境界要素法によるCFRP積層板のENF試験片の解析*

菊池正紀^{*1}, 金田俊樹^{*2}, 石橋隆行^{*3}

Boundary Element Analysis of ENF Specimen of CFRP

Masanori KIKUCHI, Toshiki KANADA, Takayuki ISHIBASHI

ENF specimen of CFRP laminates is analyzed by the Boundary Element Method. For the anisotropic analysis, the fundamental solution by Cruse is used. The contact problem is analyzed using the Penalty method proposed by Yagawa et al. The contact force distribution, area of the contact zone and the crack opening profiles are obtained by analysing several specimens with different crack lengths. It is shown that the contact zone size keeps nearly constant value for different crack lengths. The effect of the friction coefficient is also evaluated and discussed.

Key Words : Fracture, CFRP, ENF Specimen, Fracture Toughness, Boundary Element Method

1. 緒 言

CFRPに代表される繊維強化型複合材料は、近年その用途の拡大につれて、強度、特に破壊強度の評価が重要な問題となっている。影山らは、CFRPの破壊特性評価法の確立を目的として、モードI、モードIIの負荷を受ける積層板の破壊特性を、実験とFEMによる数値解析とを結合させた方法により、精度よく評価する手法を提案している⁽¹⁾⁽²⁾。またそれらの手法は、規格化へむけて現在検討が行われている。影山らの提案した手法のうち、モードIIの負荷を受けるENF(End Notched Flexure)試験片の形状を図1に示す。き裂部の支持部では上下面の接触が生じるため、この問題をFEMで解析するためには接触域の大きさ、接触力の分布等を求めなければならない。影山らは何通りかのFEM解析を行って、最も妥当な値を用いることによりこの問題を解決している。実際、この接触問題を含めてFEM解析を行うのは容易ではない。

一方、接触問題の数値解析にはしばしば境界要素法が用いられる。これは、BEMでは表面のみを要素分割すれば良いために、接触部での要素分割を細かくしてもFEMほどには要素総数が大きくならないためである。

本研究ではBEMを用いて、影山らの提案したENF試験片を接触問題も含めて解析する事を目的とする。

る。接触域の大きさや接触力の分布形状を求め、影山らの仮定と比較する。また接触部での摩擦係数の影響についても考察する。

2. ENF試験片の接触問題のFEMによる解析例

柳澤⁽³⁾は、図2に示す要素分割により、ENF試験片のFEM解析を行った。き裂面での接触に関しては以下の仮定を用いている。

- (1) 接触力は負荷荷重の1/4である。
- (2) 接触力の分布は余弦波形状になる。
- (3) 接触面での摩擦は無視できる。

図1 ENF 試験片

図2 柳澤のFEM要素分割図

* 平成3年3月30日 第68期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成3年4月15日。

^{*1} 正員、東京理科大学(〒278 野田市山崎2641)。

^{*2} 正員、トヨタ自動車(株)(〒471 豊田市トヨタ町1)。

^{*3} 学生員、東京理科大学大学院。

これらのうち、(1) は力学的に妥当であり、(3) は、この試験が接触部にテフロンフィルムを挟んで行う事から、妥当なものである。接触部の幅を決定する事が困難なため、柳澤は、接触部幅を試験片厚さの半分 H に対して数通りに変えて解析を行った。結果を図 3 に示す。縦軸はき裂上面の変位である。接触力が一点に集中すると考えた場合、試験片は接点のみが大きく変形し、不自然な形状になる。接触域の幅を H 、 $2H$ 、 $3H$ 、 $4H$ と 4 通りに変えて接触部の変位分布を比較すると、 $3H$ のときが最も滑らかな変位分布を示すことが分かる。影山らはこの結果を基に接触域の幅を $3H$ として、接触問題の解析を行うことなく ENF 試験片の解析を行っている。これは簡便法としては有効な方法であるが、図 3 より分かるように、接触域の幅を $3H$ にしても変位分布は必ずしも十分滑らかであるとは言えない。

そこで本研究においては、接触問題も含めた ENF 試験片の解析を BEM により行う事を目的として、まず異方性体解析用の BEM コードを作成し、ついでそれを接触問題解析コードと結合させることにより ENF 試験片解析用 BEM コードを作成した。

