任意分布力を受ける内部き裂の応力拡大係数の解析* (平板中のだ円内部き裂に対する影響係数の解析とその応用)

白鳥正樹^{*1}, 小川貴弘^{*2}, 西嶋章治^{*3}

Analysis of Stress Intensity Factor for Embedded Crack Subjected to Arbitrarily Distributed Surface Stresses (Analysis and Application of Influence Coefficients for Flat Plates with an Embedded Elliptical Crack)

Masaki SHIRATORI, Takahiro OGAWA and Akiharu NISHIJIMA

An influence function method has been developed to analyze stress intensity factors, K , for cracks which are subjected to arbitrarily distributed surface stresses. The method has been applied to the analysis of a series of influence coefficients for flat plates with an embedded elliptical crack. It has been shown, based upon the data of the influence coefficients, how easily the K -values for an embedded elliptical crack in a flat plate can be evaluated against arbitrarily distributed surface stresses.

Key Words: Fracture, Stress Intensity Factor, Embedded Crack, Arbitrarily Distributed Stress, Influence Function Method

1. 緒 言

き裂を有する部材の応力拡大係数 (K 値) の解析は, 構造物の強度評価などに関連して極めて重要である^{(1)~(4)}. 現在までに, 表面き裂に関する解析は, 数多く行われているが⁽⁵⁾, 内部き裂に関するものは極めて少ない⁽⁶⁾. 石田, 野口⁽⁷⁾ により, 内部き裂の精度の高い解析が行われたが, それらは遠方での引張りに対してのものであり, 熱応力や残留応力など複雑な応力分布の問題への適用は困難である. そこで, 本報では, 任意分布力を受けるき裂の問題に対して有効な, 影響関数法⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を用いて平板中のだ円内部き裂に対して一連の解析を行ったのでその結果を示す.

2. 解 析 方 法

本手法の基礎は, 図1に示す重ね合わせの原理に基づいている. すなわち図1(a)に示すような任意の外力 T を受けるき裂を有する弾性体の問題(熱応力や残留応力の問題も含む)は, 同図(b)に示すき裂のない

弾性体が外力 T を受ける問題と, (b)の仮想き裂面に生じる分布力 T_0 と等値逆符号の $-T_0$ なる分布力をき裂面 S_{rc} に受けるき裂材の問題[同図(c)]の和として与えられる. したがって(a)で示される問題の K 値は(c)で示される問題の K 値と等しく, き裂面上で任意分布力を受けるき裂材の K 値を求める手法を開発しておけば十分である.

影響関数法によれば, 上記問題を以下の手順で極めて効率的に解析することができる.

(1) き裂面に形状関数で表される単位分布力を負荷した場合の K 値のリスト K_0 をあらかじめつづておく. この単位分布力はき裂面上の一つの要素に注目した場合, 図2に示す分布を持ち, これを式で表せ

図1 重ね合わせの原理

* 原稿受付 平成3年7月5日.

*¹ 正員, 横浜国立大学工学部 (〒240 横浜市保土ヶ谷区常盤台156).

*² 准員, (株)アマダ (〒259-11 伊勢原市石田200).

*³ 学生員, 横浜国立大学大学院.

ば

$$\bar{\sigma}_j(\xi, \eta) = N_j(\xi, \eta) \dots\dots\dots (1)$$

となる。ただし K 値の解析には、2 次の形状関数を持つ 20 節点アイソパラメトリック要素で構成される三次元有限要素法プログラムを使用し、式(1)の $N_j(\xi, \eta)$ はこの要素の一つの面上における二次元の形状関数である⁽⁸⁾。この単位分布力の概念を用いると、き裂面上のある要素の面に分布する任意分布力は、

$$\sigma(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^8 N_j(\xi, \eta) \sigma_j \dots\dots\dots (2)$$

で近似できる。ここに σ_j は任意分布力の節点 j における値である。一方 K_{ij} はき裂面上の節点 j に単位分布力を作用させた場合のき裂前縁の節点 i における K 値をあらわし、これを影響係数と呼ぶ。

