内外周環状き裂を有する無限中空円柱のねじり*

秋山 孝夫^{*1}, 鈴木 一義^{*2}, 原 利 昭^{*3}
渋谷 寿一^{*4}, 小泉 堯^{*4}Torsion of an Infinite Hollow Cylinder with a Pair of External
and Internal Circumferential CracksTakao AKIYAMA, Kazuyoshi SUZUKI, Toshiaki HARA,
Toshikazu SHIBUYA and Takashi KOIZUMI

This paper deals with the axisymmetric torsion problem of an infinite hollow cylinder with a pair of external and internal circumferential cracks located on an even plane. The problem is reduced to the solution of an infinite system of simultaneous equations in which the stress on the plane is expressed as an appropriate Fourier series. Numerical results are obtained for the stresses around the crack tips and stress intensity factors.

Key Words: Elasticity, Computational Mechanics, Torsion, Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Damage Tolerant Design, Infinite Hollow Cylinder, Circumferential Crack, Mixed Boundary-Value Problem

1. 結 言

発電用タービンロータや化学プラントの各種配管等をはじめとする種々の大形構造物における損傷許容設計⁽¹⁾上の基礎的資料としてき裂を有する円柱の応力解析結果が利用されている。き裂を有する円柱状構造物にねじりをはじめとする種々の外力が作用する場合がこれまでに扱われている。例えば、ねじりに関連したき裂問題では、外周環状き裂を有する無限中実円柱のねじり問題を渋谷ら⁽²⁾が解析し、Benthemら⁽³⁾やYamamotoら⁽⁴⁾が近似および数値的に求めた応力拡大係数値に良く一致することを示している。また、内山・土田ら⁽⁵⁾はねじりを受ける偏平回転円体状空かあるいは円形き裂を有する無限中実円柱の問題を扱い、き裂を含む面上の応力分布を明示するとともに応力拡大係数値がBenthemら⁽³⁾の近似結果と十分に一致することを示している。これら静的問題に対してAtsumiら⁽⁶⁾は外周環状き裂を有する無限中実円柱が

ねじり衝撃を受ける場合を解析して動的応力拡大係数の経時挙動を明らかにしている。

他方、中空円柱のねじり問題では鈴木ら⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾と渋谷ら⁽¹⁰⁾は1個または複数個の平行な外周、内周環状き裂を有する無限中空円柱がねじりを受ける場合をき裂を含む面上の応力を級数表示することにより解析し、Harris⁽¹¹⁾が示した応力拡大係数の修正値を提示するとともにき裂による干渉効果を明らかにしている。三ヶ田ら⁽¹²⁾は内周環状き裂を有する無限中空円柱のねじり衝撃応答問題を第一種特異積分方程式を解く問題に帰着させて解析し、動的応力拡大係数の経時特性および静的係数値を明示している。また、円柱状空かと環状き裂を有する無限体の静的および動的ねじり問題⁽¹³⁾⁻⁽¹⁷⁾等も扱われている。

上述のようにき裂を有する中実、中空円柱に関する問題が種々解析されているが、この種の問題でき裂干渉効果を明示することも重要である。そこで、複数の環状き裂を有する中空円柱がねじりを受ける場合のき裂干渉効果を明示する研究の一環として本研究では、同一平面上に内外周環状き裂を有する無限中空円柱をねじる問題を解析した。数値計算を行ってき裂を含む面における変位や応力分布、応力拡大係数を明示するとともにこれらに及ぼすき裂深さの影響を明らかにし