3. 異方性問題の BEM による解析

異方性問題の基本解としては Cruse-Swedlow の解を用いた⁽⁴⁾。それらは次式で与えられる。

$$U_{ji}^* = 2Re\{P_{i1}\log Z_1 + P_{i2}\log Z_2\} \quad (1)$$

$$T_{ji}^* = 2Re\{Q_{i1}(\mu_1 n_x - n_y)\alpha_{j1}/Z_1 + Q_{i2}(\mu_2 n_x - n_y)\alpha_{j2}/Z_2\} \quad (2)$$

ここで n_x 、 n_y は面法線ベクトルであり、 P 、 Q は次式で定義される定数である。

$$\left. \begin{aligned} P_{1k} &= \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{13}\mu_k \\ P_{2k} &= \beta_{12}\mu_k + \beta_{22}/\mu_k - \beta_{23} \quad (k=1,2) \\ Q_{1k} &= \mu_k, \quad Q_{2k} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

図 3 き裂面の隙間の分布

ここで $\beta_{11} - \beta_{33}$ は材料のコンプライアンスであり、 μ_k は次式で示される材料の特性方程式の複素根である。

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{13}\mu^3 + (2\beta_{12} - \beta_{33})\mu^2 - 2\beta_{23} + \beta_{22} = 0 \quad (4)$$

式 (1) における複素変数 Z_i は、この複素根を用いて次式のように定義されている。

$$Z_k = x + \mu_k y \quad (5)$$

また A_{ij} は応力関数の一価性などにより決定される定数である。

異方性問題のための BEM プログラムは、等方性問題の BEM コードに (1) 式の基本解を置き換えるだけで簡単に作成することができる。石川らはすでに同様の方法で BEM コードを開発している⁽⁶⁾。本研究においては、3 節点のアイソパラメトリック要素を使用するコードを作成した。内点のひずみは次式により計算される。

$$\begin{aligned} \epsilon_{ik} &= \frac{1}{2} \left[\int_S \left(\frac{\partial T_{ji}^*}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{ki}^*}{\partial x_j} \right) u_i dS - \int_S \left(\frac{\partial U_{ji}^*}{\partial x_k} + \frac{\partial U_{ki}^*}{\partial x_j} \right) t_i dS \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_S S_{jki} u_i dS - \int_S D_{jki} t_i dS \right) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 S_{jki} 、 D_{jki} は以下の式で表せる。

$$\begin{aligned} S_{jki} &= -2Re\{R_{k1}Q_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2)A_{j1}/Z_1^2 \\ &\quad + R_{k2}Q_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2)A_{j2}/Z_2^2\} \\ &\quad - 2Re\{R_{j1}Q_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2)A_{k1}/Z_1^2 \\ &\quad + R_{j2}Q_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2)A_{k2}/Z_2^2\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D_{jki} &= 2Re\{R_{k1}P_{i1}A_{j1}/Z_1 + R_{k2}P_{i2}A_{j2}/Z_2\} \\ &\quad + 2Re\{R_{j1}P_{i1}A_{k1}/Z_1 + R_{j2}P_{i2}A_{k2}/Z_2\} \end{aligned} \quad (8)$$

また内点の応力を精度良く計算するために要素細分化法を用いた。これにより境界のごく近傍まで、変位、応力を精度良く求めることが可能となった。き裂問題ではエネルギー解放率の計算が必要となるが、そのためには J 積分を計算することとした。境界近傍まで変位、ひずみが高精度で求められているため、J 積分も十分な精度を持っている。例として図 4 に示す一様引張り問題での J 積分の計算例を示す。

図 4 中央にき裂のある帯板の一様引張

ただしここでは理論解と比較するために等方性体を解析している。表 1 に示すように経路独立性も良く、理論解と良い精度で一致していることが分かる。

4. BEMを用いた接触問題の解析

接触問題の解析は、矢川らが提案したペナルティ法⁽⁶⁾を用いて行うこととした。以下には定式化の要約を示す。図 5 のように接触する物体 A、B を考える。物体 B 上の接触面に局所座標系 $\tilde{x}-\tilde{z}$ を定義し、これによる変位を $\tilde{u}_x^B, \tilde{u}_z^B$ ($\beta = A, B$)、B から A への接触力を p_x, p_z とする。このとき、接触条件式は以下のように書ける⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

