円柱状剛体パンチにより曲げを受ける
横等方性厚板の非軸対称接触問題*坂 本 信^{*1}, 原 利 昭^{*2}
渋谷 寿 一^{*3}, 小 泉 堯^{*3}An Asymmetric Contact Problem of a Transversely Isotropic Layer
Subjected to Moment by a Circular Rigid PunchMakoto SAKAMOTO, Toshiaki HARA,
Toshikazu SHIBUYA and Takashi KOIZUMI

An analytical solution is presented for an asymmetric contact problem of a transversely isotropic layer subjected to moment by a circular rigid punch, with the layer resting on a rigid foundation. In the analysis, dual integral equations are reduced to an infinite system of simultaneous equations by using the technique of expressing the normal stress under the punch as an appropriate series. Numerical results for the contact stress and the surface displacement in three examples of transversely isotropic materials as well as in an isotropic one are presented. The effects of anisotropy and layer thickness on the stress field are discussed.

Key Words: Elasticity, Contact Problem, Anisotropy, Composite Material, Transverse Isotropy, Asymmetric Problem, Circular Punch, Bone, Elastic Layer, Rigid Foundation

1. 緒 言

近年の著しい複合材料の開発に伴い、異方性弾性体に対する応力解析の重要性が増してきた。また、骨や軟骨等に代表される力学的に異方性を有する生体組織の力学的挙動を明らかにする試み^{(1)~(4)}も工学者を中心に進められている。異方性弾性体のなかでも理論的取扱いが比較的容易な横等方性弾性体に関しては、古くより多くの研究者らによってさまざまな問題が論じられており、例えば剛体パンチと弾性体との三次元弾性接触問題については、Elliott⁽⁵⁾が球、円柱および円すい形状の剛体パンチを横等方性半無限体表面に圧入する問題を解析して以来、横等方性半無限体に関する軸対称問題^{(6)~(10)}や非軸対称問題^{(11)~(15)}が研究されている。しかしながら、厚板を対象とした解析例は少なく、しかもこれらのすべては軸対称応力場^{(16)~(19)}を扱ったものである。

そこで本研究では、剛体床上に置かれた横等方性厚板表面を滑らかな平面底を有する円柱状剛体パンチで

偏心圧入する非軸対称接触問題を解析した。解析では、初めにパンチにより曲げモーメントのみが作用する場合について、パンチ接触面の応力を未知係数を含む級数で表示して問題を無限連立1次方程式の解法問題に帰着させた。そして、一方向FRP材、緻密骨および単結晶カドミウム材を対象例とした数値計算を実行して、曲げモーメントにより生じる厚板上面の変位や応力等を示すとともに、著者らが先に求めた軸対称接触応力場⁽¹⁹⁾を重ね合わせることによって、パンチを厚板表面に偏心圧入する場合の接触応力分布等を明らかにした。

2. 応 力 解 析

2.1 応力関数 円柱座標 (r, θ, z) において、変位成分を (u_r, v_θ, w_z) 、応力成分を $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ とすれば、 $r\theta$ 面を等方性面、異方性主軸を z 軸とする横等方性弾性体の z 軸まわりの回転変形を伴わない非軸対称応力状態は調和型応力関数 φ_i ($i=1, 2$)を用いて次のように表せる⁽²⁰⁾。

* 原稿受付 平成3年4月4日。

^{*1} 正員、新潟工業短期大学(〒950-21 新潟市上新栄町5-13-7)。^{*2} 正員、新潟大学工学部(〒950-21 新潟市五十嵐二の町8050)。^{*3} 正員、東京工業大学工学部(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Psi_i}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{\partial \Psi_i}{r \partial \theta}, \quad w_z = k_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \\ \frac{\sigma_r}{c_{44}} &= -(1+k_i) \left\{ \beta_i \left(\frac{\partial \Psi_i}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} \right\} \\ \frac{\sigma_\theta}{c_{44}} &= -(1+k_i) \left\{ \beta_i \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} \right\} \\ \frac{\sigma_z}{c_{44}} &= \mu_i (1+k_i) \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2}, \quad \frac{\tau_{rz}}{c_{44}} = (1+k_i) \frac{\partial^2 \Psi_i}{r \partial \theta \partial z} \\ \frac{\tau_{rz}}{c_{44}} &= (1+k_i) \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r \partial z}, \quad \frac{\tau_{r\theta}}{c_{44}} = \beta_i (1+k_i) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Psi_i}{r \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} + \mu_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_i &= 0 \\ k_i &= (\mu_i c_{11} - c_{44}) / (c_{13} + c_{44}) \\ \beta_i &= (c_{11} - c_{12}) / \{ c_{44} (1+k_i) \} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