* 平成2年9月23日 第68期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成3年8月5日。

^{*1} 正員、新潟大学大学院 (〒950-21 新潟市五十嵐2の町8050)。

^{*2} 正員、日本電装(株) (〒448 刈谷市昭和町1-1)。

^{*3} 正員、新潟大学工学部。

^{*4} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

た。

2. 応力解析

円柱座標 (r, θ, z) における変位成分および応力成分を $(u_r, v_\theta, w_z), (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ とすれば、軸対称ねじりが作用する場合の弾性基礎方程式の解は Boussinesq の調和応力関数 λ_3 を用いて次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} v_\theta &= -\partial \lambda_3 / \partial r, u_r = w_z = 0 \\ \tau_{\theta z} &= -G \partial^2 \lambda_3 / (\partial r \partial z) \\ \tau_{r\theta} &= G \{ \partial^2 \lambda_3 / \partial z^2 + 2 \partial \lambda_3 / (r \partial r) \} \\ \sigma_r &= \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 G は横弾性係数である。

図 1 に示すように、同一断面上 ($z=0$) に半径 r_{ce} , r_{ci} の外周および内周き裂を有する外径 $2r_o$, 内径 $2r_i$ の無限長中空円柱を無限遠方においてトルク T でねじる場合を解析する。き裂を含む面に関する応力場の対称性から $z \geq 0$ の領域のみを考慮すれば十分であり、この場合の境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad & (\tau_{r\theta})_{r=r_o} = (\tau_{r\theta})_{r=r_i} = 0 \quad (0 \leq z < \infty) \\ (ii) \quad & (v_\theta)_{z=0} = 0 \quad (r_{ci} \leq r \leq r_{ce}) \\ (iii) \quad & (\tau_{\theta z})_{z=0} = 0 \quad (r_i \leq r < r_{ci}, r_{ce} < r \leq r_o) \\ (iv) \quad & z \rightarrow \infty \text{ でトルクが } T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$z \rightarrow \infty$ において、応力場はき裂のない中空円柱をねじる場合の解に一致することを考慮して λ_3 を次のように選ぶ。

$$\lambda_3 = A(r^2 - 2z^2) + Bz(2z^2 - 3r^2) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m C_0(\xi_m r) \exp(-\xi_m z) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$C_n(\xi_m r) = J_n(\xi_m r) - J_2(\xi_m r_o) Y_n(\xi_m r) / Y_2(\xi_m r_o)$$

であり、 $J_n(x)$, $Y_n(x)$ はそれぞれ n 次の第一種、第二

図 1 内外周環状き裂を有する中空円柱のねじり

種ベッセル関数である。また、 A, B および $\{A_m\}$ は未知係数である。

式(1), (3)による変位と応力は次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} v_\theta &= -2Ar + 6Bzr + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m A_m C_1(\xi_m r) \\ &\quad \times \exp(-\xi_m z) \\ \tau_{\theta z} &= 6GBr - G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m C_1(\xi_m r) \exp(-\xi_m z) \\ \tau_{r\theta} &= -G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m C_2(\xi_m r) \exp(-\xi_m z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

境界条件(i)が $z \geq 0$ に対して常に成立することから $\{\xi_m\}$ は

$$C_2(\xi_m r_i) = C_2(\xi_m r_o) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

を満足する正根 ($0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$) として与えられる。

また、境界条件(iv)を用いれば、

$$T = 2\pi \int_{r_i}^{r_o} r^2 (\tau_{\theta z})_{z \rightarrow \infty} dr = 3\pi GB(r_o^4 - r_i^4)$$

であることから B は次のようになる。

$$B = T / \{3\pi G(r_o^4 - r_i^4)\} \dots\dots\dots (6)$$

式(6)を考慮して残りの境界条件(ii), (iii)を適用すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} -2Ar + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m A_m C_1(\xi_m r) &= 0 \quad (r_{ci} \leq r \leq r_{ce}) \\ \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\frac{2Tr}{\pi(r_o^4 - r_i^4)} - G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m C_1(\xi_m r) = 0$$

$$(r_i \leq r < r_{ci}, r_{ce} < r \leq r_o) \dots\dots\dots (8)$$

したがって、本問題は級数方程式(7), (8)を満足する $A, \{A_m\}$ を決定する問題になる。ここでは文献(7), (8)で示した解法を拡張して適用し、解析を行う。