(2) き裂のない部材の応力解析を行い(熱応力および残留応力等の解析も含む)、仮想き裂面上の応力分布を求める。この解析により式(2)の σ_j が求められる。

(3) 上記(1)で求めた影響係数 K_{ij} のリストと(2)で求めた σ_j のリストから、き裂面上で任意に分布する表面力を受ける問題の K 値は、

$$K_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} \sigma_j \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。ここに n はき裂面上の節点数である。上記手法によれば、あらかじめ(1)の操作により影響

係数 K_{ij} のリストがつくられていれば、(2)以下の操作は熱応力、体積力あるいは残留応力等を含む任意荷重の問題へ容易に適用できる。

3. 影響係数 K_{ij} データベースの作成

著者ら^{(9)~(13)}はさきに、種々の半だ円き裂および 4 分の 1 だ円コーナき裂を持つ平板と種々の半だ円表面き裂を持つ丸棒、円筒に対して有限要素解析を行い、影響係数 K_{ij} を求め、これをフロッピーディスク上に貯えた。本報においては、平板中のだ円内部き裂(合計 16 種類)に対して一連の解析を行い K_{ij} を求めた。解析の対象は、図 4 に示すだ円で表される平板中のだ円内部き裂で

$$a/c = 0.2, 0.4, 0.6, 1.0$$

$$s/a = 0.25, 0.4, 0.5, 0.625$$

$$t = 10a$$

$$2b = 10c$$

の合計 16 種類のき裂である。解析には、次の弾性係数を用いた。

$$\text{縦弾性係数 } E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\text{ポアソン比 } \nu = 0.3$$

対称性により、図 4 の半分(半だ円)のみを取り出して解析の対象とした。

解析した 16 種類のき裂の各々に対して K_{ij} を求め、フロッピーディスク上にデータベースとして貯えた。得られた結果は、必要に応じて取り出すことができる。

図 2 単位分布力

図 3 影響係数 K_{ij} の定義

図 4 だ円内部き裂をもつ平板

表 1 平板におけるだ円内部き裂の A 点 ($\phi=0$), B 点 ($\phi=\pi$) および C 点 ($\phi=\pi/2$) の応力拡大係数
 $[F=K_I\sigma_0\sqrt{\pi a/Q}, Q=1+1.464\times(a/c)^{1.65}]$

$$\sigma_0(\xi, \eta) = \sigma_0$$

a/c	s/a			
	0.25	0.4	0.5	0.625
0.2 F _A	1.355	1.238	1.195	1.157
F _B	1.108	1.088	1.079	1.071
F _C	0.467	0.464	0.462	0.460
0.4 F _A	1.271	1.174	1.138	1.108
F _B	1.078	1.063	1.056	1.048
F _C	0.685	0.676	0.672	0.668
0.6 F _A	1.209	1.131	1.102	1.086
F _B	1.053	1.043	1.038	1.033
F _C	0.815	0.819	0.814	0.810
1.0 F _A	1.143	1.089	1.071	1.055
F _B	1.041	1.038	1.037	1.035
F _C	1.050	1.040	1.036	1.031

$$\sigma_2(\xi, \eta) = \sigma_0 \xi^2$$

a/c	s/a			
	0.25	0.4	0.5	0.625
0.2 F _A	0.577	0.545	0.533	0.522
F _B	0.500	0.499	0.497	0.495
F _C	0.015	0.015	0.015	0.014
0.4 F _A	0.573	0.548	0.538	0.530
F _B	0.519	0.519	0.517	0.515
F _C	0.036	0.036	0.035	0.034
0.6 F _A	0.577	0.557	0.548	0.547
F _B	0.533	0.533	0.532	0.531
F _C	0.051	0.052	0.051	0.050
1.0 F _A	0.688	0.595	0.590	0.585
F _B	0.582	0.585	0.585	0.584
F _C	0.072	0.072	0.071	0.069

