光学的異方性材中の静止き裂に対する 混合モードコースティックス法理論*

村 上 竜 一^{*1}, 西 岡 俊 久^{*2}
松 尾 諭^{*3}, 橘 高 弘 幸^{*4}

Theory of Mixed-Mode Caustics for Stationary Cracks in Optically Anisotropic Materials

Ryuichi MURAKAMI, Toshihisa NISHIOKA,
Satoshi MATSUO and Hiroyuki KITTA

The optical method of caustics is one of the most powerful techniques for evaluating stress intensity factors in static as well as dynamic fracture mechanics problems. In the method of transmitted caustics, optically anisotropic (birefringent) materials such as Araldite B and polycarbonate were often used. Double caustic curves appear for a tip of the crack in an anisotropic (birefringent) plate, due to the birefringence. In this paper, a caustic theory was developed for stationary cracks in birefringent materials under in-plane mixed-mode conditions. Completely analytical expressions were derived for the double caustic curves as well as for the double initial curves. The combined effects of optical anisotropy and mixed-mode state on the caustic curves and the initial curves were investigated. New procedures were also developed for the evaluation of mixed-mode stress intensity factors using the characteristic dimensions of the double caustic patterns.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factors, Fracture Mechanics, Experimental Stress Analysis, High-Polymer Materials, Method of Caustics, Birefringent Materials

1. 緒言

応力拡大係数を実験的に求める方法としてコースティックス法は種々の利点を有している。その利用範囲は幅広く、弾性、弾塑性問題、また高速き裂進展問題、衝撃荷重問題など、数多くの研究が報告されている。高速破壊問題、衝撃荷重問題などでは、アラルダイト B などの光学的異方性材が試験片としてよく用いられる⁽¹⁾。これは、コースティックス法で用いる光学パラメータが比較的歪速度に依存しないためである。

静的試験でよく用いられるポリカーボネイト等、光学的異方性材に対するコースティックス法理論は、モード I 型荷重に対してはよく検討されている^{(2)・(3)・(4)}が、面内混合モード荷重に対しては、Theocaris・Papadopoulos⁽⁵⁾の検討があるのみである。しかし、Theocaris らにより導かれたモード I 型理論は、解析段階でいくつかの誤りがあり、さらに混合モード理論

では、モード I 型理論の混合モード理論への拡張段階で誤りがあった。このため、正しい理論の確立が望まれる。

一方、著者ら^{(6)・(7)}は光学的等方性材中の高速進展き裂に対して混合モードコースティックス法の理論を確立した。本研究では、光学的異方性材中の静止き裂に対して、モード I 型を含む混合モードコースティック像および初期曲線の完全な解析解を導いた。また、これらの解析解をもとに、光学的異方性と混合モード状態が重畳して、コースティック像および初期曲線に及ぼす影響を明らかにした。次に、解析解より、応力拡大係数とコースティック像形状の関係を数値的に求めた。この関係を用いて実測のコースティック像より混合モード応力拡大係数が決定できる。

なお、光学的異方性材中の高速進展き裂に対する、混合モードコースティックス理論については別報⁽⁸⁾で報告した。

2. コースティック像形成原理⁽²⁾

ここでは、図 1 に示すように透過型コースティック法について述べる。き裂を有する試験片に荷重を加えると、き裂先端で応力集中が生じ、試験片の板厚およ

* 平成 2 年 3 月 31 日 第 67 期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成 3 年 9 月 20 日。

^{*1} 准員, 神戸商船大学大学院(〒658 神戸市東灘区深江南町 5-1-1) [現在: NKK(株)]。

^{*2} 正員, 神戸商船大学。

^{*3} 学生員, 神戸商船大学大学院。

^{*4} 正員, 海技大学校(〒659 芦屋市西蔵町 12-24)。

び屈折率が変化する。このため入射した光は、試験片上で屈折され、スクリーン上に光の到達しない影の領域 (shadow spot) と、その周囲に光の集中するコースティック像が形成される。