いま、変域 $r_{ci} \leq r \leq r_{ce}$ において

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= b^2 + w^2 - 2bw \cos \phi \\ b &= (r_{ce} + r_{ci})/2, w = (r_{ce} - r_{ci})/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

と置いて変数 r を変数 ϕ に変換すれば、 $r_{ci} \leq r \leq r_{ce}$ は $0 \leq \phi \leq \pi$ ($r = r_{ci}$ で $\phi = 0$, $r = r_{ce}$ で $\phi = \pi$) に対応する。渋谷⁽¹⁸⁾の結果を参考にすれば、 $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ は外周き裂先端 ($r = r_{ce}$) および内周き裂先端 ($r = r_{ci}$) において各々 $(r_{ce}^2 - r^2)^{-1/2}, (r^2 - r_{ci}^2)^{-1/2}$ の特異性を有し、 $r_{ci} < r < r_{ce}$ では有限かつ連続であると考えられる。そこで、 $(\tau_{\theta z})_{z=0} (r_{ci} \leq r \leq r_{ce})$ は未知係数 a_n を用いて次のようにフーリエ級数表示できる。

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta z})_{z=0} &= \frac{2r}{\{(r_{ce}^2 - r^2)(r^2 - r_{ci}^2)\}^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\phi \\ (r_{ci} < r < r_{ce}) &\dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

さらに、式(9)を利用すれば式(10)は次のようになる。

$$(\tau_{\theta z})_{z=0} = \beta_0 \frac{d\phi}{dr} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\partial}{\partial r} \sin n\phi$$

$$(r_{ci} < r < r_{ce}) \dots \dots \dots (11)$$

ここで, $\beta_n = \alpha_n / (n + \delta_{0n})$ であり, δ_{0n} はクロネッカ・デルタである。

式(8)と式(11)より次の関係式を得る。

$$\frac{2Tr}{\pi(r_o^4 - r_i^4)} - G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m C_1(\xi_m r)$$

$$= \begin{cases} 0 & (r_i \leq r < r_{ci}, r_{ce} < r \leq r_o) \\ \beta_0 \frac{d\phi}{dr} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\partial}{\partial r} \sin n\phi & (r_{ci} < r < r_{ce}) \end{cases}$$

$$\dots \dots \dots (12)$$

$\{\xi_m\}$ が式(5)の正根であることおよび

$$Z_k(y) = J_k(yw) C_k(yb) \quad (k=0, 1, \dots)$$

と表示してノイマンの加法定理⁽¹⁹⁾とそれより得られる次の結果

$$r C_1(\xi_m r) = - \sum_{k=0}^{\infty} (2 - \delta_{0k}) \frac{\partial}{\partial y} Z_k(y) \Big|_{y=\xi_m r} \cos k\phi$$

$$(r_{ci} \leq r \leq r_{ce})$$

を利用するとともに, 式(12)の右辺を $r_i \leq r \leq r_o$ で $C_1(\xi_m r)$ により展開して左辺の係数と等置すれば次式を得る。

$$T = 2\pi^2 \{ \beta_0 (b^2 + w^2) - \beta_1 bw \} \dots \dots \dots (13)$$

$$A_m = \frac{\pi}{G} \left\{ -2\beta_0 f(\xi_m) + bw \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n g_n(\xi_m) \right\}$$

$$(m=1, 2, \dots) \dots \dots \dots (14)$$

ここで,

$$f(\xi_m) = \{ w J_1(\xi_m w) C_0(\xi_m b) + b J_0(\xi_m w) C_1(\xi_m b) \} / \{ \xi_m h(\xi_m) \}$$

$$g_n(\xi_m) = \{ Z_{n-1}(\xi_m) - Z_{n+1}(\xi_m) \} / h(\xi_m)$$

$$h(\xi_m) = \xi_m^2 \{ r_o^2 C_1^2(\xi_m r_o) - r_i^2 C_1^2(\xi_m r_i) \}$$

$\{A_m\}$ が式(14)で与えられれば, 任意の α_n に対して $(\tau_{\theta z})_{z=0}$ の境界条件は満足される。そこで, α_n を決定するために式(7)を考慮してゲージンパワーの加法定理⁽¹⁹⁾

