamma_{m,n}^2 = 2(n+1)J_{m,n+1}, \quad \gamma_{m,n}^3 = (3-4\nu)J_{m,n} - 2h(n+1)J_{m,n+1} \\
I_{m,n} &= \int_0^\infty N_m(\lambda)M_n(\lambda)d\lambda, \quad J_{m,n} = (-1)^{m+n}(m+n)!/(m!n!(2h)^{m+n+1})
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

式(2), (18)による変位と応力に境界条件(iv), (v)を適用すれば, 次式を得る.

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\zeta(\sigma_R)_{R=b}}{\varepsilon_0} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{A'_m}{b^{m+3}}(m+1)(m+2) + \frac{B'_{m-1}}{b^{m+1}} \frac{m(m^2+3m-2\nu)}{2m-1} + \frac{B'_{m+1}}{b^{m+3}} \frac{(m+1)(m+2)(m+5-4\nu)}{2m+3} \right. \\
&\quad \left. + \beta'_m b^{m-2}(m-1)m + \gamma'_{m-1} b^{m-2} \frac{(m-1)m(m+4\nu-4)}{2m-1} \right. \\
&\quad \left. + \gamma'_{m+1} b^m \frac{(m+1)(m^2-m-2\nu-2)}{2m+3} \right\} P_m(\mu) = 0 \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \\
\frac{\zeta(\tau_{R\phi})_{R=b}}{\varepsilon_0 \mu} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{A'_m}{b^{m+3}}(m+2) + \frac{B'_{m-1}}{b^{m+1}} \frac{m^2+2\nu-2}{2m-1} + \frac{B'_{m+1}}{b^{m+3}} \frac{(m+2)(m+5-4\nu)}{2m+3} + \beta'_m b^{m-2}(1-m) \right. \\
&\quad \left. + \gamma'_{m-1} b^{m-2} \frac{(m-1)(4-4\nu-m)}{2m-1} - \gamma'_{m+1} b^m \frac{m^2+2m+2\nu-1}{2m+3} \right\} P'_m(\mu) = 0 \quad (0 \leq \phi \leq \pi)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

式(20)において式(19)の第1, 2式を利用して β'_m, γ'_m を消去し, 両辺の $P_m(\mu), P'_m(\mu)$ に関する係数を等置するとともに式(15)を併せて考慮すれば, 次のような a_n, A_n, B_n に関する無限連立一次方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n Q_1(m, n) + A_n R_1(m, n) + B_n S_1(m, n)\} &= \delta_{0m} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n Q_2(m, n) + A_n R_2(m, n) + B_n S_2(m, n)\} &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \{a_n Q_3(m, n) + A_n R_3(m, n) + B_n S_3(m, n)\} &= 0
\end{aligned} \right\} (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots (21)$$

ここで, $A_n = -A'_n/b^{n+3}, B_n = -B'_n/b^{n+2}$ であり,

$$\left. \begin{aligned}
Q_1(m, n) &= \xi_{m,n}, \quad R_1(m, n) = 2b^{n+3}(n+1)\eta_{m,n+1}, \quad S_1(m, n) = 2b^{n+2}\{2(1-\nu)\eta_{m,n} - h(n+1)\eta_{m,n+1}\} \\
Q_2(m, n) &= b^{m-2}x^1(m, n), \quad R_2(m, n) = b^{m+n+1}x^2(m, n) + \delta_{mn}(m+1)(m+2) \\
S_2(m, n) &= b^{m+n}x^3(m, n) + \delta_{(m-1)n}m(m^2+3m-2\nu)/(2m-1) + \delta_{(m+1)n}(m+1)(m+2) \\
&\quad \times (m+5-4\nu)/(2m+3) \\
Q_3(m, n) &= b^{m-1}y^1(m, n), \quad R_3(m, n) = b^{m+n+2}y^2(m, n) - \delta_{(m+1)n}(m+3) \\
S_3(m, n) &= b^{m+n+1}y^3(m, n) - \delta_{mn}(m^2+2m+2\nu-1)/(2m+1) - \delta_{(m+2)n}(m+3)(m+6-4\nu)/(2m+5) \\
x^i(m, n) &= (m-1)m\beta_{m,n}^i + (m-1)m(m+4\nu-4)\gamma_{m-1,n}^i/(2m-1) + b^2(m+1)(m^2-m-2\nu-2)\gamma_{m+1,n}^i \\
&\quad / (2m+3) \\
y^i(m, n) &= m\beta_{m+1,n}^i + m(m+4\nu-3)\gamma_{m,n}^i/(2m+1) + b^2(m^2+4m+2\nu+2)\gamma_{m+2,n}^i/(2m+5) \quad (i=1, 2, 3)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

式(21)を解いて a_n, A_n, B_n を決定すれば, 式(1), (4)~(7), (10)より変位と応力が求められる.

