非線形殻理論に基づく板の剛体接触問題の弾塑性有限要素解析*

 C^0 連続殻有限要素による陰解法解析仲町 英 治^{*1}, 北川 浩^{*1}Nonlinear Shell Elastic-Plastic Finite-
Element Analyses of Rigid Body Contact Problems
(C^0 Continuity Shell Finite-Element
and Implicit-Type Formulation)

Eiji NAKAMACHI and Hiroshi KITAGAWA

The nonlinear shell finite-element (FE) model is newly developed to investigate the bending effects in large deformation and strain of plates in contact with the arbitrarily shaped rigid body. The C^0 continuity shell model, named the modified Mindlin shell, is employed. The flat shell element is assumed to have constant in-plane strain in each layer, divided in the thickness direction. The other features of FE analyses are implicit-type updated Lagrangian formulation, Hill's normal anisotropy elastic-plastic model, Coulombic friction law, and the Newton-Raphson method to solve the nonlinear equation. The bending effect on the deformation has been demonstrated in the case of rectangular plates stretched by the hemispherical rigid punch.

Key Words : Mindlin Shell Finite Element, Nonlinear Contact Problem, C^0 Continuity, Normal Anisotropy, Elastic-Plastic Theory, Coulombic Friction Law

1. 緒 言

現在、自動車産業における板成形シミュレーション手法の開発は、生産工程設計のための CAD/CAM/C AE システムの構築と関連して、最も重要な研究開発課題となっている。さらに、構造解析の分野では、各種板殻構造体の接触破断問題の解析は安全設計基準の確立と関連して重要な課題である。

これまで、非線形殻理論に基づく有限要素解析が数多く示されてきたが、薄板の大ひずみ大変形問題を、曲げの影響を効率良く、さらに精度良く考慮した有限要素解析手法の提案は少ないと考える。^{(1)~(6)} ここで取り上げた板殻体の剛体接触問題では、板殻体の材料学的および幾何学的非線形に加えて、接触面の相対滑り変形依存および接触摩擦則に関する非線形を考慮した力学的厳密さを乱さない高次非線形解析手法を確立す

る必要がある。剛体の表面形状が複雑な場合にも数値解析が安定している、つまり、“ロバスト”な解析アルゴリズムも要求される。

本論文では、これまで開発した剛体接触問題に対する膜体近似に基づく陽解法弾塑性有限要素法⁽⁷⁾に、 C^0 連続 (Mindlin 型) の近似殻理論を基礎とする非線形板殻理論を導入することで曲げの影響を考慮できる updated Lagrange 型の陰解法弾塑性有限要素解析法を確立した。仮想仕事率の原理式から得られる幾何学、材料、および接触に関する非線形剛性方程式は、陰解法によって定式化され、修正ニュートン・ラフソン法によって解かれる。接触問題の反復収束計算の安定性に重要な役割を演ずる変位増分初期推定値は、膜体近似の有限要素解析結果を用いた。ここで開発した有限要素法によって、球頭剛体パンチによる短辺固定長辺自由の長方形板の張出し問題を解析し、板厚の相違に

* 原稿受付 平成 2 年 8 月 10 日。

^{*1} 正員、大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘 2-1)。

よる自由端領域に生じるしわ変形およびひずみ分布の相違について検討した。

2. 非線形殻体有限要素式

2.1 運動学的関係式^{(9),(10)}

ここで提案する C^0 連続 Mindlin 型殻理論⁽⁸⁾においては、初期無変形状態で設定した殻体中央面に対する法線は、全変形過程において、中央面に対する垂直性は維持しないものの直線性を維持するという仮定を採用する。さらに、殻体の板厚方向にガウスの数値積分点に対応した層を考え、各層では一定の面内ひずみが生じるとする仮定を導入する。各層間のせん断ひずみは、面内ひずみに比べて十分小さいものと考え、これを無視する。以上の殻理論を用いて、図1(a)に示す、時刻 t および $t + \Delta t$ の増分間での三角形線形殻体有限要素の運動学的関係式を導出する。 C および $\bar{C}$ を殻体要素の増分変形前後の配置とし、運動を記述するための座標としては、中央面で定義された $\theta^1 - \theta^2$ 座標および中央面に垂直な θ^3 座標によって構成される面埋め込み座標を用いる。座標に対応する基本ベクトルを G_i と表す。