であり, μ_i は横等方性弾性体の弾性定数 c_{mn} からなる次の2次方程式を満たす解である.

$$c_{11} c_{44} \mu^2 + \{ c_{13} (c_{13} + 2c_{44}) - c_{11} c_{33} \} \mu + c_{33} c_{44} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

2.2 剛体パンチで曲げのみを受ける場合 図1

に示すように, 滑らかな剛体床の上に置かれた z 軸を異方性主軸方向とする厚さ h の横等方性無限厚板上面を半径 r_0 の滑らかな平面底を有する円柱状剛体パンチで偏心圧入する場合, 軸荷重 P のみを受ける軸対称問題と曲げモーメント M のみを受ける非軸対称問題とに分離して考えることができる. 前者の問題はすでに著者らにより解析されているので⁽¹⁹⁾, 本研究

図1 円柱状パンチで偏心圧入される横等方性厚板

では後者の問題を解析する.

円柱状剛体パンチが y 軸まわりに曲げモーメント M のみを受け, パンチの微小傾角を α とすれば境界条件は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad (\sigma_z)_{z=h} &= 0 \quad (r_0 < r) \\ (ii) \quad (w_z)_{z=h} &= -(r/r_0) \varepsilon_m \cos \theta \quad (0 \leq r \leq r_0) \\ (iii) \quad (\tau_{rz})_{z=h} &= (\tau_{\theta z})_{z=h} = 0 \quad (0 \leq r) \\ (iv) \quad (w_z)_{z=0} &= (\tau_{rz})_{z=0} = (\tau_{\theta z})_{z=0} = 0 \quad (0 \leq r) \\ (v) \quad &\text{無限遠方ですべての応力は消失.} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで, ε_m は x 軸上におけるパンチの最大微小変位を示し, $\varepsilon_m = \alpha r_0$ である. 境界条件(ii)において変位 $(w_z)_{z=h}$ が θ に関しては $\cos \theta$ のみの関数であること, および条件(iv), (v)を考慮して応力関数 Ψ_i を次式のように選ぶ.

$$\Psi_i = \cos \theta \int_0^\infty A_i(\lambda) J_1(\lambda r) \cosh \lambda z_i d\lambda \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $A_i(\lambda)$ ($i=1, 2$) は境界条件から決定される未知関数, $J_n(\lambda r)$ は n 次の第一種ベッセル関数であり,

$$z_i = z / \sqrt{\mu_i} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(1), (5)より得られる τ_{rz} と $\tau_{\theta z}$ に境界条件(iii)を適用すれば次式を得る.

$$A_2(\lambda) = -\eta \sqrt{\mu_2 / \mu_1} A_1(\lambda) \sinh \lambda h_1 / \sinh \lambda h_2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで,

$$\eta = 1 + k_1 / 1 + k_2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$h_i = h / \sqrt{\mu_i} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

さらに, 式(7)を考慮して残りの境界条件(i), (ii)を用いれば, 以下で示される未知関数 $A_1(\lambda)$ に関する連立積分方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\sigma_z)_{z=h}}{\cos \theta} &= c_{44} (1+k_1) \int_0^\infty \lambda^2 p(\lambda) A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= 0 \quad (r_0 < r) \\ \frac{(w_z)_{z=h}}{\cos \theta} &= -\frac{1-k_1}{\sqrt{\mu_1}} \int_0^\infty \lambda A_1(\lambda) J_1(\lambda r) \sinh \lambda h_1 d\lambda \\ &= -\frac{r}{r_0} \varepsilon_m \quad (0 \leq r \leq r_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで,

$$p(\lambda) = \cosh \lambda h_1 - \sqrt{\mu_2 / \mu_1} \sinh \lambda h_1 \cdot \cosh \lambda h_2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