なお, 本問題における $A_n = B_n = 0$ の特別な場合には式(21)に対応して得られる無限連立一次方程式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi_{m,n} = \delta_{0m} \quad (m=0, 1, \dots) \dots\dots\dots (23)$$

となる⁽¹⁸⁾. 式(23)を解けば a_n は $a_0 = a, a_n = 0 \ (n \geq 1)$ となり, 半無限体表面を半径 a の円柱状剛体パンチで押し込む場合の結果⁽⁴⁾⁽¹⁵⁾ に一致する.

3. 半無限体表面および球か面の変位と応力

半無限体表面 ($z = -h$) 上の変位と応力は級数形, 数値積分適用項およびベッセル関数に関する積分公式⁽¹⁹⁾ を利用する項に分離した形で表示できる. ここでは, w_z と σ_z に限って示すことにすれば次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{(w_z)_{z=-h}}{\varepsilon_0} &= H(a-r) + H(r-a) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \left\{ M_n(\lambda) - \frac{2}{\pi \lambda a} \sin \lambda a \right\} J_0(\lambda r) d\lambda + \frac{2}{\pi a} \sin^{-1} \frac{a}{r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n b^{n+3} \frac{(-1)^n}{n!} L_{n+1}(r) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n b^{n+2} \frac{(-1)^n}{n!} \{2(1-\nu)L_n(r) + hL_{n+1}(r)\} \right] \\ \frac{\zeta(\sigma_z)_{z=-h}}{\varepsilon_0} &= -\frac{2}{\pi} H(a-r) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{T_{2n+1}(r/a)}{r(a^2-r^2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

ここで,

$$L_n(r) = \frac{n!}{(h^2+r^2)^{(n+1)/2}} P_n\left(\frac{h}{(h^2+r^2)^{1/2}}\right) \dots\dots\dots (25)$$

球か面 ($R=b$) における変位や応力は式(18)より得られる表示式に $R=b$ と置けば与えられる。特に σ_θ のみを示すことにすれば, $\beta_m = -\beta'_m b^{m-2}$, $\gamma_m = -\gamma'_m b^{m-1}$ と置いて次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(\sigma_\theta)_{R=b}}{\varepsilon_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \{(m+1)(m+2)P_m(\mu) - P_{m+1}(\mu)\} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{(2m+1)} \{(m+1)(m^2-m+1-2\nu)\} P_{m+1}(\mu) \\ &\quad + m(m+1)(m+4-4\nu)P_{m-1}(\mu) - (2m+1)P'_m(\mu) \} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_m \{(m^2+m+1)P_m(\mu) - P_{m+1}(\mu)\} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_m \frac{1}{2m+1} \{m(m+1)(m-3+4\nu)P_{m+1}(\mu) + m(m^2+3m+3-2\nu)P_{m-1}(\mu) - (2m+1)P'_m(\mu)\} \dots (26) \end{aligned}$$

パンチを ε_0 だけ押し込むのに要する全荷重 P は式(24)の第2式を用いて次式で表示できる。

$$P = -2\pi \int_0^a (\sigma_z)_{z=-h} r dr = \frac{4\varepsilon_0}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{2n+1} \dots\dots\dots (27)$$

半無限体表面上の σ_z は式(24)の第2式よりパンチ縁で特異性を有し, これを評価するために次式で定義する係数 K_z を導入する⁽²⁰⁾⁽²¹⁾。

$$K_z = \lim_{r \rightarrow a-0} \{2\pi a(a-r)\}^{1/2} \zeta |(\sigma_z)_{z=-h}| / \varepsilon_0 \dots\dots (28)$$

式(24)の第2式と式(28)より K_z は次式で表示できる。

$$K_z = \frac{2}{\pi^{1/2} a} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dots\dots\dots (29)$$