(1) 口開き領域 (C_o)

$$\tilde{p}_{zo} + \Delta \tilde{p}_z = 0 \quad (1)$$

$$\tilde{p}_{zo} + \Delta \tilde{p}_z = 0 \quad (2)$$

(2) 固着領域 (C_{ii})

$$\Delta \tilde{u}_x^A - \Delta \tilde{u}_x^B = 0 \quad (3)$$

$$\Delta \tilde{u}_x^A - \Delta \tilde{u}_x^B + \tilde{d}_o = 0 \quad (4)$$

(3) 滑り領域 (C_s)

$$\Delta \tilde{u}_x^A - \Delta \tilde{u}_x^B + \tilde{d}_o = 0 \quad (5)$$

$$\tilde{p}_{zo} + \Delta \tilde{p}_z = \pm (\tilde{p}_{zo} + \Delta \tilde{p}_z) \quad (6)$$

ここで Δ は増分を、添字 o は初期値を、また $\tilde{d}_o$ は、物体 A B 間の距離を表す。

以上の式をペナルティ法を用いて付帯条件として考慮すると、線形弾性体に対する仮想仕事増分 $\delta(\Delta\pi)$ は次式で与えられる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} \delta(\Delta\pi) = & \int_{V_A+V_B} \Delta\sigma_{ij} \Delta\epsilon_{ij} dV - \int_{S_A^f+S_B^f} \Delta p_i \delta \Delta u_i dS \\ & + \int_{C_{ii}} \alpha (\Delta \tilde{u}_x^A - \Delta \tilde{u}_x^B) (\delta \Delta \tilde{u}_x^A - \delta \Delta \tilde{u}_x^B) dS \\ & + \int_{C_o} \Delta \tilde{p}_z (\delta \Delta \tilde{u}_x^A - \delta \Delta \tilde{u}_x^B) dS \\ & + \int_{C_{ii}+C_s} \alpha (\Delta \tilde{u}_x^A - \Delta \tilde{u}_x^B + \tilde{d}_o) (\delta \Delta \tilde{u}_x^A - \delta \Delta \tilde{u}_x^B) dS \\ & + \int_{C_o} \tilde{p}_{zo} (\delta \Delta \tilde{u}_x^A - \delta \Delta \tilde{u}_x^B) dS \\ & + \int_{C_o} \tilde{p}_{zo} (\delta \Delta \tilde{u}_x^A - \delta \Delta \tilde{u}_x^B) dS = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

表 1 J 積分の理論解との比較

Path	J_x (kN/m)	Error (%)
1	1.123672E-2	0.95
2	1.119136E-2	0.81
3	1.122984E-2	0.89
4	1.123122E-2	0.90
5	1.123065E-2	0.89
Average	1.122395E-2	0.89
Theory	1.113061E-2	-

ただし、

$$\Delta \tilde{p}_z = \pm \mu \{ \tilde{p}_{zo} + \alpha (\Delta \tilde{u}_x^A - \Delta \tilde{u}_x^B + \tilde{d}_o) \} - \tilde{p}_{zo} \quad (8)$$

ここで α はペナルティ数であり、数値解析では 10^8 とした。

(9) 式を離散化し、岸本ら⁽⁸⁾と同様に有限要素タイプのマトリックス表示を行うと次式を得る。

$$\sum_{V_A+V_B} \delta \{ \Delta U \}^T [K] \{ \Delta U \} + \sum_{S_A+S_B} \delta \{ \Delta U \}^T \{ \Delta F \} - \sum_{S_o+S_{ii}+S_s} \delta \{ \Delta U \}^T [\{ C \} \{ \Delta U \} + \{ R \}] = 0 \quad (9)$$

ここで $\{ \Delta U \}$ は要素毎の変位ベクトル増分、 $[K]$ は要素剛性マトリックス、 $\{ \Delta F \}$ は荷重ベクトル増分である。また $[C]$ と $\{ R \}$ は接触面での要素合性マトリックスと荷重ベクトルである。

