すべり接触をする段付棒のねじり*

The Torsion of Two Cylindrical Rods in Sliding Contact

辻 知章^{*1}, 野田 直剛^{*1}, 渋谷 寿一^{*2}, 小泉 堯^{*2}

Tomoaki TSUJI, Naotake NODA, Toshikazu SHIBUYA and Takashi KOIZUMI

The contact torsion problem of two cylindrical rods is investigated by considering the sliding contact. When the two semi-infinite rods are contacted at each end, pressure is divided at the corner due to the stress singularity. Thus, the analysis proceeds in consideration of this stress singularity by using the series expansion method. It is considered that the shear stress is linear to the pressure in the sliding region. The relationships between the sliding region and the torque or the friction coefficient are obtained by numerical calculation.

Key Words : Contact, Friction, Torsion, Bar, Sliding, Slip, Elasticity, Stress Analysis, Stress Singularity

1 緒言

2つの弾性体を接触させねじりを加える場合、ある荷重を超えてねじりトルクを加えれば、接触面の一部がすべり、接触面のせん断力が接触面の圧力に比例した値、すなわち摩擦係数まで変形が戻る。Lubkin⁽¹⁾は、Hertzの接触理論により求めた接触圧力分布を用いて、2つの球を接触させねじりを加える問題を、接触面のすべり変形を考慮して解析している。Prasadら⁽²⁾は、長方形板が剛体壁に挟まれた問題を摩擦を考慮して解析している。一方、弾性体どうしの接触を考える場合には、接触部分に材質や形状の不連続が生じるため、この部分に応力特異性を生じる⁽³⁾。辻ら⁽⁴⁾は、直径の異なる半無限どうしの接触問題を、この応力特異性を考慮して解析している。球の接触問題のように、接触面が滑らかに変化する問題では、接触圧力が接触面端で滑らかに零となるため、接触面のねじりトルクによるせん断すべりは、接触面端から起る。しかし、半無限棒どうしの接触の場合は、角部が応力の特異点となり、接触面端近傍の接触圧力が非常に大きくなる。このため、せん断すべりが内部から生じる可能性も考えられるが、この種の問題を角部の応力の特異性を考慮して解析した研究はあまり行われていない。

そこで本研究では、半径の異なる2つの半無限棒の

端面を接触させねじる問題を、接触面のせん断すべりを考慮して解析を行う。接触面の圧力分布は、著者ら⁽⁴⁾が解析を行った、角部に生じる応力特異性を考慮して求めた接触圧力分布の結果を用い、すべり領域ではこの圧力に比例したせん断応力を受けるとして解析を行う。せん断すべりが接触面端から生じる条件を明らかにするとともに、ねじり荷重あるいは摩擦係数とすべり領域等の関係を明らかにする。

2 応力解析

図1に示すように、半無限棒どうしを端面で接触させ、無限遠で荷重 P を加えるとともに、トルク T でね

図1 ねじりすべりを生じる段付棒

* 平成2年9月23日 関西支部第249回講演会において講演、原稿受付 平成3年6月7日。

^{*1} 正員、静岡大学工学部 (〒432 浜松市城北 3-5-1)。

^{*2} 正員、東京工業大学 (〒152 目黒区大岡山 2-12-1)。

じる問題を、接触面のすべりを考慮して解析を行う。
棒 1 と棒 2 において、それぞれ座標系 (r, θ, z_i) ($i=1, 2$) を図に示すように取り、各棒に対する諸量を指標を用いて表す。ねじりトルクによるすべりは、角部 ($z=0, r=r_1$) から始まると仮定し、すべり領域を $a \leq r \leq r_1$ とする。3 章でこの仮定の是非について検討する。以上より、本問題の境界条件は次のようになる。

[棒 i ($z_i \geq 0, i=1, 2$)]

$$(\tau_{\theta z}^i)_{r=r_1}=0 \quad (0 \leq z_i < \infty) \quad (1)$$

$$T=2\pi \int_0^{r_1} \tau_{\theta z}^i r^2 dr \quad (0 \leq z_i < \infty) \quad (2)$$