4. 数 値 結 果

a_n, A_n, B_n を決定するにあたって式(16), (19)における無限積分 $\xi_{m,n}, \eta_{m,n}, I_{m,n}$ を直接数値積分する項とベッセル関数の漸近展開式を利用する項に分離して計算した。 a_n, A_n, B_n の収束性はパラメータ h/a と

b/a に依存するため, これら種々の値に対して応力や係数 K_z が十分な精度で収束することを確認して項数を決定した。例えば, 比較的収束の遅い $b/a=1.5, h/a=2.3$ の場合にはいずれの項数も17項程度, $b/a=1.7, h/a=2.5$ の場合には20項程度考慮すれば, 応力値および K_z の値は4けた程度一致することやその他の場合も同様な精度で収束することを確認して項数を決定した。また, 以下で論ずる変位と応力はそれぞれ ε_0 と $\varepsilon_0/(\zeta a) = G\varepsilon_0/[(1-\nu)a]$ による無次元量であり, これらに基づく諸量を含めて“*”を付して表示した。さらには, 応力状態に及ぼす球かの影響を論ずるために半無限体中に球かがない場合 ($h/a=\infty$ および $b/a=0$ の場合に相当) の変位や応力は“-”を付して区別し, 特に図2と図3においてはこれらを破線により示した。

図2はポアソン比 $\nu=0.3, b/a=1.5, h/a=2.5$ とした場合の w_z^* の半径方向分布図である。半無限体内部の $-0.95 \leq z/h \leq -0.7, r/a \leq 1.3$ において $w_z^* > \bar{w}_z$ であり, $r=0$ で w_z^* は最大となって $w_z^* > 1$ となる。すなわ

図2 w_z^* の分布 ($b/a=1.5, h/a=2.5$)

図3 σ_z^* の分布 ($b/a=1.5, h/a=2.5$)

ち、球かが存在するために $r=0$ での z 方向変位がパンチ押付け量より大きくなることを示している。半無限体表面における w_z^* の半径方向こう配は球かがない場合と同様にパンチ縁 ($r=a^+$) で無限大となる。

図3は図2の w_z^* に対応する σ_z^* の分布図である。半無限体内部の $-0.95 \leq z/h \leq -0.7$, $r < 1.2$ において $|\sigma_z^*| < |\bar{\sigma}_z|$ となり、パンチ中心 ($r=0$) に向かうほどこ

図4 $(\sigma_z^*)_{z=-h}$ の分布 ($b/a=1.5$)

図5 $(\sigma_z^*)_{z=-h}$ の分布 ($h/a=2.5$)

図6 $(\sigma_\phi^*)_{R=b}$ の分布 ($b/a=1.5$)

れらの差は大きくなって球かの影響を強く受ける。

図4は球か半径を一定 ($b/a=1.5$) とした場合の種々の h/a に対するパンチ接触部における $(\sigma_z^*)_{z=-h}$ の分布図である。 $(\sigma_z^*)_{z=-h}$ は h/a が小さくなって球かが半無限体表面に接近するほど小さくなり、 $(\sigma_z)_{z=-h}$ との差は大きくなる。 $h/a \geq 7$ であれば $(\sigma_z^*)_{z=-h}$ は $(\bar{\sigma}_z)_{z=-h}$ にほぼ一致して球かの影響は消失する。

図5は球か深さを一定 ($h/a=2.5$) とした場合の種々の b/a に対するパンチ接触部の $(\sigma_z^*)_{z=-h}$ の分布図である。 $(\sigma_z^*)_{z=-h}$ はいずれの b/a の場合にもパンチ中心で最小となり、球か半径が大きくなるほどこの最小値は小さくなるが、 $b/a \leq 1.7$ の場合には常に $(\sigma_z^*)_{z=-h} < 0$ となって圧縮応力である。また、いずれの b/a に対してもパンチ縁 ($r=a^-$) で $(\sigma_z^*)_{z=-h}$ は無限大になり、 b/a が大きくなるとともにパンチ縁の影響は局部的になる。 $b/a \leq 0.5$ であれば $(\sigma_z^*)_{z=-h} \approx (\bar{\sigma}_z)_{z=-h}$ となって球かの影響は消失する。

図6と図7はそれぞれ種々の h/a および b/a に対する球か面における $(\sigma_\phi^*)_{R=b}$ の ϕ 方向分布をそれぞれ示した図である。図6において $2.3 \leq h/a \leq 7$ の場合の $(\sigma_\phi^*)_{R=b}$ はいずれも $110^\circ < \phi < 140^\circ$ で最大圧縮応力となり、その最大値は h/a が小さくなるほど大きくなって球かの影響を強く受ける。他方、 $h/a \geq 2.5$ の場合には点A ($\phi=180^\circ$) で最大引張応力を生ずる。

図7は $h/a=2.5$ の場合の種々の b/a に対する $(\sigma_\phi^*)_{R=b}$ の分布図である。最大圧縮応力は b/a の増加とともに大きくなり、その生ずる位置は $\phi=90^\circ$ 側から $\phi=135^\circ$ 側へ移動する。また、 $b/a \leq 1.5$ ならば点Aで最大引張応力となる。