$[C]$ と $\{ R \}$ は関東ら⁽⁷⁾による接触特殊要素を 3 節点要素に適用した 4 節点接触特殊要素を使用した。関東らはこの要素を用いて接触問題の有限要素解析を行ったが、この要素は本来線要素であるため、境界要素法解析に適している。局所座標系での $\{ \tilde{C} \}$ 、 $\{ \tilde{R} \}$ の具体的な形は以下に示す通りである。

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} N_1^2 k & N_1 N_2 k & N_1 N_3 k & -N_1 k \\ N_2 N_1 k & N_2^2 k & N_2 N_3 k & -N_2 k \\ N_3 N_1 k & N_3 N_2 k & N_3^2 k & -N_3 k \\ -N_1 k & -N_2 k & -N_3 k & k \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\{ \tilde{R} \} = \{ -N_1 r, -N_2 r, -N_3 r, r \}^T \quad (11)$$

k および r の具体的な形は関東らと同じであり、ここでは省略する。

以上の手法により接触問題解析用 BEM コードを作成した。

図 5 接触する物体 A B

図6は作成したコードの精度を調べるために例題として解いた、円盤と平板との接触問題である。図7には全体の半分を要素分割したものを示す。接触域近傍はかなり細かい要素分割としている。図8には接触力の分布を Herz の理論解⁽⁹⁾と比較した結果を示す。外力の増加につれて接触域は大きくなってゆく。接触域の大きさ、接触力の分布とも、ここで作成したBEMコードは十分の精度を持っていることが確かめられた。

5. ENF試験片の解析結果

表2にはBEM解析に用いたENF試験片の材料定数を示す。また図9にはき裂長さ40mmの場合のENF試験片の要素分割図を示す。一般にBEMは細長い問題では解析精度が落ちるため、図のように7つのサブ領域に分割して[H]、[G]マトリックスを計算し、それを結合する方法をとった。ここで、サブ領域の結合には再びペナルティ法を用いた。すなわち結合する面間では固着接触条件が満足されているものとして接触問題として扱った。これによって多数のサブ領域の結合を容易に行うことができた。

図6 Herz問題

図7 要素分割図

図8 接触面圧

接触問題の解析では、接触面間の摩擦を考慮しなければならない。解析対象の摩擦係数を正確に測定することは容易ではないので、まず摩擦係数を幾通りかに変化させて解析を行った。図10は種々のき裂長さに対する試験片中央部での変位を示す。図の横軸は摩擦係数を表している。摩擦係数が大きくなるにつれて変位はわずかに減少するが、その影響は極めて小さいことがわかる。また図11には経路積分により計算したJ積分と摩擦係数の関係を示す。ここでも摩擦係数の増加につれてわずかにJ値は減少するが、その減少量は極めて小さい。実際のENF試験片を用いた試験では、き裂面の接触部にテフロンフィルム等を押入して摩擦の影響を減少させている。従って図11の結果から、実際には摩擦係数の影響は無視できるものと思われる。そこで以下の解析は摩擦係数を0と仮定して行うものとした。

図9 ENF試験片のBEM要素分割図

図10 摩擦係数と荷重点変位の関係

表2 ENF試験片の材料定数

$E_L(\text{Kgf/mm}^2)$	$E_T(\text{Kgf/mm}^2)$	$E_Z(\text{Kgf/mm}^2)$	ν_{TL}	ν_{TZ}	ν_{LZ}	$G_{LT}(\text{Kgf/mm}^2)$
11500.0	800.0	800.0	0.024	0.3	0.34	420

図 1 2 はき裂長さを変化させたときの試験片の開口形状を示す。き裂長さを 10 mm から 50 mm まで変化させて 6 通りの解析を行った。図中右側の開口変位 0 の部分が、き裂上下面の接触域である。接触域の大きさは、き裂長さが変わってもほとんど変化していないことが分かる。またき裂長さ 50 mm のものを除いてはき裂は全面が開いているが、その開口量は極めて小さく、ファイバ 1 本の径よりも小さい。従って、本試験法はほぼ純粋なモード II 負荷条件を満足していることが示された。またき裂長さ 50 mm の場合にはき裂先端が約 2.5 mm 閉じているが、これはき裂先端の真上に荷重が作用しているためである。