光学異方性材では、試験片における屈折率変化が主応力 σ_1, σ_2 方向によって異なるため、コースティック像が二重になる。図1に示すように、試験片の点Pを透過した光が、スクリーン上の点P' に到達したとすると点P' の位置ベクトルを示す $\vec{w}_i$ は次式で表すことができる。

$$\vec{w}_i = \lambda \vec{r} + \vec{w}_i \quad (i=1,2) \quad (1)$$

ここで、 λ は光学系の倍率、添字 i は主応力 σ_1, σ_2 方向の屈折率変化に対応する。また $\vec{w}_i$ は透過光のスクリーン上での負荷による移動量であり、一般に次式で表される。

$$\vec{w}_i = -Z_0 \text{grad} \Delta S_i \quad (i=1,2) \quad (2)$$

ここで、 Z_0 は試験片・スクリーン間の距離を表している。また ΔS_i は、それぞれの屈折率変化に対応する光路長変化を示しており主応力 σ_1, σ_2 、板厚 t および光学パラメータ C_0 、 ξ より次式で表される。

$$\Delta S_i = C_0 t [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi (\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (i=1,2) \quad (3)$$

ここで、添字 i は式(1)、(2)と同様であり、特に $[\]$ 内の符号は $i=1$ のとき正、 $i=2$ のとき負をとる。スクリーン上のコースティック像をでは光が集中しているために、点Pと点P' 間に一对一の写像関係が成立しなくなる。この条件は $\vec{w}_i$ のヤコビアン J_i が零で表される。

$$J_i = \frac{\partial (w_{xi}, w_{yi})}{\partial (x, y)} = 0 \quad (i=1,2) \quad (4)$$

ここで、式(4)の w_{xi}, w_{yi} は、 $\vec{w}_i$ の x, y 成分を示している。したがって、式(4)を満足するような点P' の集合がコースティック像となり、またこのときの点Pの集合が初期曲線と呼ばれているものである。

解析手順は、き裂先端近傍の応力の解を用いて式(3)により ΔS_i を求め、式(2)、(3)から、式(1)の $\vec{w}_i$ を (r, θ) 座標系で求める。これより式(4)を満足する初期曲線 $r=r_{0i} (i=1,2)$ が求まり、これを式(1)に再代入してコースティック像形成式を導くことができる。一般に光学的等方性材中の静止き裂に対しては、初期曲線は真円となる。

3. 光学的異方性材中の混合モードコースティック像

光学的異方性材中では、式(3)において主応力差の項が含まれるため、かなり複雑になる。したがって、本研究ではき裂先端の応力場も次式で示される Goursat の

複素応力関数を用いて解析を行った。

$$\sigma_x = 2\text{Re} \phi' - \{x\text{Re} \phi'' + y\text{Im} \phi'' + \text{Re} \phi'\} \quad (5.a)$$

$$\sigma_y = 2\text{Re} \phi' + \{x\text{Re} \phi'' + y\text{Im} \phi'' + \text{Re} \phi'\} \quad (5.b)$$

$$\sigma_{xy} = \{x\text{Im} \phi'' - y\text{Re} \phi'' + \text{Im} \phi'\} \quad (5.c)$$

ここで $\phi(z), \phi'(z)$ は、それぞれ複素ポテンシャルであり、 z は、き裂先端を原点とする座標系 x, y で表される複素変数 ($z=x+iy$) である。き裂先端近傍の固有値解析により、応力特異項と関係する複素応力関数は次式で表される⁽⁹⁾。

$$\phi(z) = (K_I - iK_{II}) z^{1/2} / (2\pi)^{1/2} \quad (6.a)$$

$$\phi'(z) = (K_I + i3K_{II}) z^{-1/2} / \{2\pi(2\pi)^{1/2}\} \quad (6.b)$$

ここに K_I, K_{II} はそれぞれモード I、II の応力拡大係数である。

式(5)を用いて主応力和、および主応力差を表すと次式となる。

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 4\text{Re} \phi'(z) \quad (7.a)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2[A^2 + B^2]^{1/2} = 2\Delta S_d \quad (7.b)$$

$$A = x\text{Re} \phi''(z) + y\text{Im} \phi''(z) + \text{Re} \phi'(z) \quad (7.c)$$

$$B = x\text{Im} \phi''(z) - y\text{Re} \phi''(z) + \text{Im} \phi'(z) \quad (7.d)$$