$$C_1(\xi_m r) = \frac{2r}{\xi_m bw \sin \phi} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) Z_{p+1}(\xi_m)$$

$$\times \sin (p+1)\phi \quad (r_{ci} \leq r \leq r_{ce})$$

を式(7)に代入すれば, 次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) Z_{p+1}(\xi_m) \sin (p+1)\phi$$

$$= Abw \sin \phi \quad (r_{ci} \leq r \leq r_{ce}) \dots \dots \dots (15)$$

式(15)は r の領域で任意の r に対して成立することから両辺の $\sin (p+1)\phi$ に関する係数を等置すれば, 次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m Z_{p+1}(\xi_m) = Abw \delta_{0p} \quad (p=0, 1, \dots) \dots (16)$$

式(16)に式(14)を代入するとともに総和の順序を交換

すれば, 次のような無限連立一次方程式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n E(n, p) = AG \delta_{0p} \quad (p=0, 1, \dots) \dots \dots (17)$$

ここで,

$$E(0, p) = - \frac{2\pi}{bw} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{p+1}(\xi_m) f(\xi_m)$$

$$E(n, p) = \pi \sum_{m=1}^{\infty} Z_{p+1}(\xi_m) g_n(\xi_m) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(p=0, 1, \dots)$$

式(17)を解いて $\beta_n / (AG)$ を決定すれば, 式(13), (14)より A および $\{A_m\}$ が求められる。これらを式(4)に代入すれば, すべての変位と応力が求められ, 以下のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} v_{\theta} - v_{\theta}^0 &= -2Ar + \sum_{m=1}^{\infty} Q_1(m) \\ \tau_{\theta z} &= \frac{\tau_{\infty}}{r_o} r - G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m Q_1(m) \\ \tau_{r\theta} &= -G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m Q_2(m) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

ここで,

$$Q_j(m) = \xi_m A_m C_j(\xi_m r) \exp(-\xi_m z)$$

$$(j=1, 2)$$

$$v_{\theta}^0 = 2Tzr / \{ \pi G (r_o^4 - r_i^4) \}$$

$$\tau_{\infty} = 2Tr_o / \{ \pi (r_o^4 - r_i^4) \}$$

であり, $v_{\theta}^0, \tau_{\infty}$ はそれぞれき裂のない中空円柱をねじる場合の変位および外半径 r_o に対する公称応力を表す。なお, τ_{∞} に対応してき裂を含む面での公称応力を τ_n とすれば,

$$\tau_n = 2Tr_{ce} / \{ \pi (r_{ce}^4 - r_{ci}^4) \}$$

式(18)の第1式より, $z \rightarrow \infty$ における中空円柱の変位 v_{θ} はき裂が存在しない場合に比べて $-2Ar$ だけ変化する。そこで, き裂が存在することによる $z \rightarrow \infty$ での円柱回転角の変化量 $\Delta\theta$ は次のようになる。

$$\Delta\theta = (v_{\theta} - v_{\theta}^0)_{z=\infty} / r = -2A \dots \dots \dots (19)$$

内, 外周き裂先端での特異応力場の強さは,

$$R = (2/\eta)^{1/2} / \tau_{\zeta} \quad (\zeta = n, \infty; \eta = r_o, c)$$

として次のモードIIIの応力拡大係数を定義することによって評価できる。

$$K_{III, \zeta, \eta} = \lim_{r \rightarrow r_{c\zeta \pm}} (r_{c\zeta} \sim r)^{1/2} R (\tau_{\theta z})_{z=0} \quad (x=i, e)$$

$$\dots \dots \dots (20)$$

式(20)は式(11)を用いて次のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{III, i, \eta} &= RS_i \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{0n} + n) \beta_n \\ K_{III, e, \eta} &= RS_e \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\delta_{0n} + n) \beta_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