横等方性半無限体が円柱状剛体パンチで曲げを受ける場合⁽¹⁴⁾を参考にすれば, 本問題におけるパンチ接触面の $(\sigma_z)_{z=h}$ はパンチ縁において $(r_0^2 - r^2)^{-1/2}$ の特異性を有し, それ以外では有限な連続関数となる. そこで, $(\sigma_z)_{z=h}$ を次式のように未知係数 c_n ($n=0, 1, 2,$

…) を含む級数で表示する.

$$\frac{(\sigma_z)_{z=h}}{\cos \theta} = -\frac{2c_{44}}{\pi\sqrt{r_o^2-r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n' T_{2n+1}\left(\frac{r}{r_o}\right) \quad (0 \leq r < r_o) \quad (12)$$

ここで, $T_{2n+1}(r/r_o)$ は $(2n+1)$ 次のチェビシエフ多項式である.

いま,

$$Z_n(\lambda) = J_{n+(1/2)}\left(\frac{\lambda r_o}{2}\right) J_{-n-(1/2)}\left(\frac{\lambda r_o}{2}\right) \quad (13)$$

とおけば, 次の積分公式が成立する⁽²¹⁾.

$$\int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) d\lambda = \begin{cases} -\frac{2T_{2n+1}(r/r_o)}{\pi\sqrt{r_o^2-r^2}} & (0 \leq r < r_o) \\ 0 & (r_o < r) \end{cases} \quad (14)$$

式(10)の第1式および式(12)をハンケル逆変換し, 式(14)を用いれば, 次式を得る.

$$\lambda(1+k_1)p(\lambda)A_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n' \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) \quad (15)$$

式(15)を式(10)の第2式に代入して両辺に r を乗じるとともに, $rJ_1(\lambda r) = -\partial J_0(\lambda r)/\partial \lambda$ の関係およびゲンバウアーの加法定理を用いて次式を得る.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^\infty q(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} (2-\delta_{0m}) \frac{\partial}{\partial \lambda} X_m(\lambda) \times \cos m\phi d\lambda = 1 - \cos \phi$$

$$(0 \leq r = r_o \sin \phi/2 \leq r_o) \quad (16)$$

ここで, δ_{0m} はクロネッカーデルタであり,

$$c_n = -\frac{2\eta}{\varepsilon_m r_o \sqrt{\mu_1}} c_n' \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

$$X_m(\lambda) = J_m^2\left(\frac{\lambda r_o}{2}\right) \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

$$q(\lambda) = \sinh \lambda h_1 / p(\lambda) \quad (19)$$

式(16)は ϕ に関する恒等式であるから, 式(16)の両辺の $\cos m\phi$ について係数を等置して次式を得る.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^\infty q(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} X_m(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \frac{1}{2} \delta_{1m} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

したがって, 本問題は無限連立1次方程式(20)を解いて係数 c_n を決定する問題に帰着された. c_n が求められれば, 式(15), (17)より未知関数 $A_1(\lambda)$ は次のように決まる.

$$\lambda A_1(\lambda) = -\frac{\varepsilon_m r_o \sqrt{\mu_1}}{2p(\lambda)(1-k_1)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) \quad (21)$$

厚板表面上の変位 $(w_z)_{z=h}$ は, λ が十分に大きい場合

$$\left. \begin{aligned} \lambda Z_n(\lambda) &\rightarrow \frac{2}{\pi r_o} \sin \lambda r_o \\ q(\lambda) &\rightarrow \gamma, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

であることを考慮して, 次式により計算できる.