式(7.b)において ΔS_d は、簡略化のために複素変数項を再定義したものである。これより式(7.a~d)を用いて式(1)を整理すると次式となる。

$$w_{xi} = \lambda \text{Re}(z) - Z_0 C_0 t [4\text{Re} \phi''(z) \pm 2\xi \frac{\partial \Delta S_d}{\partial x}] \quad (8.a)$$

$$w_{yi} = \lambda \text{Im}(z) - Z_0 C_0 t [-4\text{Im} \phi''(z) \pm 2\xi \frac{\partial \Delta S_d}{\partial y}] \quad (8.b) \quad (i=1,2)$$

式(8)を式(4)に代入し、ヤコビアン方程式を表すと次式となる。

$$J_i = \lambda^2 \pm \lambda Z_0 C_0 t 2\xi \left[\frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial y^2} \right] + Z_0^2 C_0^2 t^2 [4\text{Re} \phi''' \pm 2\xi \frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial x^2}] \cdot [-4\text{Re} \phi''' \pm 2\xi \frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial y^2}] - Z_0^2 C_0^2 t^2 [-4\text{Im} \phi''' \pm 2\xi \frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial x \partial y}]^2 = 0 \quad (i=1,2) \quad (9)$$

図1 透過型コースティックス法の幾何学的関係

式(9)において ΔS_d の偏微分項は、応力拡大係数 K_I 、 K_{II} および r 、 θ によって表される。したがって r について式(9)を整理すると $r^{-5/2}$ の二次方程式となる。

$$J_i = \lambda^2 - \frac{3}{2} \lambda N K_I r^{-5/2} [\pm \xi S_0] + \frac{9}{4} N^2 K_I^2 r^{-5} \cdot \{ [\pm \frac{1}{2} S_0]^2 - [\cos \frac{5}{2} \theta - \alpha \sin \frac{5}{2} \theta \pm \xi \frac{1}{2} S_1]^2 - [\sin \frac{5}{2} \theta + \alpha \cos \frac{5}{2} \theta \pm \xi \frac{1}{2} S_2]^2 \} = 0 \quad (i=1,2) \quad (10)$$

ここで、 $N = 2\sigma_{0t}(2\pi)^{-1/2}$ であり、 $\alpha = K_{II}/K_I$ である。 S_0 、 S_1 、 S_2 は、 α および θ の関数であり、 ΔS_d の偏微分項から次式で得られる。

$$S_0 = \frac{4(2\pi)^{1/2}}{3K_I} r^{5/2} \left[\frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial y^2} \right] \quad (11.a)$$

$$S_1 = \frac{4(2\pi)^{1/2}}{3K_I} r^{5/2} \left[\frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial y^2} \right] \quad (11.b)$$

$$S_2 = \frac{8(2\pi)^{1/2}}{3K_I} r^{5/2} \frac{\partial^2 \Delta S_d}{\partial x \partial y} \quad (11.c)$$

S_0 、 S_1 、 S_2 を具体的に整理すると次式のように表すことができる。

$$S_0 = -\Lambda_0 + \frac{1}{3} \alpha^4 \Lambda_0^{-3} \quad (12.a)$$

$$S_1 = -\cos 2\theta \left[-7\Lambda_0 + \frac{1}{2}(5\alpha^2 + 1)\Lambda_0^{-1} + \frac{1}{3} \alpha^4 \Lambda_0^{-3} \right] - \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 1)\Lambda_0^{-1} \quad (12.b)$$

$$S_2 = -\sin 2\theta \left[-7\Lambda_0 + \frac{1}{2}(5\alpha^2 + 1)\Lambda_0^{-1} + \frac{1}{3} \alpha^4 \Lambda_0^{-3} \right] - 2\alpha \Lambda_0^{-1} \quad (12.c)$$

ここで Λ_0 は次式で表される。

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} [(2\alpha \cos \theta + \sin \theta)^2 + \alpha^2 \sin^2 \theta]^{1/2} \quad (13)$$

式(10)を $r^{-5/2}$ についての二次方程式と考え、ヤコビアン方程式を解くことによって初期曲線の完全な解析解を得ることができる。

$$r_{0i}^{*i\alpha} = \left[\frac{3N}{2\lambda} K_I H_i^{*i\alpha}(\alpha, \xi, \theta) \right]^{2/5} \quad (i=1,2) \quad (14)$$