ここで,

$$S_x = R \{ 2r_{cx} / (r_{ce}^2 - r_{ci}^2) \}^{1/2} \quad (x=i, e)$$

3. 数 値 結 果

3.1 解の精度 無限連立一次方程式(17)を解くに当たってこれを有限項数 N で打ち切って $\beta_n/(AG)$ を求めるものとすれば、項数 N の数値結果の精度に及ぼす影響を調べる必要がある。そこで、例えば、種々のパラメータに対応する応力拡大係数の収束性を示せば、表1および表2のようになる。これらの表において $t, d_{cx}(x=e, i)$ はそれぞれ $t=r_o-r_i, d_{ce}=r_o-r_{ce}, d_{ci}=r_{ci}-r_i$ である。なお、以下の数値結果におけるすべての物理量の添字 x は i および e であり、それぞれ内周と外周に関する諸量を表すものとする。表1は $r_i/r_o=0.5, d_{cx}/t=0.25$ として d_{cx}/t が0.2, 0.6の場合の K_{IIIx, n, r_o} を示したものである。他方、表2は $d_{cx}/t=0.25$ として種々の r_i/r_o の値に関する K_{IIIx, ∞, r_o} を示している。いずれの場合も $N=6$ 程度で応力拡大係数は収束し、同時に変位と応力値も収束することを確認した。ここでは念のために $N=10$ として数値計算

表1 $K_{IIIx, n, r_o}(x=i, e)$ の収束 ($r_i/r_o=0.5$)

N	$d_{ce}/t=0.25$				$d_{ci}/t=0.25$			
	$d_{ci}/t=0.2$		$d_{ci}/t=0.6$		$d_{ce}/t=0.2$		$d_{ce}/t=0.6$	
	$r_{ci}/r_o=0.6$		$r_{ci}/r_o=0.8$		$r_{ce}/r_o=0.9$		$r_{ce}/r_o=0.7$	
	$x=e$	$x=i$	$x=e$	$x=i$	$x=e$	$x=i$	$x=e$	$x=i$
3	0.226	0.108	0.126	0.105	0.213	0.121	0.143	0.086
4	0.230	0.105	0.126	0.105	0.215	0.119	0.143	0.086
5	0.228	0.104	0.126	0.105	0.214	0.118	0.143	0.086
6	0.229	0.104	0.126	0.105	0.214	0.118	0.143	0.086
7	0.229	0.104	0.126	0.105	0.214	0.118	0.143	0.086

表2 $K_{IIIx, \infty, r_o}(x=i, e)$ の収束

r_i/r_o	0.3		0.5		0.7	
r_{ce}/r_o	0.825		0.875		0.925	
r_{ci}/r_o	0.475		0.625		0.775	
N	x=e	x=i	x=e	x=i	x=e	x=i
3	0.512	0.183	0.413	0.217	0.312	0.222
4	0.521	0.176	0.417	0.214	0.314	0.221
5	0.518	0.174	0.416	0.213	0.313	0.220
6	0.519	0.174	0.416	0.213	0.313	0.220
7	0.518	0.173	0.416	0.213	0.313	0.220
8	0.518	0.173	0.416	0.213	0.313	0.220

表3 係数 β_n の値 ($r_i/r_o=0.5$)

$2\pi\beta_n/AG$	$d_{ce}/t=0.2$		$d_{ci}/t=0.2$	
	$r_{ce}/r_o=0.9$		$r_{ci}/r_o=0.6$	
	$d_{ci}/t=0.2$	$d_{ci}/t=0.6$	$d_{ce}/t=0.6$	$d_{ce}/t=0.9$
0	-37.950	-10.781	-4.543	-37.950
1	7.137	0.417	1.262	7.137
2	3.392	0.179	0.053	3.392
3	0.156	0.	0.003	0.156
4	0.050	0.	0.	0.050
5	0.007	0.	0.	0.007
6	0.002	0.	0.	0.002
7	0.	0.	0.	0.
8	0.	0.	0.	0.
9	0.	0.	0.	0.