$$\sigma_1(\xi, \eta) = \sigma_0 \xi$$

a/c	s/a			
	0.25	0.4	0.5	0.625
0.2 F _A	0.593	0.561	0.550	0.542
F _B	-0.502	-0.506	-0.508	-0.511
F _C	0.002	0.002	0.001	0.001
0.4 F _A	0.619	0.589	0.580	0.573
F _B	-0.553	-0.555	-0.556	-0.557
F _C	0.003	0.002	0.002	0.001
0.6 F _A	0.645	0.619	0.611	0.611
F _B	-0.589	-0.591	-0.592	-0.592
F _C	0.010	0.003	0.002	0.002
1.0 F _A	0.702	0.681	0.675	0.670
F _B	-0.665	-0.667	-0.668	-0.668
F _C	0.005	0.003	0.002	0.002

$$\sigma_3(\xi, \eta) = \sigma_0 \xi^3$$

a/c	s/a			
	0.25	0.4	0.5	0.625
0.2 F _A	0.401	0.385	0.379	0.375
F _B	-0.353	-0.354	-0.355	-0.357
F _C	0.000	0.001	0.001	0.001
0.4 F _A	0.424	0.409	0.405	0.401
F _B	-0.393	-0.393	-0.393	-0.394
F _C	0.001	0.001	0.001	0.001
0.6 F _A	0.445	0.432	0.428	0.429
F _B	-0.419	-0.419	-0.419	-0.419
F _C	0.002	0.001	0.001	0.001
1.0 F _A	0.498	0.487	0.484	0.482
F _B	-0.483	-0.483	-0.484	-0.484
F _C	0.001	0.001	0.001	0.001

4. 結果と考察

解析にあたって、板厚方向に $t=10a$ 、幅方向に $2b=10c$ として解析を行った。比較のため板厚方向に $t=20a$ 、幅方向に $2b=20c$ として、いくつかのき裂に対して一連の解析を行った。それらの結果を比べると両者の差は 1% 以下であった。この結果により、解析を行ったき裂は半無限体の表面下に存在するだ円き裂の解と同等であると考えることができる。本報では、き裂面上に図 5 に示されるようなき裂の短軸方向に変化する代表的な分布力を想定し、この分布力をき裂面に負荷した場合に式 (3) のアルゴリズムで得られるき裂前縁の応力拡大係数の補正係数 ($F=K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a/Q}$) を求めた。その結果を表 1 に示す。ここに $\xi=(a+s-y)/a$ である。一様引張りでの図 4 における A 点、B 点、C 点の F 値の分布を図 6、図 7、図 8 に示す。それぞれの図の縦軸は、応力拡大係数の補正係数 F 、横

図 5 代表的な分布力

軸は、き裂の埋没深さ s/a を表している。同時に、石田、野口の解も著者の解と比較して示した。著者の解が若干高めにしているが、両者の解は、よい一致を示している。

図 9 に、 $a/c=0.4$ 、 $s/a=0.4$ のき裂前縁の F 値の分

布を代表例として示す。図の横軸は、き裂前縁の位置を定義する離心角 ϕ を表している。

解析を行った 16 種類以外のだ円内部き裂に対して

図 6 一様応力をき裂面上に負荷した場合の A 点 ($\phi=0$) での F 値の分布

図 7 一様応力をき裂面上に負荷した場合の B 点 ($\phi=\pi$) での F 値の分布

図 8 一様応力をき裂面上に負荷した場合の C 点 ($\phi=\pi/2$) での F 値の分布

は、

$$0.2 \leq a/c \leq 1.0$$

$$0.25 \leq s/a \leq 0.625$$

の範囲において、各々の K 値を補間することにより上記の範囲の a/c および s/a の任意の値を持つき裂に対して K 値を求めることができる。また、フロッピーディスクに貯えてある影響係数 K_0 を用いれば、き裂の深さ方向だけでなく、幅方向にも任意に分布する応力(ただし、図 4 の yz 面に対して対称な分布に限る)に対して K 値を求めることが可能である。