有限要素節点 N での単位法線ベクトル n_N は、図1(b)に示すように、その節点を共有する要素の法線ベクトルの総和によって得られるとする。

$$n_N = \sum_{e=1}^{n_e} n_e w_e \quad (1)$$

ここで、 w_e は有限要素節点 N を含む要素 e の頂角を全連結要素の頂角の和で除した重みである。図2に示すように、殻体内部の変位増分ベクトル Δu は、殻体中央面での変位増分ベクトル Δv および単位法線ベクトル n によって以下のように表されたとする。

$$\Delta u = \Delta v + \theta^3 [\bar{\lambda} \bar{n} - \lambda n]$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta u^i G_i, & \Delta v &= \Delta v^i G_i, \\ n &= n^i G_i, & \bar{n} &= \bar{n}^i \bar{G}_i \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、“ $-$ ”は増分時間後 $t + \Delta t$ の値を示し、 λ は中央面で定義された無次元化板厚量である。

変位増分を、ラグランジの内挿関数 ψ^N によって離散化表示するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Delta u^i &= \psi^N \Delta u_N^i \\ \Delta v^i &= \psi^N \Delta v_N^i \quad (N = 1, 3) \end{aligned} \quad (3)$$

変位増分の共変微分はつぎのようになる、

$$\begin{aligned} \Delta u^i|_0 &= \psi^N [\Delta v_N^i + \theta^3 (\Delta \lambda n_N^i + \lambda \Delta n_N^i)] \\ &= {}^N \Phi_{ka}^N [\Delta v_N^k + \theta^3 (\Delta \lambda n_N^k + \lambda \Delta n_N^k)] \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、係数 ${}^N \Phi_{ka}^N$ の詳細は文献(11)を参照されたい。

(a) Deformation.

(b) Normal.

Fig. 1 Deformation of flat Shell element.

Fig.2. Incremental displacement in shell body.

基本ベクトル G_i は三角形殻要素の各層で一定であり、ひずみも一定となる。グリーン・ラグランジのひずみの増分は以下のように表すことができる。

$$\Delta \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\Delta u_{\alpha|\beta} + \Delta u_{\beta|\alpha} + \Delta u^k|_{\alpha} \Delta u_{k|\beta}) \quad (5)$$

板厚方向ひずみ増分は非圧縮の条件から求められ、以下のようになる、

$$\Delta \gamma_{33} = \lambda \Delta \lambda + \frac{1}{2} (\Delta \lambda)^2 = -G_{33} G^{\alpha\beta} \Delta \gamma_{\alpha\beta} \quad (6)$$

2.2 異方性弾塑性構成式

材料はひずみ速度非依存の弾塑性体と考え、Hillの提案した直交異方性を考慮した流れ則に基づく構成式を採用する。⁽¹²⁾ 全ひずみ速度は弾性ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ および塑性ひずみ速度 $\dot{\gamma}^p$ の和とする。有限変形理論に基づく速度形の応力-ひずみ関係から、時間増分を十分小さく取ること、つぎのグリーン・ラグランジのひずみ増分およびコーシー応力の Jaumann 増分との線形関係が得られる。

$$\Delta \gamma_{jk}^e = \frac{(1+2r)}{(1+r)} G_{jm} G_{kn} - \frac{r}{(1+r)} G_{jk} G_{mn} \Delta \tau^{mn}$$

$$\Delta \gamma_{jk}^p = N \tau_{jk}^n \tau_{\alpha\beta}^n \Delta \tau^{\alpha\beta} \quad (7)$$

ここで、

$$N = \left[\frac{(1+2r)}{(1+r)} \right]^2 \frac{(1/E_t - 1/E)}{\sigma_e^2}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{(1+2r)}{(1+r)} \tau^{jk} \tau_{jk}^n$$

$$\tau^{jk} = \tau^{jk} - \frac{r}{(1+2r)} G^{jk} G_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta}$$

$$\tau_{jk}^n = G_{jm} G_{kn} \tau^{mn}$$

r は、Hillの垂直異方性を表すパラメータであり⁽¹²⁾ここで、 E_t は、単軸の応力-ひずみ関係から得られる相当応力 σ_e における接線係数 $d\sigma/d\varepsilon$ である。 τ^{ij} は異方性材料の偏差応力である。弾性の応力-ひずみ関係を用いることで、コーシー応力のJaumann増分およびラグランジ-グリーンのひずみの増分との線形関係が得られつぎのように示される。

$${}_J \Delta \tau^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\delta\nu} \Delta \gamma_{\delta\nu}$$