ここで、 $H_i^{*i\alpha}$ は、混合モード状態 α 、光学的異方性を示す光学パラメータ ξ 、および角度 θ に依存する関数であり次式となる。

$$H_i^{*i\alpha}(\alpha, \xi, \theta) = \frac{1}{2} [\pm \xi S_0] + \frac{1}{2} \{ [2(\cos \frac{5}{2} \theta - \alpha \sin \frac{5}{2} \theta) \pm \xi S_1]^2 + [2(\sin \frac{5}{2} \theta + \alpha \cos \frac{5}{2} \theta) \pm \xi S_2]^2 \}^{1/2} \quad (i=1,2) \quad (15)$$

スクリーン上のコースティック像は、式(8)を同様の手段で変形して次式のように表される。

$$W_{x1} = \lambda r \cos \theta - N K_I r^{-3/2} (-\cos \frac{3}{2} \theta + \alpha \sin \frac{3}{2} \theta \pm \xi M_x) \quad (16.a)$$

$$W_{y1} = \lambda r \sin \theta - N K_I r^{-3/2} (-\sin \frac{3}{2} \theta - \alpha \cos \frac{3}{2} \theta \pm \xi M_y) \quad (16.b)$$

さらに式(16)は $r_{0i}^{*i\alpha}$ を用いて次式のように表すことができる。

$$W_{x1} = \lambda r_{0i}^{*i\alpha} [\cos \theta - \frac{2}{3H_i^{*i\alpha}} (-\cos \frac{3}{2} \theta + \alpha \sin \frac{3}{2} \theta \pm \xi M_x)] \quad (17.a)$$

$$W_{y1} = \lambda r_{0i}^{*i\alpha} [\sin \theta - \frac{2}{3H_i^{*i\alpha}} (-\sin \frac{3}{2} \theta - \alpha \cos \frac{3}{2} \theta \pm \xi M_y)] \quad (i=1,2) \quad (17.b)$$

ここで、 M_x 、 M_y は α および θ の関数であり、 ΔS_d の偏微分項から次式で得られる。

$$M_x = -\frac{2(2\pi)^{1/2}}{K_I} r^{3/2} \frac{\partial \Delta S_d}{\partial x} \quad (18.a)$$

$$M_y = -\frac{2(2\pi)^{1/2}}{K_I} r^{3/2} \frac{\partial \Delta S_d}{\partial y} \quad (18.b)$$

M_x 、 M_y を具体的に整理すると次式となる。

$$M_x = -3\cos \theta \Lambda_0 + [2\alpha^2 \cos \theta + \alpha \sin \theta] \Lambda_0^{-1} \quad (19.a)$$

$$M_y = -3\sin \theta \Lambda_0 + \frac{1}{2} [\alpha^2 \sin \theta + 2\alpha \cos \theta + \sin \theta] \Lambda_0^{-1} \quad (19.b)$$

以上により、応力拡大係数 K_I 、係数 N 、光学倍率 λ の変化に対し、コースティック像および初期曲線は、相似的に大きさが変化することがわかる。

ここで、初期曲線、コースティック像の理論式に含まれている関数 S_0 、 S_1 、 S_2 、 M_x 、 M_y について考える。これらはすべて分母に Λ_0 を持つ。 Λ_0 の性質を調べると、

$$\alpha = 0 \text{ のとき} \quad \theta = 0 \text{ および } \pm \pi \text{ で } \Lambda_0 = 0$$

$$\alpha \neq 0 \text{ のとき} \quad \Lambda_0 \neq 0$$

よって、 $\alpha = 0$ のとき、 Λ_0 での零割が生じる可能性がある。このため、 $\alpha = 0$ （純粋モードI型荷重）の場合について、それぞれの関数、および Λ_0 （式(12)、(13)、(18)）に $\alpha = 0$ を代入して考えると次式となる。

$$S_0 = -\Lambda_0 \quad (20.a)$$

$$S_1 = -\cos 2\theta \left[-7\Lambda_0 + \frac{1}{2}\Lambda_0^{-1} \right] + \frac{1}{2}\Lambda_0^{-1} = 7\Lambda_0 \cos 2\theta + \sin^2 \theta \cdot \Lambda_0^{-1} \quad (20.b)$$

$$S_2 = -\sin 2\theta \left[-7\Lambda_0 + \frac{1}{2}\Lambda_0^{-1} \right] = 7\Lambda_0 \sin 2\theta - \sin \theta \cos \theta \cdot \Lambda_0^{-1} \quad (20.c)$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} [\sin^2 \theta]^{1/2} = \frac{1}{2} |\sin \theta| \quad (21)$$

$$M_x = -3\cos \theta \cdot \Lambda_0 \quad (22.a)$$

$$M_y = -3\sin \theta \cdot \Lambda_0 + \frac{1}{2} \sin \theta \Lambda_0^{-1} \quad (22.b)$$

