統一形非弾性構成式を用いた 切欠材の変形挙動の有限要素解析*

小久保 一之^{*1}, 今谷 勝次^{*2}, 井上 達雄^{*3}

Application of a Unified Constitutive Model to Finite Element Analysis of Notched Cylinder

Kazuyuki KOKUBO, Shoji IMATANI and Tatsuo INOUE

Rate dependence becomes more remarkable with increasing temperature in the inelastic behavior of engineering materials. When we deal with a stress/strain response in a structure, a sophisticated constitutive relationship must be applied to the stress analysis since the materials exhibit complicated characteristics under multiaxial stress states. The aim of this paper is to apply a unified constitutive model to finite element analysis of a notched cylinder. Experimental verification is carried out for a PCA material (Primary Candidate Alloy for a fusion reactor component). The local strain response near the notch root is measured by an electric-capacitance type strain gauge.

Key Words: Plasticity, Constitutive Equation, Finite Element Method, Rate Dependence, Elevated Temperature, Stress Concentration, Strain Concentration

1. 緒 言

高温における構造材料の変形挙動は、クリープ変形に代表されるように、速度依存性を持つことが特徴であり、塑性変形とクリープ変形が互いに影響を及ぼしあう塑性-クリープ相互作用⁽¹⁾のために非常に複雑な挙動を示す。さらに、最近では高温機器の過酷な条件下での使用が多くなってきており、その健全性を確保するためには、広い範囲に適用できる非弾性構成式を構築し、構造物と部材の強度および寿命を精度よく評価する必要がある⁽²⁾⁽³⁾。

塑性-クリープ相互作用を考慮した非弾性構成式は、現在いくつか提案されているが、中でも塑性ひずみとクリープひずみとを分離せずに非弾性ひずみとして一括して取扱う統一形構成式(unified constitutive equation)が注目されており、さまざまな負荷経路に対するその適用可能性や有限要素法への適用⁽⁴⁾が検討されている。統一形構成式では、モデル中に導入する内部状態変数(internal state variable)の変化によっ

て塑性変形とクリープ変形を同時に記述できるため、その組合せによって複雑な負荷履歴を受ける材料挙動を表現することが可能であると考えられる。

統一形構成式を有限要素法に適用した例はいくつか見られる。Peirce ら⁽⁵⁾は、弾性-クリープ問題に対して接線係数法を提案し、解析解の振動と発散を解消し、効率的な増分計算が行えることを示している。Chen-Krempl⁽⁶⁾らは、この手法を用いて Overstress の概念に基づく非弾性構成式に適用して、解の精度について検討を加えている。

本論文では、統一形非弾性構成式に対して接線係数法を用いて有限要素方程式を定式化し、環状切欠材の引張りおよびねじり負荷における変形解析に適用した。そして、高温下での検証実験を行い、高温用容量形変位計“ストレイン・ベッカー”を用いて切欠底近傍のひずみを測定して、解析結果と比較し解析の妥当性を検証した。

2. 統一形非弾性構成式

本論文では Perzyna⁽⁷⁾によって提案された超過応力理論に修正を加える。超過応力理論に基づいて、降伏関数 F が静的な降伏応力 r を超えたときに非弾性変形が生じるものとする。さらに、静的降伏応力 r

* 原稿受付 平成3年7月1日。

^{*1} 京都大学大学院 (〒606 京都市左京区吉田本町)。

^{*2} 正員, 京都工芸繊維大学工学部 (〒606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*3} 正員, 京都大学工学部。

の増大, 減少および降伏曲面の移動を考慮することによって, 複雑な負荷履歴にも適用できる可能性があると考えられる。

非弾性ひずみ速度の大きさは, 降伏曲面を超える部分の大きさに依存するとし, 非弾性ひずみ速度に対して法線則を適用した。また, 定常クリープ速度が Norton 則 (べき乗則) に従うとすると, 指数 n を用いて非弾性ひずみ速度は次式のように与えられる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left\langle \frac{F-r}{D} \right\rangle^n \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \equiv \omega p_{ij} \quad (1)$$

ただし,

$$F = \left\{ \frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha'_{ij})(s_{ij} - \alpha'_{ij}) \right\}^{1/2} \quad (2)$$

$$\omega = \left\langle \frac{F-r}{D} \right\rangle^n, \quad p_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