ここで、

$$D^{\alpha\beta\delta\nu} = B^{\alpha\beta\delta\nu} - \alpha \frac{B^{\alpha\beta\lambda\mu} B^{\rho\eta\delta\nu} \tau_{\rho\eta}^n \tau_{\lambda\mu}^n}{1/N + B^{\rho\eta\lambda\mu} \tau_{\rho\eta}^n \tau_{\lambda\mu}^n} \quad (8)$$

$\alpha = 1$; 負荷

$\alpha = 0$; 除荷あるいは中立

2. 3 仮想仕事率の原理

時刻 $t + \Delta t$ において外力と変形拘束を受けて平衡状態にある殻体を考え、このような力学的許容場に平衡状態を乱さない仮想速度を乗ずることのできる仮想仕事率の原理式(virtual power equation)を得る。⁽¹³⁾

$$\int_V \bar{\tau}^{ij} \delta \dot{u}_{j,i} dV - \int_A \bar{T}^j \delta \dot{u}_j dA = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{F}_e \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} = 0$$

ここで、 $\delta \dot{\mathbf{u}}$ は仮想速度ベクトルであり、 $\bar{T}^j$ は、剛体との接触面で定義された表面力ベクトル $\bar{\mathbf{T}}$ の成分である。 $\mathbf{F}_i$ および $\mathbf{F}_e$ は、殻体に生じる応力より求められる内力ベクトルおよび接触境界面で定義される外力ベクトルである。

図3に示すように、殻体が剛体と接触した接触部ではこれらの内力および外力は以下の平衡条件式を満足する。

$$\Phi(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e = 0 \quad (10)$$

2. 4 非線形接触アルゴリズム

殻体の剛体との接触境界面では、外力ベクトル $\mathbf{F}_e$ を以下のようにして求める。外力ベクトルは、接触接平面上でつぎのように法線方向 $\mathbf{F}_n$ および接線方向 $\mathbf{F}_t$ のベクトルに分解できると考えられる。

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t \quad (11)$$

Fig. 3 The equilibrium at the contact node.

法線方向外力ベクトル $\mathbf{F}_n$ の成分は、内力ベクトルからつぎのように求めることができる。

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n} \quad (\mathbf{F}_n = F_n \mathbf{n}) \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は図3に示すように接平面で定義された剛体に対する外向き単位法線ベクトルである。接触接平面内において、すべり方向の反対方向で定義された接線方向外力(摩擦抵抗力)は、Odenらの提案による非局所化クーロン摩擦則⁽¹⁴⁾によってつぎのように表される。

$$\mathbf{F}_t = -\mu \phi(\Delta \mathbf{u}) F_n \boldsymbol{\nu} \quad (13)$$

非局所化関数 $\phi(\Delta \mathbf{u})$ として、つぎの関係式を採用した。

$$\begin{aligned} \phi(\Delta \mathbf{u}) &= \tanh \frac{4|\Delta \mathbf{u}_t|}{\delta} \quad ; (|\Delta \mathbf{u}_t| < \delta) \\ &= 1 \quad ; (|\Delta \mathbf{u}_t| > \delta) \end{aligned} \quad (14)$$

接触接平面内で定義されるすべり方向単位ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ はつぎのようにして求めることができる。

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{u}_t \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{u}_t \times \mathbf{n}\|} \quad (15)$$