[接触領域 ($z_i=0$)]

$$(\tau_{\theta z}^2)_{z_2=0} = \begin{cases} (\tau_{\theta z}^1)_{z_1=0} = \begin{cases} \tau_0(r) & (0 \leq r \leq a) \\ \mu \cdot p(r) & (a \leq r \leq r_1) \\ 0 & (r_1 < r \leq r_2) \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

$$(v_{\theta}^1)_{z_1=0} = -(v_{\theta}^2)_{z_2=0} \quad (0 \leq r \leq a) \quad (4)$$

ここで、 μ は摩擦係数、摩擦面の圧力を表す関数 $p(r)$ は、著者ら⁽⁴⁾により、角部 ($r=r_1, z_1=0$) における応力の特異性を考慮して、チェビシェフの多項式の展開形式で次のように与えられている。

$$\frac{p(r)}{p^*} = (1 - \frac{r}{r_1})^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k T_{2k}(\frac{r}{r_1}) \quad (5)$$

λ は角部における応力特異性のオーダー、 ϕ_k は展開係数、 p^* は次式で表される平均圧力である。

$$p^* = P/(\pi r_1^2) \quad (6)$$

接触面上の固着領域 ($0 \leq r \leq a$) におけるせん断応力を表す未知関数 $\tau_0(r)$ を、ヤコビの多項式を用いて次のように表す。

$$\frac{\tau_0(r)}{\tau^*} = \frac{r}{a} \sum_{k=0}^{\infty} x_k (-1)^k (1+k) G_k(2, 2; \frac{r^2}{a^2}), \quad (0 \leq r \leq a) \quad (7)$$

ここで、

$$\tau^* = 2T/(\pi r_1^3) \quad (8)$$

また、式 (7) は、せん断応力の連続性より、次式を満足していなければならない

$$\tau_0(a) = \mu p(a) \quad (9)$$

応力および変位場は、ベッセル関数により以下のように無限級数表示できる。

$$\frac{\tau_{\theta z}^i}{G_i} = 6rA_0^i \sum_{m=1}^{\infty} A_m^i \alpha_m^i J_1(\alpha_m^i r) e^{-\alpha_m^i z_i} \quad (10)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^i}{G_i} = -\sum_{m=1}^{\infty} A_m^i \alpha_m^i J_2(\alpha_m^i r) e^{-\alpha_m^i z_i} \quad (11)$$

$$v_{\theta}^i = -2rA_{-1}^i + 6rz_i A_0^i + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^i \alpha_m^i J_1(\alpha_m^i r) e^{-\alpha_m^i z_i} \quad (12)$$

未知係数、 α_m^i, A_k^i を境界条件より決定していく。境界条件式 (1) より α_m^i は次の超越方程式の正根として与えられる。

$$J_2(\alpha_m^i r_1) = 0, \quad (0 < \alpha_1^i < \alpha_2^i < \dots) \quad (13)$$

式 (2), (3) に式 (13) より得られるベッセル関数の直行性を用いれば、 A_k^i は次のように ϕ_k, x_k を用いて表される。

$$A_0^i = \tau^* r_1^3 / (6G_i r_1^4) \quad (14)$$

$$\frac{3}{2} r_1 A_0^i = \frac{a^3 \tau^*}{r_1^3 G_i} \frac{x_0}{4} + \frac{r_1^3 \mu p^*}{r_1^3 G_i} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_k' \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} A_m^i \alpha_m^i J_1^2(\alpha_m^i r_1) &= \frac{a^2 \tau^*}{r_1^2 G_i} \sum_{k=0}^{\infty} x_k J_{k,m}^i \\ &+ \frac{r_1^2 \mu p^*}{r_1^2 G_i} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_{k,m}^i \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$S_k' = \int_0^{\cos^{-1}(a/r_1)} (\sin \theta)^{1-2\lambda} \cos(2k\theta) \cos^2 \theta d\theta$$

$$J_{k,m}^i = \frac{(-1)^k}{a \alpha_m^i} J_{2+2k}(a \alpha_m^i)$$

$$S_{k,m}^i = \int_0^{\cos^{-1}(a/r_1)} (\sin \theta)^{1-2\lambda} \cos(2k\theta) \cos \theta \times J_1(\alpha_m^i r_1 \cos \theta) d\theta$$