ここで, s_{ij} , α'_{ij} はそれぞれ応力 σ_{ij} と背応力 α_{ij} の偏差成分を表し, F には Mises 形の降伏関数を用いる。 D は速度依存性を表現するために導入した抗応力である。 ω は非弾性ひずみ速度の大きさを, p_{ij} はその方向を表す。さらに, 移動硬化を表す背応力 α_{ij} の移行式は変形の進行に伴う硬化と背応力の原点への回復を考慮して

$$\dot{\alpha}_{ij} = C_1 \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} - C_2 (s_{kl} - \alpha'_{kl}) \dot{\epsilon}_{kl} \alpha'_{ij} - C_3 \bar{\alpha}^{n-1} \alpha' \quad (4)$$

とする。パラメータ C_1 は硬化を, C_2 は動的回復を表すから, 右辺の第 1 項と第 2 項で応力-ひずみ関係の丸み現象 (rounding phenomenon) や Bauschinger 効果を表現できる。一方, パラメータ C_3 は Bailey-Orowan 形の回復作用によって, 速度に依存する熱的回復を表し, クリープ変形によっても背応力が応力空間の原点へ回復することを示している⁽⁸⁾。したがって, 塑性-クリープ相互作用を記述する可能性がある。一方, 静的降伏応力 r に関しては, 温度依存項 r_T と変形によって誘起される項 r_a とに分けられるとし,

$$r = r_T + r_a \quad (5)$$

と表す。温度が一定の場合には, r_T が降伏応力の初期値を示し, 変形に伴って r_a が変化することで繰返し硬化 (軟化) 挙動を記述することができる。 r_a の変化は, 背応力の大きさによって支配されるとし, その移行式を次のように規定する。

$$\dot{r}_a = R_1 [R_2(\bar{\alpha}) - r_a] (s_{ij} - \alpha'_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} \quad (6)$$

パラメータ R_1 は硬化の速度を支配し, 変形に伴って $R_2(\bar{\alpha})$ に収束する。

3. 有限要素法への適用

3.1 接線係数法を用いた構成関係の表示 本論

文で解析に用いる非弾性構成式は式 (1) ~ (6) であるが, このような形式の非弾性構成式は, 統一形構成式の典型的なものであり, 以下で展開する接線係数法による表示や有限要素法への定式化においても, 従来から提案されてきた統一形構成式^{(8)~(10)}を用いる場合と同様の取扱いが可能である。

弾性変形については, Hooke の法則を速度形で,

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (7)$$

と与える。ここで, E_{ijkl} は, 弾性定数である。全ひずみ速度は, 弾性ひずみ速度と非弾性ひずみ速度との和で表され, この時応力速度と全ひずみ速度の関係は, 次式で表される。

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \omega E_{ijkl} p_{kl} \quad (8)$$

式 (8) を時間について積分すると, 非弾性ひずみが次第に大きくなり Euler 法では解が振動することが知られている。接線係数法では Crank-Nicolson 法と同様の手法で, あるステップでの ω_t と次のステップでの $\omega_{t+\Delta t}$ の間を, 重み θ を用いて

$$\omega^* = (1-\theta)\omega_t + \theta\omega_{t+\Delta t} \quad (9)$$

と補間する。ここで $\omega_{t+\Delta t}$ はすべての引数についての Taylor 展開で与えられるとし,

$$\omega_{t+\Delta t} = \omega_t + \frac{\partial \omega_t}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial \omega_t}{\partial r} \Delta r \quad (10)$$

とする。このようにして得られた ω^* を式 (8) の ω に代入すると, 応力速度と全ひずみ速度の関係が

$$\dot{\sigma} = D_{ijkl}^{\text{tan}} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{1+\xi} \left(\omega_t + \frac{\xi}{h} C_3 \bar{\alpha}^{n-1} p_{mn} \alpha'_{mn} \right) \times E_{ijkl} p_{kl} \quad (11)$$

と求められる。ただし, D_{ijkl}^{tan} , ξ および h は次のように与えられる。

$$D_{ijkl}^{\text{tan}} = E_{ijkl} - \frac{\xi}{1+\xi} \cdot \frac{1}{h} E_{ijpq} p_{pq} p_{rs} E_{rskl} \quad (12)$$

$$\xi = \Delta t \cdot \theta \cdot \frac{n}{D} \left\langle \frac{F-r}{D} \right\rangle^{n-1} h \quad (13)$$

$$h = \frac{3E}{2(1+\nu)} + C_1 - C_2 \cdot F \cdot p_{ij} \alpha'_{ij} + R_1 (R_2 - r_a) F \quad (14)$$

