時間ステップ境界要素法による二次元非定常熱弾性解析*

石黒周司*¹, 田中正隆*²Analysis of Two-Dimensional Transient Thermoelasticity
by the Time-Stepping Boundary Element Method

Shuji ISHIGURO and Masataka TANAKA

This paper is concerned with a new boundary element approach based on the time-stepping scheme for two-dimensional thermoelasticity in unsteady heat conduction states. The uncoupling is assumed for the temperature and displacement fields. The time derivative in the differential equations is approximated by the time-stepping scheme. The reduced differential equations are transformed into a set of boundary integral equations by using the exact fundamental solutions which can be derived by the Hörmänder method. The standard boundary element method is applied to obtain numerical solutions at each time step. Computation is started from the initial state, and advanced by a time-marching procedure until the final state is realized. The mathematical formulation is presented in detail. The proposed solution procedure is applied to some example problems, whereby its potential usefulness is demonstrated.

Key Words: Boundary Element Method, Computational Mechanics, Structural Analysis, Elasticity, Thermal Stress, Transient Thermoelasticity

1. 緒 言

非定常熱弾性問題を含む時間依存問題の境界要素法は、次の3種類に大別できる⁽¹⁾⁽²⁾。すなわち、

- (1) Laplace変換またはFourier変換を用いる変換解法
- (2) 時間依存の基本解を用いる直接解法
- (3) 時間微分を時間ステップ近似する時間ステップ解法

である。

(1)の変換解法は、変換面での境界要素解析結果をもとに、これを逆変換して物理面での時間依存解を求めようとするものである。逆変換に困難が伴うとはいえ、最近ではFFT技術などを有効利用した逆変換手法の改良もあって、この解法の有効性が再評価されつつある⁽³⁾。熱弾性問題へのこの解法の応用は、最近、徐・登坂⁽⁴⁾によって行われた。(2)の直接解法は、時間と空間に関する境界積分方程式を導き、境界要素のほかに時間要素も導入して時間依存解を直接求めようとするものである。時間依存の厳密基本解が容易に得ら

れる場合は有効利用できるが、連成問題の解析では困難を伴う⁽⁵⁾。これまでは主として、準静的で、非連成の熱弾性問題へ応用されてきた^{(6)~(8)}。

一方、(3)の時間ステップ解法は、直接解法と同様に、時間依存の物理量を直接扱うことができるという利点を持つ。したがって、この利点を生かせば、基本解を求めるのが困難な連成問題などにおいても、有効な解法となることが考えられる。この解法は、最近になって、熱伝導問題⁽⁹⁾や動弾性問題⁽¹⁰⁾に適用され、ようやく数値的特性が検討されはじめたところである。熱弾性問題については、理論的側面の検討が部分的に行われているにすぎず⁽¹¹⁾、具体的な数値計算はまだ行われていない。

本報では、二次元非定常熱弾性問題に対する時間ステップ解法を取扱う。温度場と変位場が連成しない、いわゆる非連成熱弾性問題について、境界要素法定式化の詳細を示す。この定式化に基づく計算プログラムを開発し、これによる数値解析結果について考察する。

2. 理 論

2・1 基本解の導出 二次元非定常熱伝導状態の非連成熱弾性問題を考え、物体力および発熱がないも

* 原稿受付 平成3年5月17日。

*¹ 正員、長野県情報技術試験場 (〒399 松本市野溝西1-7-7)。

*² 正員、信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

のと仮定する。この場合、変位場および温度場の支配微分方程式は、次のような連立偏微分方程式系として表すことができる。

$$\bar{L}_{IJ}u_J(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (I, J=1, 2, 3) \quad (1)$$

ただし、 $u_I(\mathbf{x}, t)$ は、二次元空間内の点 $\mathbf{x}$ の時刻 t における x_1 方向変位成分 u_1 、 x_2 方向変位成分 u_2 および温度 u_3 を表すものとする。式(1)および以下において、二度繰返し現れる英字指標については、総和をとるものとする。また、 ∂_t で時間微分を、 ∂_i で x_i 座標に関する偏微分を表すものとするとき、式(1)の線形微分作用素 $\bar{L}_{IJ}$ は次式で与えられる。

$$[\bar{L}_{IJ}] = \begin{bmatrix} \gamma\partial_1^2 + G\Delta & \gamma\partial_1\partial_2 & -\beta\partial_1 \\ \gamma\partial_1\partial_2 & \gamma\partial_2^2 + G\Delta & -\beta\partial_2 \\ 0 & 0 & k_0\Delta - \partial_t \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで

$$\partial_i = \partial/\partial x_i, \quad \partial_t = \partial/\partial t, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 \quad (3)$$

$$\beta = 2\gamma(1+\nu)\alpha, \quad \gamma = G/(1-2\nu) \quad (4)$$

であり、 G は横弾性係数、 ν はポアソン比、 α は線膨張係数、 k_0 は温度伝導率である。

いま、十分小さい時間間隔を Δt とし、時刻 $t + \Delta t$ における時間微分を次のように後退差分近似する。

$$\partial_t u_I(\mathbf{x}, t + \Delta t) \approx \frac{u_I(\mathbf{x}, t + \Delta t) - u_I(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \quad (I=1, 2, 3) \quad (5)$$

このとき、式(1)は次のように書くことができる。

$$L_{IJ}u_J(\mathbf{x}, t + \Delta t) + B_I = 0 \quad (I, J=1, 2, 3) \quad (6)$$

ただし、 L_{IJ} および B_I は次式で与えられる。

$$[L_{IJ}] = \begin{bmatrix} \gamma\partial_1^2 + G\Delta & \gamma\partial_1\partial_2 & -\beta\partial_1 \\ \gamma\partial_1\partial_2 & \gamma\partial_2^2 + G\Delta & -\beta\partial_2 \\ 0 & 0 & k_0\Delta - 1/\Delta t \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[B_I] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3(\mathbf{x}, t)/\Delta t \end{bmatrix} \quad (8)$$

線形偏微分作用素に対する基本解を求めるために Hörmander の方法⁽⁵⁾⁽¹²⁾ を用いる。以下にその手順をステップ順に、要約して示す。

(1) 支配微分作用素 L_{IJ} の随伴作用素 $\mathcal{L}_{IJ}$ を求める。

$$[\mathcal{L}_{IJ}] = \begin{bmatrix} \gamma\partial_1^2 + G\Delta & \gamma\partial_1\partial_2 & 0 \\ \gamma\partial_1\partial_2 & \gamma\partial_2^2 + G\Delta & 0 \\ \beta\partial_1 & \beta\partial_2 & k_0\Delta - 1/\Delta t \end{bmatrix} \quad (9)$$

(2) 随伴作用素の行列式 $\mathcal{L}$ を計算する。

$$\mathcal{L} = G(\gamma + G)\Delta\Delta(k_0\Delta - 1/\Delta t) \quad (10)$$

(3) 無限媒体において

$$\mathcal{L}\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (11)$$

を満足する 2 点関数 $\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を求める。ただし、 $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は Dirac のデルタ関数である。

式(10)の $\mathcal{L}$ は、重調和作用素 $\Delta\Delta$ と変形ヘルムホルツ作用素 $k_0\Delta - 1/\Delta t$ の積に定数 $G(\gamma + G)$ を掛けたものとなっている。したがって、

$$\sigma^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\gamma + G)\Delta\Delta\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (12)$$

とおけば、式(11)は次のようになる。

$$(k_0\Delta - 1/\Delta t)\sigma^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (13)$$

式(13)は次式で与えられることがわかっている⁽¹³⁾。

$$\sigma^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_1 I_0\left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}}\right) + C_2 K_0\left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}}\right) \quad (14)$$

ただし、 r は 2 点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の距離、 C_1 と C_2 は積分定数、 $I_0(r)$ は第 1 種 0 階変形ベッセル関数、 $K_0(r)$ は第 2 種 0 階変形ベッセル関数である。

式(12)と式(14)の関係から、式(11)の 2 点関数 $\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が求められて、次式となる。

$$\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{k_0\Delta t^2}{2\pi G(\gamma + G)} \left\{ K_0\left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}}\right) + (C-1)\left(\frac{r}{2\sqrt{k_0\Delta t}}\right)^2 + \left[1 + \left(\frac{r}{2\sqrt{k_0\Delta t}}\right)^2\right] \log \frac{r}{2\sqrt{k_0\Delta t}} + C \right\} \quad (15)$$

ただし、 C はオイラー定数である。

(4) 随伴作用素 $\mathcal{L}_{IJ}$ の余因子作用素 M_{IJ} を

$$\mathcal{L}_{IJ}M_{KJ} = \mathcal{L}\delta_{IK} \quad (I, J, K=1, 2, 3) \quad (16)$$