$$\frac{(w_z)_{z=h}}{\varepsilon_m \cos \theta} = \frac{r_o}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^\infty \{q(\lambda) - \gamma\} \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda - \frac{r r_o}{4} \gamma \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\int_0^\infty \left\{ Z_n(\lambda) - \frac{2 \sin \lambda r_o}{\lambda \pi r_o} \right\} \times \{J_0(\lambda r) - J_2(\lambda r)\} d\lambda + \frac{2}{\pi r_o} \left\{ H(r_o - r) \frac{\pi}{2} + H(r - r_o) \left(\sin^{-1} \frac{r_o}{r} - \frac{r_o \sqrt{r^2 - r_o^2}}{r^2} \right) \right\} \right] \quad (23)$$

ここで, $H(r_o - r)$ はヘビサイドのステップ関数である. 他方, パンチ接触部の応力 $(\sigma_z)_{z=h}$ は式(12)および式(17)より次式で与えられる.

$$\frac{(\sigma_z)_{z=h}}{\varepsilon_m \cos \theta} = c_{44} r_o \eta \sqrt{\mu_1} \frac{H(r_o - r)}{\pi \sqrt{r_o^2 - r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_{2n+1}\left(\frac{r}{r_o}\right) \quad (24)$$

パンチ縁 ($r = r_o$) における $(\sigma_z)_{z=h}$ の特異性を評価するため次式で定義される係数 S を導入する⁽¹⁸⁾.

$$S = \lim_{r \rightarrow r_o-0} \sqrt{2\pi(r_o - r)} (\sigma_z)_{z=h} \quad (25)$$

式(25)に式(24)を代入すれば, S は次式で表される.

$$S = c_{44} \varepsilon_m \eta \sqrt{\mu_1} \cos \theta \sqrt{\frac{r_o}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (26)$$

パンチに作用するモーメント M は式(24)を用いて次式で表示される.

$$M = -\int_0^{2\pi} \int_0^{r_o} r^2 (\sigma_z)_{z=h} \cos \theta dr d\theta = -2c_{44} \varepsilon_m \eta r_o^3 \sqrt{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n c_n \quad (27)$$

ここで,

$$x_n = (-1)^{n+1} / \{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (28)$$

なお, 本問題において $h \rightarrow \infty$ とすれば, $q(\lambda) \rightarrow \gamma$ となることより無限連立1次方程式(20)は次のようになる.

$$\gamma \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda} X_m(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \frac{1}{2} \delta_{1m} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (29)$$

式(29)を解けば,

$$\gamma c_n = 4\delta_{0n}/r_0 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (30)$$

が得られ、式(23)、(24)、(26)および式(27)に対応して以下の式がそれぞれ与えられる。

$$\frac{(w_z)_{z=h}}{\epsilon_m \cos \theta} = H(r_0 - r) \frac{r}{r_0} + H(r_0 - r) \frac{2}{\pi} \left(\frac{r}{r_0} \sin^{-1} \frac{r_0}{r} - \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} \right) \quad (31)$$

$$\frac{r_0^3 (\sigma_z)_{z=h}}{M \cos \theta} = -\frac{3rH(r_0 - r)}{2\pi\sqrt{r_0^2 - r^2}} \quad (32)$$

$$\frac{r_0^{5/2} S}{M \cos \theta} = -\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \quad (33)$$

$$M = -8c_{44}\epsilon_m\eta r_0^2(\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2})/3 \quad (34)$$

式(31)～(34)は横等方性半無限体表面を半径 r_0 の円柱状剛体パンチで曲げのみを与える場合⁽¹⁴⁾に相当するとともに、無次元量表示された式(31)～(33)は等方性半無限体が曲げを受ける場合の結果⁽²²⁾と一致する。

等方性厚板の場合には、横等方性厚板の弾性定数が近似的に等方性を示すような値を用いて計算することも可能⁽²³⁾だが、等方性弾性体に対する Boussinesq の応力関数⁽²⁴⁾を利用して前述と同様な解析を行えば、式(20)に対応して未知係数 a_n ($n=0, 1, 2, \dots$) に関する次の無限連立1次方程式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} f(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} X_m(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - \frac{1}{2} \delta_{1m} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (35)$$