式 (9) 中のパラメータ θ は $0 \leq \theta \leq 1$ であり, $\theta=0$ のときは単純な Euler 法と一致し, $\theta=1/2$ のときは Crank-Nicolson 法となる。接線係数法では $\theta=1$ を採用する。式 (8) を増分計算すると不安定な解が得られることになるが, 式 (11) では θ を大きくするほど安定になる⁽¹¹⁾。また式 (13) からわかるように, 速度形の構成関係式には設定すべき時間増分 Δt が陽に現れ, 式 (11) ~ (14) に示した微分方程式系は, 本来解くべき式 (8) とは異なっている。すなわち, 上に示したような

方法では、解くべき微分方程式を Taylor 展開によって近似した微分方程式系を解くことになる。

3.2 有限要素方程式の定式化 有限要素方程式を得るために、前節で与えた構成関係をマトリックス表示することにする。本研究では、引張り-ねじり組合せ負荷を扱うため、一般には三次元問題となる。しかしながら、軸対称体が引張り（内圧）-ねじりを受けるときは、変位は円周方向の座標 θ に依存せず、半径方向座標 r と軸方向座標 z のみで表せる。したがって、膨大な三次元の要素分割を行う必要はなく、以下に示すような擬二次元問題として取扱える。

すなわち、図 1 に示すような節点 i, j, k を持つ三角形リング要素を採用すると、引張り-ねじりの変形を受けるときのひずみマトリックス $\{\epsilon\}$ は、変位-ひずみマトリックス $[B]$ を用いて

$$\{\epsilon\} = [B]\{u\}^T \quad (15)$$

と表される。ここで、マトリックス表示したひずみ $\{\epsilon\}$ 、節点変位 $\{u\}^T$ および $[B]$ マトリックスはそれぞれ

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{rr}, \epsilon_{zz}, \dots, \gamma_{rz}, \gamma_{z\theta}, \dots\} \quad (16)$$

$$\{u\} = \{u_{ir}, u_{iz}, u_{i\theta}, u_{jr}, \dots, u_{kr}, \dots\}^T \quad (17)$$

$$[B] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

$$a_i = r_i z_k - r_k z_i$$

$$b_i = z_j - z_k, \quad c_i = r_j - r_k$$

$$S_i = (a_i + b_i r + c_i z)/r$$

$$T_i = -(a_i + c_i z)/r$$

$$A = \text{三角形の面積} \quad (18)$$

で与えられる。応力速度の表示式(11)も簡単にマトリックス表示すると

図 1 軸対称体の引張り-ねじり状態における三角形リング要素

$$\{\dot{\sigma}\} = [D^{tan}]\{\dot{\epsilon}\} - \Omega\{p\} \quad (19)$$

となる。これらの式を速度形の仮想仕事の原理に代入すると、有限要素方程式は、

$$\sum_e \left(\int_{V_e} [B]^T [D^{tan}] [B] \{\dot{u}\}^T dV - \int_{V_e} \Omega [B]^T \{p\} dV - \int_{S_{te}} [N]^T \{\bar{t}\} dS - \int_{V_e} [N]^T \{\rho \dot{b}\} dV \right) = 0 \quad (20)$$

となる。ここで、 $\{t\}$ は、物体表面に作用する表面力、 $\{b\}$ は物体力、 $[N]$ は形状関数である。さらに、

$$[K] = \sum_e [K]^e = \sum_e \int_{V_e} [B]^T [D^{tan}] [B] dV \quad (21)$$

$$\{\dot{L}_t\} = \sum_e \{\dot{t}\}_e = \sum_e \int_{S_{te}} [N]^T \{\bar{t}\} dS \quad (22)$$

$$\{\dot{L}_b\} = \sum_e \{\dot{b}\}_e = \sum_e \int_{V_e} [N]^T \{\rho \dot{b}\} dV \quad (23)$$

$$\{\dot{L}_\omega\} = \sum_e \{\dot{p}\}_e = \sum_e \int_{V_e} \Omega [B]^T \{p\} dV \quad (24)$$