で定義する。ただし、 δ_{IK} は Kronecker のデルタである。

式(16)から余因子作用素 M_{IJ} は、次のようになる。

$$[M_{IJ}] = \begin{bmatrix} \gamma k_0\partial_2^2\Delta + Gk_0\Delta\Delta - \gamma\partial_2^2/\Delta t - G\Delta/\Delta t & -\gamma k_0\partial_1\partial_2\Delta + \gamma\partial_1\partial_2/\Delta t & 0 \\ -\gamma k_0\partial_1\partial_2\Delta + \gamma\partial_1\partial_2/\Delta t & \gamma k_0\partial_1^2\Delta + Gk_0\Delta\Delta - \gamma\partial_1^2/\Delta t - G\Delta/\Delta t & 0 \\ -\beta G\partial_1\Delta & -\beta G\partial_2\Delta & G(\gamma + G)\Delta\Delta \end{bmatrix} \quad (17)$$

(5) 基本解 $u_{ij}^*(x, y)$ を

$$u_{ij}^*(x, y) = M_{ij} \phi^*(x, y) \quad (I, J=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (18)$$

で計算する。 $u_{ij}^*(x, y)$ の詳細を付録1に示す。

2.2 積分方程式の導出 積分方程式の誘導は、線形微分作用素 L_{ij} に対する基本解 $u_{ik}^*(x, y)$ を重み関数として選び、これを式(6)の両辺に掛け、領域全体にわたって積分して得られる恒等式：

$$\int_S [L_{ij} u_j(x, t + \Delta t) + B_i] u_{ik}^*(x, y) dS(x) = 0 \quad (I, J, K=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (19)$$

を出発点にすればよい。上式に発散定理を適用し、基本解の性質を考慮すれば、領域内の任意点と境界上の変位、表面力、温度、熱流束とを関係づける積分方程式を導くことができる。さらに、この式で、ソース点 y を境界上の任意点に移行させる極限操作を行えば、境界上の諸量を関係づける境界積分方程式が求められる。この境界積分方程式は次のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} c u_j(y, t + \Delta t) = & - \int_{\Gamma} u_i(x, t + \Delta t) p_{ij}^*(x, y) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} p_i(x, t + \Delta t) u_{ij}^*(x, y) d\Gamma(x) \\ & + \int_S \frac{1}{\Delta t} u_3(x, t) u_{3j}^*(x, y) dS(x) \end{aligned} \quad (I, J=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $p_i(x, t + \Delta t)$ ($i=1, 2$) は表面力成分、 $p_3(x, t + \Delta t)$ は熱流束を表す。また、 $p_{ij}^*(x, y)$ は、基本解 $u_{ij}^*(x, y)$ に対応する表面力および熱流束の基本解で、その詳細を付録2に示す。式(20)の係数 c は、ソース点 y が領域 S 内に位置するときは $c=1.0$ であり、滑らかな境界上にあるときは $c=0.5$ である。

2.3 核関数の特異性と特異積分 付録1に示した基本解 $u_{ij}^*(x, y)$ と付録2の基本解 $p_{ij}^*(x, y)$ は、

$I=1, 2$ および $J=1, 2, 3$ については、静弾性問題の Kelvin 解に対応するものである。したがって、ソース点 y と積分点 x の距離 r が $r \rightarrow 0$ のとき、特異性は Cauchy の主値程度であり、静弾性の場合の議論がそのまま適用できる。これには、サブ要素に分割する方法や解析的に行う方法⁽¹⁴⁾ などを用いることができる。

ベッセル関数を含む成分は、 $r \rightarrow 0$ において次のような特異性を持つ。すなわち、

$$\begin{aligned} u_{31}^*(x, y) & \rightarrow \bar{O}(1/r), \quad u_{32}^*(x, y) \rightarrow \bar{O}(1/r) \\ u_{33}^*(x, y) & \rightarrow \bar{O}(\log r), \quad p_{31}^*(x, y) \rightarrow \bar{O}(1/r^2) \\ p_{32}^*(x, y) & \rightarrow \bar{O}(1/r^2), \quad p_{33}^*(x, y) \rightarrow \bar{O}(1/r) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

である。特に $p_{31}^*(x, y)$ と $p_{32}^*(x, y)$ は、有限部分積分で評価する必要がある。

3. 計 算 法

本計算法は、時刻 t を出発点とし、初期条件 $u_3(x, t)$ を使い、時刻 $t + \Delta t$ における $u_i(x, t + \Delta t)$ および $p_i(x, t + \Delta t)$ ($i=1, 2, 3$) の値を計算する。次に新しく求めた $u_3(x, t + \Delta t)$ を見かけの初期条件として、時刻 $t + 2\Delta t$ における解を同様の手順で計算する。この操作を所定の時刻に至るまで繰返せばよい。