ここで、

$$f(\lambda) = \sinh^2 \lambda h / (\lambda h + \sinh \lambda h \cdot \cosh \lambda h) \quad (36)$$

厚板上面の変位や応力等は a_n を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{(w_z)_{z=h}}{\epsilon_m \cos \theta} = & \frac{r_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \{f(\lambda) - 1\} \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_n(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda - \frac{rr_0}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\int_0^{\infty} \left\{ Z_n(\lambda) - \frac{2 \sin \lambda r_0}{\lambda \pi r_0} \right\} \{J_0(\lambda r) \right. \\ & \left. - J_2(\lambda r)\} d\lambda + \frac{2}{\pi r_0} \left\{ H(r_0 - r) \frac{\pi}{2} + H(r - r_0) \left(\sin^{-1} \frac{r_0}{r} - \frac{r_0 \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r^2} \right) \right\} \right] \quad (37) \end{aligned}$$

$$\frac{r_0^3 (\sigma_z)_{z=h}}{M \cos \theta} = -\frac{r_0 H(r_0 - r)}{2\pi\sqrt{r_0^2 - r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{2n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right) / \sum_{n=0}^{\infty} x_n a_n \quad (38)$$

$$\frac{r_0^{5/2} S}{M \cos \theta} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n / \sum_{n=0}^{\infty} x_n a_n \quad (39)$$

$$\frac{(1-\nu)M}{G\epsilon_m r_0^3} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x_n a_n \quad (40)$$

ここで、 G, ν はそれぞれ横弾性係数およびポアソン比である。式(37)～(40)より、これらの無次元量は等方性厚板の材質、すなわち G と ν には依存しないことがわかる。

2.3 剛体パンチで偏心圧入する場合 図1のように、パンチに軸荷重 P と曲げモーメント M を同時に受ける場合は、それぞれ P により ϵ_p 、 M により ϵ_m の微小変位を生じている状態を重ね合わせて得られる。すなわち、パンチを横等方性厚板表面に偏心圧入する場合のパンチ接触部の応力 $(\sigma_z)_{z=h}$ は、式(24)と軸荷重のみを受ける場合の結果⁽¹⁹⁾を重ね合わせて次式で表示できる。

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_{z=h} = & c_{44}\eta\sqrt{\mu_1} \frac{H(r_0 - r)\epsilon_p}{\pi\sqrt{r_0^2 - r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{r} a_n + \frac{\epsilon_m}{\epsilon_p} r_0 c_n \cos \theta \right) T_{2n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right) = \frac{H(r_0 - r)M}{2\pi\sqrt{r_0^2 - r^2}} \\ & \times \left[\frac{P}{Mr} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{2n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right) / \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} a_n \right\} + \frac{1}{r_0^2} \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_{2n+1} \left(\frac{r}{r_0} \right) / \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x_n c_n \right\} \right] \quad (41) \end{aligned}$$

ここで、 a_n は文献(19)の無限連立1次方程式の根である。 M が大きくなって、パンチ面が厚板から離れる場合には前節の解析は適用できない。したがって、曲げの解析が適用できるのは式(41)で表される $(\sigma_z)_{z=h}$ が常に負の場合である。

めには、これらのパラメータを工学的弾性定数を用いて次のように表しておく都合がよい。

$$\left. \begin{aligned} \mu_i &= (x \pm \sqrt{x^2 - 4\omega})/2 \\ k_i &= \frac{(\xi - \nu^2)\mu_i - \rho((1-\nu)\xi - 2\nu^2)/2}{(1+\nu)\nu\xi + \rho((1-\nu)\xi - 2\nu^2)/2} \\ \beta_i &= 2/(\rho(1+k_i)) \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad (42)$$

3. 数 値 結 果

異方性パラメータ μ_i, k_i, β_i ($i=1, 2$) は、横等方性弾性体の弾性定数値 c_{mn} を用いて表現することができ、解析結果を材料異方性と関連づけて考察するた