を行った。表3は $r_i/r_o=0.5$ として種々の d_{cx}/t に対する $2\pi\beta_n/(AG)$ の値を示したものであり、いずれの場合も係数 β_n の収束は良好である。

3.2 変位、応力分布および応力拡大係数 以下で論ずる変位と応力はそれぞれ $r_o t_{\infty}/G$ および t_{∞} による無次元量であり、“*”を付して表示した。また、他の物理量の場合も同様とした。なお、 $d_{cx}/t=0$ の結果はそれぞれ内周あるいは外周き裂を有する中空円柱をねじる場合⁽⁷⁾⁽⁸⁾に対応する。

図2～4は $r_i/r_o=0.5, r_{ce}/r_o=0.875, r_{ci}/r_o=0.625$ の場合における $v_{\theta}^*, \tau_{\theta z}^*, \tau_{\theta r}^*$ の分布図である。特に図2では、き裂がない場合との差異を明示するために v_{θ}^0 を差し引いた無次元量 v_{θ}^* を示した。き裂面 ($z=0$) の v_{θ}^* はき裂先端 ($r \rightarrow r_{cx} \pm$) においてその半径方向こう配は無限大である。 z/r_o の増加、すなわちき裂から離れるとともにき裂が存在することによる v_{θ}^* への影響は減少して分布曲線は滑らかになり、 $z/r_o \geq 0.5$ では $v_{\theta} \approx v_{\theta}^0 - 2Ar (A < 0)$ となってき裂の影響はほぼ消失する。また、いずれの z/r_o に対しても $r=r_o$ で v_{θ}^* は最大となる。図3において、き裂を含む面 ($z=0$) での

図2 v_{θ}^* の分布 ($r_i/r_o=0.5, r_{ce}/r_o=0.875, r_{ci}/r_o=0.625$) 図3 $\tau_{\theta z}^*$ の分布 ($r_i/r_o=0.5, r_{ce}/r_o=0.875, r_{ci}/r_o=0.625$)

$\tau_{\theta z}^*$ はき裂先端 ($r \rightarrow r_{cx} \pm$) で無限大になり、 z/r_o が増加してき裂面から離れるとともに $\tau_{\theta z}^*$ に及ぼすき裂先端の影響は急激に減少する。 $z/r_o \geq 0.5$ であれば、き裂による影響は消失して $\tau_{\theta z}^*$ はき裂がない場合の結果にほぼ一致する。図 4 より、き裂を含む面における $\tau_{\theta z}^*$ は $r_{ci} < r < r_{ce}$ で零、き裂端では無限大になるとともに $r = r_o, r_i$ で零になる。 z/r_o の増加とともに $\tau_{\theta z}^*$ は滑らかな分布曲線を呈し、 $z/r_o \geq 0.5$ ではほぼ零となってき裂先端の影響は消失する。

図 5 は $r_i/r_o = 0.5, d_{ce}/t = 0.2$ とした場合の $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ (破線) と $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ (実線) の分布図であり、比較のために中空円柱にき裂がない場合の $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ を一点鎖線で示した。き裂面における $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ は d_{ci}/t の増加とともに大きくなり、いずれの $d_{ci}/t (\neq 0)$ に対してもき裂先端 ($r \rightarrow r_{cx} \pm$) においてその半径方向こう配は無限大となる。これに対して $r_{ci} < r < r_{ce}$ における $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ は d_{ci}/t の増加とともにその最小値は大きくなり、いずれの $d_{ci}/t (\neq 0)$ に対してもき裂先端 ($r \rightarrow r_{cx} \pm$) で無限大となる。 d_{ci}/t が零に近づくとともに $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ に及ぼすき裂先端の影響は局部的になり、その分布曲線は