さらに、式 (14) と (15) より、 x_0 は次の条件を満足するように求められなければならない。

$$\frac{a^3 x_0 + 4 \mu p^*}{r_1^3 \tau^*} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_k' = 1 \quad (17)$$

また、式 (9) より、

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \mu \frac{p^*}{\tau^*} (1 - \frac{a^2}{r_1^2})^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k T_{2k}(\frac{a}{r_1}) \quad (18)$$

従って、未知係数 A_m^i は x_k を用いて表されたから、式 (10)-(12) より、変位応力は次のように未知係数 x_k のみを用いて表せる。

$$\frac{\tau_{\theta z}^i}{\tau^*} = \frac{r}{r_1} \left(\frac{a^3}{r_1^3} x_0 + 4 \frac{r_1^3 \mu p^*}{r_1^3 \tau^*} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_k' \right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{J_1^2(\alpha_m r_i)} \left(\frac{a^2}{r_i^2} \sum_{k=0}^{\infty} x_k J_{k,m}^i \right. \\ \left. + \frac{r_1^2 \mu p^*}{r_i^2 \tau^*} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_{k,m}^i \right) J_1(\alpha_m r_i) e^{-\alpha_m^i z_i} \quad (19)$$

$$\frac{v_{\theta}^i}{\tau^*} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{J_1^2(\alpha_m r_i)} \left(\frac{a^2}{r_i^2} \sum_{k=0}^{\infty} x_k J_{k,m}^i \right. \\ \left. + \frac{r_1^2 \mu p^*}{r_i^2 \tau^*} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_{k,m}^i \right) J_2(\alpha_m r_i) e^{-\alpha_m^i z_i} \quad (20)$$

$$\frac{v_{\theta}^i}{r_i} = -2 \frac{r_1}{r_i} A_{-1}^i + \frac{r_1 z_i}{r_i^2 G_1} \left(\frac{a^3}{r_i^3} x_0 + 4 \frac{r_1^3 \mu p^*}{r_i^3 \tau^*} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_k^i \right) \\ - \frac{r_1}{G_1 m^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_m^2 r_i J_1^2(\alpha_m r_i)} \left(\frac{a^2}{r_i^2} \sum_{k=0}^{\infty} x_k J_{k,m}^i \right. \\ \left. + \frac{r_1^2 \mu p^*}{r_i^2 \tau^*} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_{k,m}^i \right) J_1(\alpha_m r_i) e^{-\alpha_m^i z_i} \quad (21)$$

結局、本問題は残る条件式 (4) より x_k および $\mu p^*/\tau^*$ を決定する問題に帰着された。式 (4) に、式 (21) を代入し、Jacobi の多項式の直交関係を用いれば、本問題は、以下の x_k 、 $\mu p^*/\tau^*$ に関する連立一次方程式に帰着される。

$$- \frac{G_1}{2\tau^*} (A_{-1}^1 + A_{-1}^2) \delta_{n,0} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k E_{k,n} + \frac{\mu p^*}{\tau^*} L = 0 \\ (n=0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

ここで、

$$E_{k,n} = - \frac{a}{r_1 m^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2+2n}(\alpha_m^1 a)}{(\alpha_m^1 r_1)^2 J_1^2(\alpha_m^1 r_1)} J_{k,m}^1 \\ - \frac{a G_1}{r_1 G_2 m^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2+2n}(\alpha_m^2 a)}{(\alpha_m^2 r_2)^2 J_1^2(\alpha_m^2 r_2)} J_{k,m}^2 \\ L = - \frac{r_1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2+2n}(\alpha_m^1 a)}{(\alpha_m^1 r_1)^2 J_1^2(\alpha_m^1 r_1)} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_{k,m}^1 \\ - \frac{r_1 G_1}{a G_2 m^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{2+2n}(\alpha_m^2 a)}{(\alpha_m^2 r_2)^2 J_1^2(\alpha_m^2 r_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k S_{k,m}^2$$