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= E'/E, \quad \rho = G'/G \\ x &= 2\xi(1+\nu)(\xi-\nu')/\{\rho(\xi-\nu'^2)\} \\ \omega &= \xi^2(1-\nu'^2)/(\xi-\nu'^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

であり, E, G, ν はそれぞれ等方性面内の縦弾性係数, 横弾性係数およびポアソン比, “'” を付けた諸量は異方性主軸方向に関する弾性定数である。

本研究では横等方性材料として, 表 1 に示す一方向ガラス繊維強化複合材料 (E/E)⁽²⁵⁾, ウシ大腿骨の緻密骨 (Bone)⁽²⁶⁾ および単結晶カドミウム材 (Cd)⁽²⁷⁾ を対象に数値計算を行った。また, 比較のために式 (35) ~ (40) から得られる等方性 (Iso.) の場合の結果についても併せて示した。

c_n と a_n を決定するためには, それぞれ無限連立一次方程式 (20), (35) の係数を求める必要があり, これらを直接数値積分する項とベッセル関数の漸近展開式を利用する項とに分離して計算を行った⁽²⁴⁾。

表 2 は $h/r_0 = 1.5, 2$ における各々の材料に関する係数 c_n と a_n を示したものである。係数の収束はいずれの場合も良好であり, 係数の項数は, 応力値や係数 S が十分な精度で収束することを確認して決定した。

図 2~6 にパンチにより曲げモーメントのみを与えた場合の結果を示す。

図 2 は厚板上面のパンチ非接触領域における変位の無次元量 $(\bar{w}_z)_{z=h} = (w_z)_{z=h}/\epsilon_m \cos \theta$ の r 軸方向分布図である。板厚が一定のもとでは $(\bar{w}_z)_{z=h}$ の大きさは $Cd > Iso. > Bone > E/E$ の関係で与えられる。板が厚く

なるにつれて $(\bar{w}_z)_{z=h}$ は増加し, $h/r_0 = \infty$, すなわち半無限体の場合には横等方性材と等方性材の分布は一致する。

図 3 および図 4 は板厚のパラメータをそれぞれ $h/r_0 = 1.5, 2$ とした場合のパンチ接触面の無次元化された応力 $(\bar{\sigma}_z)_{z=h} = r_0^3(\sigma_z)_{z=h}/M \cos \theta$ の分布図であ

図 2 $(\bar{w}_z)_{z=h}$ の分布

図 3 $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の分布 ($h/r_0 = 1.5$)

図 4 $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ の分布 ($h/r_0 = 2$)

表 1 弾性定数値

	ξ	ρ	ν	ν'
E-glass/Epoxy V _f =0.63*	3.44	1.01	0.37	0.24
Compact Bone**	2.22	1.07	0.51	0.36
Cadmium	0.35	0.45	0.12	0.25

* fiber volume fraction

** bovine Haversian femoral compact bone

表 2 係数 c_n と a_n の値

n	h/r ₀ =1.5			
	E/E	Bone	Cd	Iso.
0	0.4185559D+01	0.3584878D+01	0.1561066D+01	0.4296930D+01
1	-0.3633574D+00	-0.1801622D+00	-0.8264623D-02	-0.4420525D-01
2	0.3566797D-01	0.1726995D-01	0.3918755D-03	0.2506174D-02
3	0.1695105D-03	-0.5709157D-03	-0.1220463D-04	-0.9132271D-04
4	-0.3279057D-03	-0.4644957D-04		0.2538931D-05
5	0.1686128D-04	0.6409943D-05		-0.1708367D-06
6	0.1552351D-05			
n	h/r ₀ =2			
	E/E	Bone	Cd	Iso.
0	0.3746630D+01	0.3301846D+01	0.1524162D+01	0.4143402D+01
1	-0.1596593D+00	-0.7010715D-01	-0.2307231D-02	-0.1275730D-01
2	0.1497774D-01	0.5638395D-02	0.7017779D-04	0.4759863D-03
3	-0.5420937D-03	-0.2520899D-03	-0.1677662D-05	-0.1248781D-04
4	-0.2903889D-04	0.4143808D-05		0.1017161D-05
5	0.4356741D-05	-0.3284123D-06		-0.8783247D-06
6	0.1742035D-06			