2. 5 有限要素接線剛性方程式の導出と増分計算アルゴリズム

増分時間後($t = t + \Delta t$)の有限要素節点において、非線形平衡条件式(10)を満足する変位増分解を得るために、修正ニュートン-ラフソン法を採用する。テイラー級数展開において、第1次の項のみを考慮することによって接線剛性マトリクスが得られ、有限要素接線剛性方程式はつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_T \cdot \delta \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{R} \\ \Delta \mathbf{R} &= \mathbf{F}_e(\Delta \mathbf{u}^*) - \mathbf{F}_i(\Delta \mathbf{u}^*) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{aligned} (\mathbf{K}_T)_{iN}^M &= \int_V \{ E^{ijkl} (G_{km}^M \Phi_{il}^m + G_{lm}^M \Phi_{ik}^m) N \Psi_j^l \\ &\quad + \tau^{ikM} \Phi_{ikN}^j \Psi_j^l \} dV + \int_A Q_s^i \psi_N dA \\ E^{ijkl} &= D^{ijkl} - (\tau^{ik} G^{jl} + \tau^{jk} G^{il}) \\ \Delta T^i &= M Q_s^i \Delta u_M^i \\ \Delta u_i|_N &= N \Psi_j^k \Delta u_k^N, \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$\mathbf{K}_T$ は、試行変位増分 Δu^* を導入することで得られる接線剛性マトリクスである。 $\Delta \mathbf{R}$ は、つり合い力ベクトルであり、平衡条件を満足する変位増分場が設定された場合には零となる量である。 δu は、試行変位増分に対する修正量であり、平衡条件が満足された場合は零となる。接線剛性マトリクスの導出では摂動法を採用した。表面力に関する接線剛性マトリクスは、文献(7)および(15)で示された膜体近似の平衡方程式から得られる係数 Q_s^i を採用して求めた。各増分ステップにおいて、以下の反復計算をおこなう。

A. 既に関与済みの陽解法膜体近似有限要素法を用いて、剛体の殻体への進行に伴う有限要素節点での変位増分 Δu^* を求める。

B. つぎに、得られた変位増分 Δu^* を初期推定値として殻体の接線剛性方程式に代入し多元線形連立方程式を解くことによって、修正変位増分 δu を求める。

C. 修正変位増分を加えて得られる新たな試行変位増分に関して 剛体の内部への食い込みの修正を行ったうえで、Bの段階へと戻り、以後反復計算を繰り返すことになる。

反復計算において、つぎのように定義されたノルム N_f を用いて収束を判定し、つぎの増分ステップへと計算を進める。

$$N_f = \frac{\|\delta u\|}{\|\Delta u^*\|} < \Delta (\text{typical } 10^{-5}) \quad (18)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ は有限要素節点で定義されたデカルトのノルムである。ここでは、解の収束がより安定するための数値計算技法として Germain⁽¹³⁾ らが提案した以下に示す β アルゴリズムを採用する。

$$\Delta u^{(n+1)} = \Delta u^{(n)} + \beta \delta u^{(n)} \quad (19)$$

ここで、 $0 \leq \beta \leq 1$ であり、 n はニュートン・ラフソンの反復計算回数である。 β 値の効率的な探索法については文献(13)を参照されたい。

3. 数値解析結果

ここでは、図4に示すように、短辺固定、長辺自由で、さらに円輪状フランジ部で押さえられた 120mmx80mm の長方形板が球頭剛体パンチによって張り出し変形を受ける場合を解析した。計算では、対称性を考慮して

Fig. 4 Dimensions of punch, die and plate.

1/4領域を計算の対象とし、等分割要素数は300、節点数は176とした。材料特性、形状、および摩擦係数を以下に示す。

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{単軸の応力-ひずみ関係} \\ &\sigma_e = 589(0.0001 + \epsilon^p)^{0.216} \text{ MPa} \\ &\text{縦弾性係数: } E = 69 \text{ GPa} \\ &\text{降伏応力: } \sigma_y = 80.559 \text{ MPa} \\ &\text{Hillの直交異方性パラメータ: } r = 1.0 \quad (20) \\ &\text{摩擦係数:} \\ &\mu = 0.16; \text{パンチとの接触部} \\ &\mu = 0.10; \text{ダイとの接触部} \\ &\text{板厚: } h_0 = 0.1 \text{ mm}, 2.0 \text{ mm} \end{aligned} \right.$$

図5に、パンチ進行量 10, 20, 30, 40mm における変形形状を板厚 0.1mm および 2.0mm の場合について比較して示す。板厚が小さい場合には、パンチ進行量の小さい変形初期の段階では、長辺自由端近傍領域に高次モードのしわ変形が観察されるが、パンチが進行するにしたがって球頭パンチの表面になじむようになり、パンチが 40mm 進行した段階ではしわ変形が消滅することが示されている。いっぽう、板厚が厚くなると、変形初期の段階では低次のしわ変形モードが長辺自由端近傍領域に発生し、パンチが 40mm 進行した段階でも長辺自由端の中央部にそのしわ変形が残ることが示された。