式 (22) を式 (17), (18) の条件の基で解けば、残る未知係数 ($A_{-1}^1 + A_{-1}^2$), x_k および $\mu p^*/\tau^*$ が決定でき、式 (19)-(21) より、変位、応力が求まる。ここで、 A_{-1}^1 , A_{-1}^2 は剛体回転に関する項であるため、棒 1 の角部 ($r=r_1, z=0$) の変位を零にするように決定する。

3 角部からすべり始める条件

段付接合棒をねじった場合、接合面のせん断応力は、応力の特異項を分離して以下のように表せる⁽⁵⁾。

$$\tau_{\theta z} = K_3 (r_1 - r)^{-\lambda_3} \quad (23)$$

ここで、 K_3 は一般化された応力拡大係数、 λ_3 はせん断変形に対する応力特異性のオーダーで、両棒の横弾性係数比 $\Gamma = G_2/G_1$ のみを用いて次式より得られる。

$$\lambda_3 = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{\Gamma}{\Gamma+1}\right) \quad (24)$$

同様に、接合面の接触圧力は、式 (5) より、一般化された応力拡大係数を K_1 とおくと、

$$p(r) = K_1 (r_1 - r)^{-\lambda} \quad (25)$$

ここで、 λ は、次の超越方程式の根として与えられる⁽⁴⁾。

$$v^* \Gamma \sin^2(\lambda \pi) + (1 - 4\lambda + 2\lambda^2) \cos(\lambda \pi) - \cos^2(\lambda \pi) = 0 \quad (26)$$

ここで、

$$v^* = \frac{1 - v_1}{1 - v_2}$$

せん断トルクにより接触面がすべる条件は、

$$\tau_{\theta z} > \mu p(r) \quad (27)$$

式 (27) に式 (23) と (25) を代入し変形を加えると、

$$\lambda_3 - \lambda > - \frac{\ln(\mu K_1/K_3)}{\ln(r_1 - r)} \quad (0 \leq r \leq r_1) \quad (28)$$

式 (28) の右辺は、 $r \rightarrow r_1 - 0$ すなわち角部において零に収束するから、角部が始めにすべり出す条件は以下のようなになる。

$$\lambda_3 > \lambda \quad (29)$$

式 (29) が満足されない場合は角部近傍で式 (27) が成立しないため、角部近傍においてせん断方向のすべりは生じない。図 2 に、横弾性係数比と応力特異性の関係を示す。図中、太線でせん断変形に対する応力特異性のオーダー λ_3 の値を示してある。 $v^* = 1.0, 0.5$ の場合は常に式 (29) は満足されているが、 v^* が、0.3, 0.2, 0.1 と小さくなるに従って、 $G_2/G_1 (= \Gamma)$ が小さい部分から式 (29) が満足されない部分が広がっていく。式 (24), (26) より、式 (29) は次式のように、 v^* と Γ の関係に置き換えられる。

$$v^* > \frac{1}{2\Gamma + 1} \left[-2 \frac{(\Gamma + 1)}{\pi^2} \left\{ \arccos\left(\frac{\Gamma}{\Gamma + 1}\right) \right\}^2 \right. \\ \left. + 4 \frac{(\Gamma + 1)}{\pi} \arccos\left(\frac{\Gamma}{\Gamma + 1}\right) - 1 \right] \quad (30)$$

図2 横弾性係数比と応力特異性のオーダの関係

図3 角部からすべり始める条件

式 (30) より、角部からすべり始める条件内の ν^* と Γ の値は、図3の斜線部分で表される。通常の金属材料では、ポアソン比 $\nu = 0.2 - 0.4$ の値を取ることから、

$$\nu^* = (1-\nu_1)/(1-\nu_2) > 0.5 \quad (31)$$

となり、角部からすべり始める。

4 数値結果

式 (22) の連立一次方程式の打ち切り項数を10、係数行列に関する無限級数の打ち切り項数を400程度とすれば十分収束した結果が得られた。以下に数値解析により得られた結果を示す。