る。 $(\sigma_x)_{x=h}$ はパンチ縁で特異性を有し無限大になるが、板厚の増加に伴って材料による差異は減少し、半無限体の場合には等方性の結果と一致する。

図5は曲げモーメント M の板厚による変化を示した図である。 M は常に半無限体の場合よりも大きく、いずれの材料の場合にも板が薄くなるほど M は著しく増加し、逆に板が厚くなると単調に減少して半無限体の結果に近づく。

図6は式(25)で定義される係数 S の板厚による変化を示した図である。パンチ縁近傍における接触応力場の強さを表す係数 S は、板厚の増加とともに急激に増加して半無限体の結果に漸近する。また、等方性材とカドミウム材では、 $h/r_0 > 3$ において S は半無限体の結果とほぼ一致する。

図1のように、パンチに軸荷重 P と曲げモーメント M を同時に受け、かつパンチ全面が接触している場合にのみ曲げの結果を適用することができ、 M が大きくなってパンチ面の一部が厚板から離れる場合には、本結果を適用することはできない。そこで、式(41)を用いて $(\sigma_x)_{x=h} < 0$ ($0 \leq r \leq r_0$) となる領域を図7および図8に示した。それぞれの曲線上では $r=r_0$, $\theta=\pi$ で $(\sigma_x)_{x=h}=0$, すなわちパンチ縁の一部が厚板表面から離れる臨界状態になる。

図7は $(r_0 P/M)_{cr}^{min.}$ と h/r_0 の関係を示したものであ

る。 $(r_0 P/M)_{cr}^{min.}$ 以上の場合に曲げの結果が適用できる。板厚が小さいほど $(r_0 P/M)_{cr}^{min.}$ は大きく、横等方性材料としてはカドミウム材のみが等方性材よりも小さな値となる。板厚の増加に従い $(r_0 P/M)_{cr}^{min.}$ は単調に減少して、横等方性半無限体の場合には等方性半無限体の結果 $(r_0 P/M)_{cr}^{min.}=3$ と一致する。

これに対して、図8は $(\epsilon_m/\epsilon_p)_{cr}^{max.}$ と h/r_0 の関係を示したもので、 $(\epsilon_m/\epsilon_p)_{cr}^{max.}$ 以下の場合に曲げの結果が適用できる。 $(\epsilon_m/\epsilon_p)_{cr}^{max.}$ は板が厚くなるとともに減少するが、 $h/r_0 > 4$ においても半無限体の結果よりもかなり大きな値であり、板厚の影響が顕著であることがわかる。

図9および図10は横等方性厚板上面を剛体パンチで偏心圧入した場合 ($\epsilon_m/\epsilon_p=0.5$) の無次元化された変位および応力 $(w_x^*)_{x=h}=(w_x)_{x=h}/\epsilon_p$, $(\sigma_x^*)_{x=h}=r_0^2(\sigma_x)_{x=h}/P$ の x 軸方向分布図である。図9より $(w_x^*)_{x=h}$ はいずれの材料もパンチ縁 ($x=\pm r_0$) において半径方向勾配が無限大になるなど、その分布傾向は等方性の場合と同様であるが、板が薄くなるにつれて $(w_x^*)_{x=h}$ は減少するとともに、材料の相違による定量的な差が現れ、その大きさの関係はいずれの板厚に対しても $Cd > Iso. > Bone > E/E$ となる。また、半無限体

図5 M の板厚による変化

図6 S の板厚による変化

図7 $(r_0 P/M)_{cr}^{min.}$ と h/r_0 の関係

図8 $(\epsilon_m/\epsilon_p)_{cr}^{max.}$ と h/r_0 の関係

図 9 $(w_z^*)_{z=h}$ の分布 ($\epsilon_m/\epsilon_p=0.5$) 図 10 $(\sigma_z^*)_{z=h}$ の分布 ($\epsilon_m/\epsilon_p=0.5$)