とすると、結局系全体の方程式は

$$[K]\{\dot{u}\} = \{\dot{L}_t\} + \{\dot{L}_b\} + \{\dot{L}_\omega\} \quad (25)$$

で表される。

3.3 入/出力方法 解析条件の入力および出力には、日本パフェック社の汎用プリ/ポスト・プロセッサ PIGS を用いて対話形の解析システムを開発した。プリ・プロセッサで節点や要素に関する情報を入力し、自動的にデータを作成する。そのデータを解析プログラムのフォーマットに合わせるとともに剛性マトリックスのバンド幅を小さくするように節点番号を付け替える。有限要素解析を行った結果は再度ポスト・プロセッサでのデータ解析に供される。

4. 解析および実験結果

4.1 実験条件 供試材は、核融合炉第一壁用構造材料として開発されたオーステナイト系ステンレス鋼の一種 PCA (Primary Candidate Alloy) を使用した。その化学成分を表 1 に示す。これは SUS 316 鋼に類似した成分を持ち、耐中性子損傷を向上するために Cr と Ni の量を調節し、Ti を少量添加してある。

実験は 700°C で行い、切欠底の標点間距離 (GL) 約 1 mm の変位を容量型変位計ストレイン・ベッカーを用いて測定した。制御ひずみは $GL = 20 \text{ mm}$ とした。図 2 に試験片の形状を示す。図 3 は、ストレイン・ベッカーと、その試験片への取付の様子を模式的に示したものである。ストレイン・ベッカーは 700°C までの高温変形に適用可能であり、引張変形だけでなく、ねじり変形に対してもひずみ測定が可能のように改良してあ

る。

4.2 解析条件 構成式に表れる材料定数を、表 2 に示す。これらは、700°Cにおける PCA 材の変形挙動特性、すなわち単軸引張り、繰返し変形ならびにクリープ変形から決定した。解析領域は、対称性を考慮して 1/4 の部分とし、図 4 のような要素分割を行った。要素の端部 ($GL/2=10\text{ mm}$) に強制変位を与え、ストレイン・ペッカーでの測定部での変位を出力し、比較検討した。ただし、ストレイン・ペッカー測定部での変位量は、取付位置に近い 2 個の節点間変位を線形補間して算出した。

4.3 解析結果と実験結果の比較検討 切欠材の非弾性変形挙動に対する速度依存性の影響を考慮して、表 3 に示すような負荷形式を設定した。いずれの場合も、公称ひずみ振幅 ($\Delta\epsilon_{cl}/2$) は、0.2%とした。

図 5 は、制御ひずみと切欠底での局所ひずみの履歴を示す。図 5 (a) は、負荷 I (引張り-圧縮での fast-fast) の場合について、図 (b) は負荷 II (slow-slow) の場合について示したものである。どちらの場合においても、切欠底でのひずみが非弾性変形の進行とともに増大している。また、局所ひずみの軌跡は直線では

なく、ひずみ集中は変形に伴って変化することがわかる。ひずみ速度の大きい I の場合とひずみ速度の小さい II の場合を比べると、局所ひずみにはほとんど差がない。これは、PCA 材が、700°Cではひずみ速度依存性をほとんど示さないためであると考えられる。実験結果と解析結果とは良好に一致しており、本モデルの妥当性が検証できた。

次に、負荷様式が繰返しねじりのとき (III と IV) の場合について、制御ひずみと局所ひずみの履歴をそれぞれ図 6 (a) と (b) に示す。この場合にも、先の引張り-圧縮の場合と同様、ひずみ集中における速度依存性はほとんどない。しかしながら、図 5 と比較すると、局所ひずみ応答が異なっている。すなわち、ねじり変形では試験片中央部に弾性域があるため、切欠底断面が全面降伏する引張り-圧縮変形に比べてひずみの集中が大きくなる。解析結果は、実験での傾向を定量的にも定性的にもよく表していることがわかる。

図 7 (a) と (b) は、それぞれ負荷形式 I と II における切欠底での応力-ひずみ関係である。ここでの応力

表 1 供試材の化学成分 (wt, %)

C	Si	Mn	P	S
0.06	0.52	1.67	0.021	0.004
Ni	Cr	Mo	Ti	B
15.33	14.44	2.2	0.25	0.003

図 2 試験片形状

図 3 容量変位計ストレイン・ペッカー

表 2 解析に用いた材料定数 (PCA at 700°C)