図4と5に、接触面のせん断応力 $\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ の半径方向分布を、種々のすべり面の幅 $(r_1-a)/r_1$ に対して示す。角部 ($r=r_1, z=0$) で接触圧力が無限大⁽⁴⁾ となっており、また、すべり領域のせん断応力 $\tau_{\theta z}$ はこれに比例することから、角部付近のせん断応力は非常に大きくなっ

図4 接合面上の $\tau_{\theta z}$ の分布
($a/r_1=0.3, 0.5, 0.7, 0.9$, $r_2/r_1=2.0$, $G_2/G_1=1.0$) 図5 接合面上の $\tau_{r\theta}$ の分布
($a/r_1=0.3, 0.5, 0.7, 0.9$, $r_2/r_1=2.0$, $G_2/G_1=1.0$)

ている。 $r/r_1 = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ がそれぞれ、すべり開始点となるため、 $\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ もともに分布が不連続に変化している。また、この点から、棒1と2の $\tau_{r\theta}$ は不連続に変化し、急激な増減をする。図6は、種々のすべり面幅に対して、棒1と2の変位 v_θ の食い違い量を示している。棒1と2の食い違い量はすべり開始位置から滑らかに増加していく。

図7は、すべり面の幅 $(r_1-a)/r_1$ と $\mu p^*/\tau^*$ の関係を種々の r_2/r_1 に対して示したものである。 $\mu p^*/\tau^* \geq 1$ では全接触領域で摩擦力の方がねじトルクより大きくなるため、すべりは起らない。 $\mu p^*/\tau^* = 1$ から小さくなるに従ってすべり領域は滑らかに広がっていき、完全なすべり状態 $a=0$ となる。 $r_2/r_1=1.0, 1.33, 2.0$ と棒2の半径が大きくなるに従って、同じ $\mu p^*/\tau^*$ に対するすべり幅が小さくなることから、 r_2/r_1 の値が大きいかほどすべりが起りにくいことが分かる。

図8は、種々の G_2/G_1 に対して、すべり幅と $\mu p^*/\tau^*$ の関係を表したものである。 G_2/G_1 が大きいかほど同じ $\mu p^*/\tau^*$ に対するすべり幅が小さくなることが分かる。両棒の材質が変化すれば、摩擦係数 μ の値も変化することから、 G_2/G_1 を大きくしたからといってすべり幅が減少するとはかぎらない。

5 まとめ

半径の異なる2つの半無限棒を接触させねじり問題を、せん断すべりを考慮して解析を行い、以下の結果を得た。

1. 接合面淵からすべり始める条件は、両棒の横弾性係数比とポアソン比のみに関係する。
2. 通常の材料では接合面淵からすべり始める。
3. 長径の棒の半径が大きいかほどすべり領域を小さくできる。
4. 両棒の間の摩擦係数が同じ場合は、短径の棒の材質が長径の棒の材質に比べ硬くなるほどすべり領域を小さくできる。

参考文献

- (1) Lubkin, J.L., J. Appl. Mech., 18, (1951), 183.
- (2) Prasad, S.N., Chiu, P.K. and Dasgupta, S., Int. J. Engng. Sci., 14, (1976), 617.
- (3) 例えば 笠野, 松本, 接着境界誌, 21-9, (1985), 373.
- (4) 辻, 渋谷, 小泉, 機論(A), 51-463, (1985), 638.
- (5) Tsuji, T., Noda, N., Shibuya, T. and Koizumi, T., Int. J. Solids Struct., 27-8, (1991), 1059.

図6 接合面上における両棒の変位の食い違い
($a/r_1=0.3, 0.5, 0.7, 0.9$, $r_2/r_1=2.0$, $G_2/G_1=1.0$)

図7 種々の半径比に対する $\mu p^*/\tau^*$ とすべり面幅の関係
($G_2/G_1=1.0$).

図8 種々の横弾性係数比に対する
 $\mu p^*/\tau^*$ とすべり面幅の関係 ($r_2/r_1=2.0$)