4. 数値計算例と考察

本解法の有効性を検討するために、正方形板と円柱の非定常熱応力問題を取り上げ、本定式化に基づいて開発した計算プログラムから得られる結果を、対応する厳密解と比較する。

図1に正方形板の要素分割を示す。境界を40個の線形境界要素に、領域を100個の線形セルに分割した。初期温度 100°C とし、 $t=0\text{ s}$ において上下辺を 0°C に

図1 正方形板の要素分割

図2 正方形板の温度および応力 ($t=5\text{ s}$)

冷却した場合の温度と X 軸方向熱応力を求めた。材料定数は、 $G=80.8$ GPa (縦弾性係数 210 GPa), $\nu=0.3$, $\alpha=1.1 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$, $k_0=16$ mm²/s と仮定した。また、計算は、平面ひずみ状態を仮定し、 $\Delta t=5$ s として行った。図 2, 3, 4 には、それぞれ $t=5$ s, 10 s, 30 s のときの計算結果を示す。図中実線で示すのは、一次元問題についての厳密解⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾である。厳密解と本解とはよく一致していることがわかる。

次に円柱の結果を示す。問題の対称性を利用し、円柱断面の 1/4 部分を、図 5 のように要素分割して計算する。境界を 40 個の線形境界要素に、領域を 200 個の

線形セルに分割した。初期温度 100°C とし、 $t=0$ s において表面を 0°C に冷却した場合の温度と熱応力を求めた。材料定数は、正方形板の問題と同様とした。平面ひずみ状態を仮定し、 $\Delta t=5$ s として計算を行った。図 6, 7, 8 には、それぞれ $t=5$ s, 10 s, 30 s のときの結果を示す。正方形板の場合と同様に、本解法による結果は、実線の厳密解⁽¹⁷⁾とよく一致していることがわかる。

図 3 正方形板の温度および応力 ($t=10$ s)

図 4 正方形板の温度および応力 ($t=30$ s)

図 5 円柱断面の 1/4 部分の要素分割

図 6 円柱の温度および応力 ($t=5$ s)

図 7 円柱の温度および応力 ($t=10$ s)

図 8 円柱の温度および応力 ($t=30$ s)

5. 結 言

二次元非定常熱弾性問題における時間ステップ解法による境界要素法の定式化を示した。これによる計算プログラムを開発した。二つの問題に適用し、有効性を確認した。

本報では非連成熱弾性問題のみに適用したが、本解法は連成問題に対しても同様の取扱いが可能である。

具体的な計算手順については、今後さらに検討してゆく予定である。また、高次境界要素の導入および三次元問題への拡張についても、検討する予定である。

本研究の一部は、(財)浅間テクノポリス開発機構および(財)長野県テクノハイランド開発機構の資金援助を受けて行ったことを付記し、関係各位に謝意を表する。

付録1 基本解 $u_{ij}^*(x, y)$ の表示式

$$u_{11}^*(x, y) = -\frac{3-4\nu}{8\pi G(1-\nu)} \left(C + \log \frac{r}{2\sqrt{k_0\Delta t}} \right) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{16\pi G(1-\nu)} \quad (22)$$

$$u_{12}^*(x, y) = u_{21}^*(x, y) = \frac{r_1 r_2}{8\pi G(1-\nu)} \quad (23)$$

$$u_{13}^*(x, y) = u_{23}^*(x, y) = 0 \quad (24)$$

$$u_{22}^*(x, y) = -\frac{3-4\nu}{8\pi G(1-\nu)} \left(C + \log \frac{r}{2\sqrt{k_0\Delta t}} \right) - \frac{r_1^2 - r_2^2}{16\pi G(1-\nu)} \quad (25)$$

$$u_{31}^*(x, y) = \frac{(1+\nu)\alpha}{2\pi k_0(1-\nu)} \left\{ \sqrt{k_0\Delta t} r_{,1} K_1 \left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}} \right) - k_0\Delta t \frac{r_{,1}}{r} \right\} \quad (26)$$

$$u_{32}^*(x, y) = \frac{(1+\nu)\alpha}{2\pi k_0(1-\nu)} \left\{ \sqrt{k_0\Delta t} r_{,2} K_1 \left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}} \right) - k_0\Delta t \frac{r_{,2}}{r} \right\} \quad (27)$$

$$u_{33}^*(x, y) = \frac{1}{2\pi k_0} K_0 \left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}} \right) \quad (28)$$