$c_i/t = 0$ の結果に無理なく漸近する。

図 6 は $r_i/r_o = 0.5, d_{ci}/t = 0.2$ とした場合の $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ (破線) と $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ (実線) の分布図であり、一点鎖線は中空円柱にき裂がない場合の $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ を示している。き裂面上の $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ は d_{ce}/t とともに大きくなり、いずれの $d_{ce}/t (\neq 0)$ に対してもき裂先端 ($r \rightarrow r_{cx} \pm$) でその半径方向こう配は無限大となる。一方、 $r_{ci} < r < r_{ce}$ における $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ は d_{ce}/t の増加とともにその最小値は大きくなり、いずれの $d_{ce}/t (\neq 0)$ に対してもき裂先端 ($r \rightarrow r_{cx} \pm$) で無限大となる。 d_{ce}/t が零に近づくとともに $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ に及ぼすき裂先端の影響は局部的になる。

図 7 は $r_i/r_o = 0.5$ の場合の $\Delta\theta^* = G\Delta\theta/\tau_o$ と d_{cx}/t の関係を示した図である。いずれの場合も d_{cx}/t の増加とともに $\Delta\theta^*$ は急激に増加する。

図 8 は $c = d_{ce} + d_{ci}$ として式 (21) で与えられる K_{III, x, n, r_o} と c/t の関係を示した図である。図中の実線と破線はそれぞれ x が e と i の場合を表し、 $c/t = 0.25$ の結果は内周あるいは外周き裂を有する中空円柱

図 4 $\tau_{\theta z}^*$ の分布 ($r_i/r_o = 0.5, r_{ce}/r_o = 0.875, r_{ci}/r_o = 0.625$)

図 5 $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ と $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ の分布 ($r_i/r_o = 0.5, d_{ce}/t = 0.2$)

図 6 $(v_{\theta}^*)_{z=0}$ と $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ の分布 ($r_i/r_o = 0.5, d_{ci}/t = 0.2$)

図 7 $\Delta\theta^*$ と d_{cx}/t ($x=i, e$) の関係 ($r_i/r_o = 0.5$)

図 8 $K_{III, n, r_0}(x=i, e)$ と c/t の関係 図 9 $K_{III, \infty, r_0}(x=i, e)$ と $2w/t$ の関係

をねじめる場合⁽⁷⁾⁽⁸⁾に対応している。いずれの r_i/r_0 に対しても d_{cx}/t が一定ならば、 c/t が大きくなるとともに K_{III, n, r_0} はそれぞれ単調減少および極大値を有する変化傾向を示す。また、 d_{cx}/t が一定ならば、 r_i/r_0 が大きくなって中空円柱の肉厚が薄くなるほど c/t の値に無関係に K_{III, n, r_0} は小さくなる。

図 9 は K_{III, ∞, r_0} と $z=0$ 面の接着領域パラメータ $2w/t$ ($2w = r_{ce} - r_{ci}$) の関係を示した図である。図中の実線と破線はそれぞれ x が e と i の場合を示し、 $2w/t=0.75$ の結果は内周あるいは外周き裂を有する中空円柱をねじめる場合⁽⁷⁾⁽⁸⁾に対応する。いずれの r_i/r_0 、 d_{cx}/t に対しても $2w/t$ が小さくなってき裂が接近するとともに K_{III, ∞, r_0} は急激に大きくなる。

図 10 は c/t を一定 ($c/t = d_{ce}/t + d_{ci}/t = 0.5$) とした場合の $K_{III, \infty, c}$ と r_i/r_0 の関係を示した図であり、図中の実線と破線はそれぞれ x が e および i の場合を表している。 c/t が一定ならば、いずれの r_i/r_0 に対しても d_{ce}/t が減少する (d_{ci}/t が増加する) とともに $K_{III, \infty, c}$ は減少するが、 $K_{III, \infty, c}$ は増加する。いずれの d_{cx}/t に対しても $K_{III, \infty, c}$ は r_i/r_0 が増加して中空円柱