5. 応 用 例

先に示した図 5 に示される代表的な分布力を負荷した場合の F 値(表 1)を用いれば、板厚方向に任意に分布する応力に対してだ円内部き裂の K 値を以下の手順により簡単に求めることができる。

(1) 板厚方向に分布する任意応力を

$$\sigma = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \dots \dots \dots (4)$$

のように 3 次方程式で表す。

(2) 表 1 において $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ それぞれの F

図 9 一様応力をき裂面上に負荷した場合のき裂前縁に沿う F 値の分布

図 10 任意分布力

表 2 平板におけるだ円内部き裂の A 点 ($\phi=0$), B 点 ($\phi=\pi$) および C 点 ($\phi=\pi/2$) の応力拡大係数
($F=K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a/Q}$)

a / c	s / a			
	0. 2 5	0. 4	0. 5	0. 6 2 5
0. 2 F _A F _B F _C	1. 203 0. 786 0. 374	1. 103 0. 769 0. 372	1. 066 0. 762 0. 370	1. 034 0. 755 0. 368
0. 4 F _A F _B F _C	1. 141 0. 752 0. 549	1. 057 0. 739 0. 541	1. 026 0. 734 0. 538	1. 001 0. 727 0. 535
0. 6 F _A F _B F _C	1. 096 0. 725 0. 654	1. 029 0. 716 0. 656	1. 004 0. 712 0. 652	0. 991 0. 708 0. 648
1. 0 F _A F _B F _C	1. 055 0. 700 0. 841	1. 007 0. 697 0. 833	0. 992 0. 696 0. 829	0. 978 0. 694 0. 825

値を F_0, F_1, F_2, F_3 とすれば求める F 値は式 (5) により求めることができる。

$$F = a_0 F_0 + a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 \cdots \cdots (5)$$

ここでは、任意応力分布としてき裂面上で

$$\sigma/\sigma_0 = 0.2\xi + 0.8 \cdots \cdots (6)$$

と表される分布力を考えてみる。

表 1 で、求められている 1 次、一様応力での F 値をそれぞれ任意分布力の 1 次の項、定数項に乗ずれば、上式で表される任意応力下での F 値を求めることができる (表 2)。

6. 結 言

本報では、半無限板中のだ円内部き裂に対して一連の解析を行い影響係数 K_{ij} を求め、データベースを作成した。このデータベースを用いれば、き裂の深さ方向、幅方向に任意に分布する応力に対して、 K 値を簡単に求めることができる。

また、本手法を用いるにあたって、主なき裂に対してあらかじめ影響係数 K_{ij} のデータベースを作成しておくことが重要な課題である。

文 献

- (1) Irwin, G. R., *Handbuch der Physik*, 6(1958), Springer, Berlin.
- (2) 岡村, 線形破壊力学入門, (1976), 培風館.
- (3) Paris, P. C. and Erdogan, F., *Trans. ASME*, Ser. D, 85 (1963), 528.
- (4) 白鳥・三好・松下, 数値破壊力学, (1980), 実教出版.
- (5) 例えば, Raju, I. S. and Newman, J. C., *ASTM STP*, 905(1986), 789.
- (6) 西谷・村上, 機論, 40-329(1974), 31.
- (7) 石田・野口, 機論, 48-431, A(1982), 888.
- (8) Zienkiewicz, O. C. (吉識・山田監訳), マトリックス有限要素法, (1984), 培風館.
- (9) 白鳥・三好・谷川, 機論, 51-467, A(1985), 1828.
- (10) 白鳥・三好・谷川, 機論, 52-474, A(1986), 390.
- (11) 白鳥・三好, 日本材料学会第 3 回破壊力学シンポジウム講演論文集, (1985-6), 82.
- (12) 白鳥・三好・酒井・張, 機論, 53-488, A(1987), 779.
- (13) 白鳥・酒井, 日本材料学会第 4 回破壊力学シンポジウム講演論文集, (1987-6), 125.