図 1 3 には、き裂長さ a と COD との関係を無次元化して示す。ただし、ここで COD は ENF 試験片の端部での上下き裂面の変位のずれ (図 1 参照) として定義している。影山らが FEM 解析によって近似した同様の関係も図中に示す。FEM の近似が十分妥当なものであることが分かる。また、き裂長さ 40 mm ときの接触力の分布形状を図 1 4 に、接触力を負荷荷重で割り無次元化したときの形状を図 1 5 に示す。図 1 5 においてその形状は荷重によらずほぼ一様となり、荷

重の増加につれて分布形状は自己相似型に増加しているのがわかる。その一例を図 1 6 に示す。接触力の分布は、中央部では $\cos^2$ カーブに、周辺部では $\cos$ カーブに類似した形状となっている。

図 1 3 き裂長さ a と COD の関係

図 1 4 負荷荷重に対する接触力分布

図 1 5 負荷荷重に対する無次元化接触力分布

図 1 2 試験片の開口形状

図 1 6 接触力分布と $\cos$ カーブとの比較

表3 無次元化総接触力

Crack Length (mm)	$\sum P_c / P$
10	0.2501
20	0.2497
30	0.2494
40	0.2495
50	0.2496

表4 接触域幅

Crack Length (mm)	Contact Zone Size (mm)
10	4.625
20	4.500
30	4.500
40	4.500
50	4.500

6. 結 言

1. 接触問題も含めて、異方性体の弾性問題解析用 BEMコードを作成し、充分の精度を持っていることを確認した。
2. これを用いて CFRP の ENF 試験片を解析し、影山らによる FEM 簡便解析結果と比較した。両者は良い精度で一致することが確かめられた。

謝辞

本研究を進める過程で種々御教示頂いた東京大学船舶海洋工学科影山和郎助教授、および FEM 解析結果を提供してくれた元東京理科大学大学院生 柳澤 昇氏(現 日産自動車(株))に感謝いたします。

図17 き裂長さと G_{II} の関係

影山らの FEM 解析においては、分布形状を余弦曲線と仮定しているが、それとは若干異なっている。この違いが、図3の変位分布の変動の原因となっているものと考えられる。表3には接触力の総和を無次元化したものを示す。ほぼ正確に負荷荷重の $1/4$ となっており、これは影山らの仮定とよく一致している。また表4は接触域の大きさである。き裂長さによらず接触域の大きさは ENF 試験片の幅の半分 ($H=1.5\text{mm}$) の約3倍となっている。これは影山らが FEM 解析の結果採用した値と一致している。

図17にはエネルギー解放率の比較を示す。エネルギー解放率は、J積分によるものの他に、結城らによる接続外挿法⁽¹⁰⁾を用いて K_{II} を求め、それから計算した G 値も示している。影山らの FEM 解析結果と本解析結果とはよく一致している。また図中には Russell⁽¹¹⁾ が初等はり理論を用いて導いた簡便評価法による結果も示してある。この結果は Russell らの簡便法の有効性も示している。

参考文献

- (1) 影山・小林、機論、50-494、A(昭和62)、1898
- (2) 影山・柳澤、第13回複合材料シンポジウム、(昭和63-11)、65-68
- (3) 柳澤、東京理科大学昭和63年度修士論文
- (4) Cruse, T.A. and Swedlow, J.L., Air Force Rep. No. AFML-TR-71-268(1971)
- (5) 石川・山縣、機論、52-484、A(昭和61)、2646
- (6) 矢川・平山・安藤、機論、46-411、A(昭和55)、1220
- (7) 関東・矢川、機論、51-472、A(昭和60)、2747
- (8) 岸本ほか3名、第1回境界要素法シンポジウム研究発表論文集、(昭和59-11)、61-66
- (9) 例えば、強度設計データブック、(昭和35)、1079、雲華房
- (10) 結城・木須・松本、第1回境界要素法シンポジウム研究発表論文集、(昭和59-11)、85-90
- (11) Russell, A.J. and Street, K.N., Proc. ICCM-IV, (1982), 279