図6に、最大たわみ量を10分割した等高線によって、たわみ変形のモードに関する情報を提供する。パンチ進行量が 10mm の場合は、板厚が小さいほど長辺自由端に高次のしわモードが観察される。パンチの進行によって、両者ともに球頭パンチになじむことが示された。板厚 2.0mm の場合は、1次のしわモードが残ることが分かる。

図7では、球頭パンチが 20mm および 40mm 進行した場合の中央面での面内最大、および最小の主ひずみ $\ln \lambda_1, \ln \lambda_2$ および板厚ひずみ $-\ln h/h_0$ の分布を、板厚 0.1mm および 2.0mm について比較して示す。板厚が大

Fig. 5 Deformations of rectangular plates.

きい場合ほど、固定端近傍にひずみが集中する傾向があることが分る。板厚が小さい場合は、固定端近傍領域および球頭パンチの鉢巻状領域に、ひずみ集中部が観察された。球頭パンチの進行に伴って板厚の相違によるひずみの分布の相違が顕著になることが分かる。板厚が小さいほど長辺自由端の曲げ変形の影響が小さく、周辺固定の場合と同様に球頭パンチの鉢巻状領域に破断が発生するものとする。⁽¹⁶⁾

4. 結言

著者らは、これまで、板の剛体パンチによる大ひずみ大変形解析のための膜体近似による有限要素解析手法の開発を行ってきたが、本論文では、非適合殻体有限要素を採用し、曲げの影響を効率良く考慮できる弾塑性解析手法の提案を新たに試みた。曲げおよび接触境界の影響が連成するこの種の高次非線形問題においては、境界条件および平衡条件を厳密に満足する解を求める数値手法の確立は困難を伴う場合が多い。ここでは、非線形平衡方程式の解をニュートン・ラフソン法によって求めるための有限要素接線剛性マトリクスの算出法を示し、さらに反復計算における収束安定化のために初期推定値として膜体近似の陽解法有限要素解

Fig. 6 Deflection contours of one-quarter of plate. (10 divisions from maximum to minimum deflection.)

析で得た解を用いることでより早い収束が得られることを確認した。例題として、短辺のみ固定した長方形板の球頭パンチ張出し問題を解析し、たわみ変形および主ひずみに対する曲げの影響について明確に示すことができた。本解析法によって、複雑形状の剛体と板殻体の接触問題がより安定して解けるものとする。

Fig. 7 strain distributions

文献

- (1) Hughes, T.J.R. and Carnoy, E.: Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells, AMD. ASME, 48(1981), 193.
- (2) Hinton, E. and Owen, D.R.J.: Finite Element Software for Plates and Shells, (1984), Pineridge Press.
- (3) 仲町 英治, Sowerby, R.: 機論, 50-453(1984), 1069.
- (4) 後藤 学, 澤 茂樹: 機論, 53-496A(1987), 2436.
- (5) Simo, J.C. and Fox, D.D.: Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (1989), 267.
- (6) Benson, D.J. and Hallquist, J. O.: Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 78(1990), 141.
- (7) Nakamachi, E.: Int. J. Num. Methods in Engng., 25(1988), 283.
- (8) Mindlin, R.D.: J. Appl. Mech., 18-1(1951), 31.
- (9) Green, A. E. and Zerna, W.: Theoretical Elasticity, (1968), Oxford Univ. Press.
- (10) Naghdi, P. M.: The Theory of Shells and Plates, Handbuch der Physik, VI a/2(1972), Springer Verlag.
- (11) 北川 浩・その他3名: 機論, 43-366(1977), 470.
- (12) Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity, (1950), Oxford Univ. Press.
- (13) Germain, Y., Chung, K. and Wagoner, R. H.: Int. J. Mech. Sci., 31-1(1989), 1.
- (14) Oden, J. T. and Pires, E. B.: J. Appl. Mech., Trans. ASME(E), 50(1983), 67.
- (15) 仲町 英治: 機論, 52-476, A(1986), 1006.
- (16) Wang, N.M. and Budiansky, B.: J. Appl. Mech., Trans. ASME(E), 45(1978), 73.