図 10 $K_{III, \infty, c}(x=i, e)$ と r_i/r_0 の関係

の肉厚が薄くなるほど単調に大きくなる。 $d_{cx}/t = c/(2t) = 0.25$ の特別な場合には、 $r_i/r_0 \rightarrow 1$ でき裂長さがともに $c/2$ である両側き裂を有する幅 t の無限帯板が面外せん断を受ける場合の厳密解⁽²⁰⁾

$$K_{III, \infty, c} = \left\{ \frac{t}{\pi c} \tan \left(\frac{\pi c}{2t} \right) \right\}^{1/2} = 0.798$$

に無理なく漸近する。

4. 結 言

内外周環状き裂を有する無限中空円柱を一定トルクでねじめる場合を三次元弾性論に基づいて解析し、き裂を含む面における変位、応力分布および応力拡大係数を示すとともにこれらに及ぼすき裂深さの影響を調べた。その結果を要約すると次のようになる。

(1) き裂が深くなるほどトルクが一定の場合のき裂面における v_θ は大きくなる。また、トルクが一定であれば、き裂を含む面の $\tau_{\theta z}$ はき裂先端 ($r \rightarrow r_{cx} \pm$) で無限大となり、き裂が浅くなるほどき裂先端の影響は局部的になる。

(2) いずれの r_i/r_0 、 d_{cx}/t に対しても内、外周き裂が接近するほど K_{III, ∞, r_0} は急激に大きくなる。

(3) いずれの d_{cx}/t に対しても $K_{III, \infty, c}$ は中空円柱の肉厚が薄くなるほど大きくなる。 $d_{ce}/t = d_{ci}/t$ 、 $r_i/r_0 \rightarrow 1$ の場合、 $K_{III, \infty, c}$ は等長両側き裂を有する無限帯板が面外せん断を受ける場合の厳密解に無理なく漸近して一致する。

文 献

- (1) 遠藤, 材料, 39-436(1990), 89.
- (2) 渋谷・ほか2名, 機論, 44-388(1978), 4052.
- (3) Benthem, J. P. and Koitor, W. T., *Methods of Analysis*

- and Solutions of Crack Problems*, (1973), 131, Noordhoff.
- (4) Yamamoto, Y. and Sumi, Y., *Int. J. Fract.*, **10**(1974), 269.
- (5) 内山・土田・ほか2名, 機論, **47**-422, A(1981), 1012.
- (6) Atsumi, A., ほか2名, *J. Appl. Mech.*, **49**-3(1982), 531.
- (7) 鈴木・ほか2名, 機論, **44**-383(1978), 2192.
- (8) 鈴木・ほか2名, 機論, **45**-391, A(1979), 267.
- (9) 鈴木・ほか2名, 機論, **45**-397, A(1979), 1043.
- (10) 渋谷・ほか2名, 機論, **46**-407, A(1980), 756.
- (11) Harris, D. O., *Trans. ASME*, Ser. D, **89**-1(1967), 49.
- (12) 三ヶ田・ほか2名, 機論, **52**-474, A(1986), 519.
- (13) Kassir, M. K. and Sih, G. C., *Three Dimensional Crack Problems*, (1975), 329, Noordhoff.
- (14) Fu, L. S., *Rev. Roum. Sci. Tech. Ser. Mech. Appl.*, **24**-4(1977), 639.
- (15) 安齊・ほか2名, 機論, **47**-414, A(1981), 166.
- (16) 渥美・ほか2名, 機論, **51**-462, A(1985), 349.
- (17) Shindo, Y., ほか2名, *Int. J. Solids Struct.*, **24**-12(1988), 1193.
- (18) 渋谷, 機論, **41**-347(1975), 1957.
- (19) 森口・ほか2名, 数学公式(III), (1963), 218, 岩波書店.
- (20) Murakami, Y., ほか9名, *Stress Intensity Factors Handbook*, (1987), 985, Pergamon Press.
-