図8は種々の b/a に対するパンチ押付け力の h/a による変化を示した図である。 $b/a=0$ は球かがない場合の結果に相当し、 h/a に関係なく $\bar{P}=1$ となる。いずれ

図7 $(\sigma_\phi^*)_{R=b}$ の分布 ($h/a=2.5$)

の b/a に対しても $P^* \leq \bar{P}$ となり, $h/a > 6.5$ ならば $P^* \approx 1$ となって球かの影響は消失する。

図9は種々の h/a に対するパンチ押付け力の b/a による変化を示した図である。 $h/a = \infty$ は球かがない場合に相当し, この場合 $\bar{P} = 1$ となる。いずれの h/a に対しても $b/a \leq 0.5$ ならば $P^* = \bar{P}$ となって球かの影響は消失する。

図10は式(29)に基づく K_x の h/a の関係を示した図である。いずれの b/a に対しても K_x は下に凸の曲線を呈して最小値を有し, $h/a > 6.5$ では K_x にほぼ一致して球かの影響は消失する。

図11は種々の h/a に対する K_x と b/a の関係を示した図である。いずれの h/a (≥ 2.5) に対しても $b/a \leq 0.5$ ならば K_x は球かがない場合の結果にほぼ一致し, 球かの影響は消失する。

5. 結 言

球かを有する半無限体表面を円柱状剛体パンチで押し込む場合を三次元弾性論に基づいて解析し, 接触圧

力や球か面における応力分布等を示すとともにこれらに及ぼす球か深さおよび球かの大さの影響を調べた。さらには, 半無限体中に球かがない場合の結果と比較することにより応力場に及ぼす球かの影響を明示した。結果を要約すれば次のようになる。

(1) 球かの深さおよび径の大きさによっては半無限体内部の表面近傍における垂直変位はパンチ押し込み量より大きくなり, パンチ中心軸上 ($r=0$) でその変位は最大になる。

(2) $b/a \leq 1.5$ の場合のパンチ押付け荷重 P^* は球か深さを示すパラメータ値が $h/a \geq 7$ であればほぼ球かの影響を受けず $P^* \approx 1$ となる。他方, $h/a \geq 2.5$ の場合の P^* は $b/a \leq 0.5$ であればほぼ球かの影響は消失する。

(3) パンチ縁の応力特異性を評価する係数 K_x はいずれの b/a の場合においても最小値を有し, h/a が大きくなるとともに増加して球かがない場合の値 $2/\pi^{1/2}$ に漸近する。

図8 P^* の h/a による変化

図9 P^* の b/a による変化

図10 K_x の h/a による変化

図11 K_x の b/a による変化

文 献

- (1) Eberhardt, A. W., ほか 3 名, *J. Biomech. Eng.*, **112** (1990), 407.
- (2) Greenwald, A. S. and O'Connor, J. J., *J. Biomech.*, **4** (1971), 507.
- (3) 山口・ほか 2 名, 機論, **54**-502, C(1988), 1357.
- (4) Harding, J. W. and Sneddon, I. N., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **41**(1945), 16.
- (5) Sneddon, I. N., *Int. J. Eng. Sci.*, **3**(1965), 47.
- (6) Elliott, H. A., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **45**(1949), 621.
- (7) Deutsch, E., *Bull. Acad. Pol. Sci. Class. Quart.*, **11** (1963), 311.
- (8) Miller, G. R. and Keer, L. M., *J. Appl. Mech.*, **50**(1983), 615.
- (9) Rukhovets, A. N. and Ufliand, Ia. S., *PMM*, **32**-1 (1968), 167.
- (10) 原・ほか 3 名, 機論, **55**-516, A(1989), 1800.
- (11) 土田・中原, 機論, **35**-276(1969), 1607.
- (12) 土田・中原, 機論, **37**-297(1971), 843.
- (13) Tsuchida, E., ほか 2 名, *Theor. Appl. Mech.*, **23**(1973), 531.
- (14) Busbridge, I. W., *Proc. London Math. Soc.*, **44**(1938).
- (15) Sneddon, I. N., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **42**(1946), 29.
- (16) 森口・ほか 2 名, 数学公式(III), (1963), 218, 岩波書店.
- (17) Morse, P. M. and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, Part II(1953), 1318, McGraw-Hill.
- (18) Shibuya, T., ほか 2 名, 文献(13)の 523 ページ.
- (19) Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, (1965), 711, 744, Academic Press.
- (20) 野田・阿部, 機論, **49**-444, A(1983), 952.
- (21) Gecit, M. R., *Int. J. Eng. Sci.*, **24**(1986), 1245.