ただし、 $K_1(r)$ は第2種1階変形ベッセル関数であり、コンマに続く添字は点 x での座標に関する微分を示す。

付録2 基本解 $p_{ij}^*(x, y)$ の表示式

$$p_{ik}^*(x, y) = \gamma(1-2\nu)n_i u_{jk,i}^*(x, y) + 2\gamma\nu n_i u_{jk,j}^*(x, y) + G n_j u_{ik,j}^*(x, y) \quad (K=1, 2, 3; i, j=1, 2) \quad (29)$$

$$p_{3k}^*(x, y) = k_0 n_i u_{3k,i}^*(x, y) \quad (K=1, 2, 3; i=1, 2) \quad (30)$$

$$p_{11}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ [(1-2\nu) + 2r_1^2] (n_1 r_{,1} + n_2 r_{,2}) \} \quad (31)$$

$$p_{12}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ 2r_{,1} r_{,2} (n_1 r_{,1} + n_2 r_{,2}) - (1-2\nu)(n_1 r_{,2} - n_2 r_{,1}) \} \quad (32)$$

$$p_{13}^*(x, y) = p_{23}^*(x, y) = 0 \quad (33)$$

$$p_{21}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ 2r_{,1} r_{,2} (n_1 r_{,1} + n_2 r_{,2}) - (1-2\nu)(-n_1 r_{,2} + n_2 r_{,1}) \} \quad (34)$$

$$p_{22}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ [(1-2\nu) + 2r_2^2] (n_1 r_{,1} + n_2 r_{,2}) \} \quad (35)$$

$$p_{31}^*(x, y) = \frac{(1+\nu)\alpha}{2\pi(1-\nu)} \left\{ -r_{,1} (n_1 r_{,1} + n_2 r_{,2}) K_0 \left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}} \right) + \frac{\sqrt{k_0\Delta t}}{r} [n_1 (r_2^2 - r_1^2) + n_2 (-2r_{,1} r_{,2})] \left[K_1 \left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}} \right) - \frac{\sqrt{k_0\Delta t}}{r} \right] \right\} \quad (36)$$

$$p_{32}^*(x, y) = \frac{(1+\nu)\alpha}{2\pi(1-\nu)} \left\{ -r_{,2} (n_1 r_{,1} + n_2 r_{,2}) K_0 \left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}} \right) + \frac{\sqrt{k_0\Delta t}}{r} [n_1 (-2r_{,1} r_{,2}) + n_2 (r_1^2 - r_2^2)] \left[K_1 \left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}} \right) - \frac{\sqrt{k_0\Delta t}}{r} \right] \right\} \quad (37)$$

$$p_{33}^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{k_0\Delta t}} (n_1 r_{,1} + n_2 r_{,2}) K_1 \left(\frac{r}{\sqrt{k_0\Delta t}} \right) \quad (38)$$

ただし、 n_1, n_2 は単位法線ベクトルの成分である。

文 献

- (1) 田中(正)・田中(道), 境界要素解析の基礎, (1984), 89, 培風館.
- (2) 田中, 第 38 回応用力学連合講演予稿集, (1988), 11.
- (3) 田中・松本・中村, 境界要素法研究会第 33 回例会研究発表資料, BEM 91-33-1 (1991).
- (4) 徐・登坂, 境界要素法論文集, 4 (1987), 99.
- (5) 登坂, 境界要素法論文集, 3 (1986), 207.
- (6) Tanaka, M.,ほか 2 名 (Brebbia, C. A. 編), *Topics in Boundary Element Research*, 1 (1984), 59, Springer-Verlag.
- (7) Chaudouet, A., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24 (1987), 25.
- (8) Dargush, G. F. and Banerjee, P. K. (Banerjee, P. K. and Wilson, R. B. 編), *Developments in Boundary Element Methods-5*, (1989), 119, Elsevier Appl. Sci.
- (9) 田中・楊, 第 68 期通常総会講演会講演論文集, A (1991), 336.
- (10) 田中・松本, 機論, 55-515, A (1989), 1577.
- (11) 田中・旭, 材料システム, 6 (1987), 157.
- (12) Hörmander, L., *Acta Mathematica*, 94 (1955), 161.
- (13) 矢野(監修)・宮本(訳編), 数学ハンドブック, (1985), 500, 森北出版.
- (14) 結城・木須, 境界要素法による弾性解析, (1987), 130, 培風館.
- (15) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., (1987), 100, Oxford at Clarendon Press.
- (16) Boley, B. A. and Weiner, J. H., *Theory of Thermal Stresses*, (1960), 258, John Wiley & Sons Inc.
- (17) 竹内(著)・野田(増補), 熱応力(増補版), (1989), 119, 日新出版.