$E = 155\text{ GPa}$	$C_1 = 4.04 \times 10^4$
$\nu = 0.3$	$C_2 = 2.25$
$n = 8.2$	$C_3 = 1.0 \times 10^{-16}$
$D = 165$	$R_1 = 0.35$
$r_T = 112$	$R_2 = 6 \cdot \bar{\alpha}^{0.45}$

表 3 実験における負荷形式

	Global strain rate (Gage length of 20mm)	Loading condition
I	0.01 (%/s)	Axial cyclic
II	0.0005	straining
III	0.01	Shear cyclic
IV	0.0005	straining

図 4 有限要素分割 ($K_t=1.5$)

図5 引張・圧縮繰返し変形における局所ひずみ応答
図(a)は負荷I(fast-fast)図(b)は負荷II
(slow-slow)

図6 繰返しねじり変形における局所ひずみ応答
図(a)は負荷III(fast-fast)図(b)は負荷IV
(slow-slow)

は、軸力を切欠底の最小断面積で除した公称応力である。ひずみ速度の小さいIIのほうの応力が小さくなっているが、いずれの場合に対しても、解析結果は実験結果より大きい応力を予測している。このように応力を過大評価する原因は、おもに実験における温度の制御、特に切欠実験での均熱の保持が十分になされなかったのではないかと考えられる。

ポスト・プロセッサを用いた応力分布の出力例を図8に示す。図8(a)は、公称相当ひずみ0.2%まで相当ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{GL}=0.0005\%/s$ でねじり変形を与えた場合であり、図8(b)は、弾性解析の結果である。せん断応力分布に関しては、軸方向に等高線が表れるが、非弾性解析では高応力部分が切欠底周辺でやや中心軸方向に広がっていることがわかる。これは切欠底での応力緩和のためであり、非弾性変形によって切欠底のひずみ集中は進行するが応力は緩和する。一般に、弾性変形での応力-ひずみ関係の傾きに比べ、非弾性変形での加工硬化係数が小さければ小さいほど、ひずみの集中は大きくなり逆に応力は緩和する。

(a)

(b)

図7 切欠材の応力-ひずみ関係

図 8 ねじり変形における応力分布

5. 結 言

著者らがすでに提案した統一形非弾性構成式を有限要素法に適用し、切欠材の変形解析に応用した。速度依存性による影響を考慮し、ひずみ速度の異なる引張り-圧縮繰返し変形とねじり繰返し変形を設定して解析を行った。また、高温用容量形変位計、ストレイン・ペッカーを用いて切欠底での変位を測定し、有限要素解析による結果と比較した。

解析結果は、引張り-圧縮繰返し変形の場合もねじり繰返し変形の場合にも実験結果と良く一致し、解析の妥当性が検証された。そして、構成関係が速度依存性を持つ場合には、図5～7で得られたように応力分布とひずみ分布は、変形速度によって変化することが示された。このことは、高温機械構造物の健全性を確保する上での非弾性解析の必要性を示唆している。

なお、本研究の一部は、文部省科学研究費補助金総

合研究 A (No. 01302026) によって行われたことを付記する。

文 献

- (1) 井上, 材料, **32**-357(1983), 594.
- (2) Inoue, T., Yoshida, F., Ohno, N., Kawai, M., Niitsu, Y. and Imatani, S., Nucl. Eng. Des., **126**(1991), 1.
- (3) Inoue, T., Okazaki, M., Igari, T., Sakane, M. and Kishi, S., 文献(2)の13ページ.
- (4) 日本材料学会高温強度部門委員会非弾性解析法調査作業グループ報告書(1991).
- (5) Peirce, D., Shih, C. F. and Needleman, A., *Comput. & Struct.*, **18**-5(1984), 875.
- (6) Chen, H. and Krempl, E., *Comput. & Struct.*, **22**(1986), 573.
- (7) Perzyna, P., *Adv. Appl. Mech.*, **11**(1971), 313.
- (8) Chaboche, J. L. and Rousselier, G., *Trans. ASME., PVT*, **105**(1983), 153.
- (9) Miller, A., *Trans. ASME, EMT*, **98**(1987), 97.
- (10) Kujawski, D. and Mroz, Z., *Acta. Mech.*, **30** (1980), 213.
- (11) 例えば, Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method* (1977), 477, McGraw-Hill.