の分布図はパンチ縁の一部 ($x=-r_0$) が弾性体と離れる直前の状態を示している。図 10 より $(\sigma_z^*)_{z=h}$ はパンチ縁でそれぞれ特異性を有するとともに、 $x=-r_0$ のパンチ縁近傍で極小値を生じ、板が薄いほどその極小値は大きくなる。 $(\sigma_z^*)_{z=h}$ の大きさは板厚が同じならば、 $x=-r_0$ のパンチ縁からパンチ中心部付近では $E/E > \text{Bone} > \text{Iso.} > \text{Cd}$ 、 $x=r_0$ のパンチ縁近傍では逆の関係で与えられる。また、半無限体の場合には $x=-r_0$ のパンチ縁で $(\sigma_z^*)_{z=h}=0$ となる。

4. 結 言

剛体床上に置かれた横等方性厚板上面に滑らかな平面底を有する円柱状剛体パンチで曲げモーメントのみを作用させる非軸対称弾性接触問題を三次元異方性弾性論に基づいて厳密に解析した。3種類の横等方性材料を対象例とした数値計算を行い、厚板上面における垂直変位および垂直応力の分布等を示すと同時に、等方性弾性体の結果と比較することにより、変位および応力等に及ぼす材料異方性や板厚の影響を明示した。さらには、曲げのみの結果と軸対称圧入の結果を重ね合わせることによって、剛体パンチで横等方性厚板を偏心圧入する場合の厚板の応力場を明らかにした。

文 献

- (1) Saha, S., *J. Biomech.*, **6** (1973), 641.
- (2) Askew, M. J. and Mow, V. C., *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **100**(1978), 105.
- (3) Lanir, Y., *Biorheology*, **24**(1987), 189.

- (4) Misra, J. C. and Roy, S., *Comput. Math. Applications*, **17** (1989), 1493.
- (5) Elliott, H. A., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **45**(1949), 621.
- (6) Deutsch, E., *Acad. Pol. Sci. Class. Q.*, **11**(1963), 311.
- (7) Conway, H. D., Farnham, K. A. and Ku, T. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **34**(1967), 491.
- (8) Guidera, J. T., Lardner, R. W. and Tupholme, G. E., *J. Eng. Math.*, **12**(1978), 77.
- (9) Pouyet, J. and Lataillade, J. L., *Lett. Appl. Eng. Sci.*, **17** (1979), 765.
- (10) Fabrikant, V. I., *Int. J. Eng. Sci.*, **24**(1986), 785.
- (11) Fabrikant, V. I., *J. Appl. Math. Mech.*, **35**(1971), 147.
- (12) Fabrikant, V. I., Selvadurai, A. P. S. and Xistris, G. D., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **52**(1985), 681.
- (13) Fabrikant, V. I., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **53** (1986), 798.
- (14) Fabrikant, V. I., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **55** (1988), 604.
- (15) Fabrikant, V. I., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **57** (1990), 596.
- (16) England, A. H., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **58**(1962), 539.
- (17) Tsai, Y. M., *J. Elasticity*, **16**(1986), 179.
- (18) 原・坂本・渋谷・小泉, 機論, **54-501**, A(1988), 983.
- (19) Sakamoto, M., Hara, T., Shibuya, T. and Koizumi, T., *JSME Int. J., Ser. I*, **34-2**(1991), 130.
- (20) Elliott, H. A., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44**(1948), 522.
- (21) 原・秋山・渋谷・小泉, 機論, **55-514**, A(1989), 1339.
- (22) 牟岐, 機論, **21-111**(1955), 767.
- (23) Atsumi, A. and Itou, S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **41**(1974), 507.
- (24) Hara, T., Shibuya, T., Koizumi, T. and Nakahara, I., *Theo. Appl. Mech.*, **25**(1975), 505.
- (25) Chen, C. H., *J. Comp. Mat.*, **1**(1967), 30.
- (26) Reilly, D. T. and Burstein, A. H., *J. Biomech.*, **8**(1975), 393.
- (27) Huntington, H. B., *Solid State Physics*, **7**(1957), 213.