式(20)、(21)、(22)から、明らかに、 $\alpha = 0$ の場合、 Λ_0 は

約分され、零割となることはない。したがって、これら一連の初期曲線、コースティック像の形成式は、モード I 型理論を含み、光学的等方性材 ($\xi = 0$) の場合を含む、統一的な解析解であるといえる。

次に特別な場合として、純粋モード II 型 ($\alpha = \infty$) の初期曲線、およびコースティック像の理論式を示す。初期曲線は式(14)と同様、 K_{II} を用いて次式のように表すことができる。

$$r_{0i}^{(i)} = \left[\frac{3N}{2\lambda} K_{II} H_1^{(i)}(\infty, \xi, \theta) \right]^{2/5} \quad (i=1,2) \quad (23)$$

ここで、式(23)の $H_1^{(i)}$ は、次式のようになる。

$$H_1^{(i)}(\infty, \xi, \theta) = \frac{1}{2} [\pm \xi S_0 + \frac{1}{2} \{-2\sin\frac{5}{2}\theta \pm \xi S_1\}^2 + [2\cos\frac{5}{2}\theta \pm \xi S_2]^2]^{1/2} \quad (24)$$

$$S_0 = -\Lambda_0 + \frac{1}{3}\Lambda_0^{-3} \quad (25.a)$$

$$S_1 = -\cos 2\theta [-7\Lambda_0 + \frac{5}{2}\Lambda_0^{-1} + \frac{1}{3}\Lambda_0^{-3}] - \frac{3}{2}\Lambda_0^{-1} \quad (25.b)$$

$$S_2 = -\sin 2\theta [-7\Lambda_0 + \frac{5}{2}\Lambda_0^{-1} + \frac{1}{3}\Lambda_0^{-3}] \quad (25.c)$$

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2} [4\cos^2\theta + \sin^2\theta]^{1/2} \quad (26)$$

また、コースティック像は式(23)~(26)を用いて次式となる。

$$W_{x1} = \lambda r_{01}^{(i)} [\cos\theta - \frac{2}{3H_1^{(i)}} (\sin\frac{3}{2}\theta \pm \xi M_x)] \quad (27.a)$$

$$W_{y1} = \lambda r_{01}^{(i)} [\sin\theta - \frac{2}{3H_1^{(i)}} (-\cos\frac{3}{2}\theta \pm \xi M_y)] \quad (27.b)$$

$$M_x = -3\cos\theta \Lambda_0 + 2\cos\theta \Lambda_0^{-1} \quad (28.a)$$

$$M_y = -3\sin\theta \Lambda_0 + \frac{1}{2}\sin\theta \Lambda_0^{-1} \quad (28.b)$$

4. 数値解析

まず、純粋モード I 型 ($\alpha = 0$) 荷重について考える。式(20), (22) に式(21) を代入し、さらに式を整理すると、次式のようになる。

$$S_0 = \pm \frac{1}{2} \sin\theta \quad \text{for } \theta < 0 \text{ or } \theta \geq 0 \quad (29.a)$$

$$S_1 = 7\Lambda_0 \cos 2\theta \mp 2\sin\theta \quad \text{for } \theta < 0 \text{ or } \theta \geq 0 \quad (29.b)$$

$$S_2 = 7\Lambda_0 \sin 2\theta \pm 2\cos\theta \quad \text{for } \theta < 0 \text{ or } \theta \geq 0 \quad (29.c)$$

$$M_x = \pm \frac{3}{4} \sin 2\theta \quad \text{for } \theta < 0 \text{ or } \theta \geq 0 \quad (30.a)$$

$$M_y = \pm \frac{3}{2} \sin^2\theta \mp 1 \quad \text{for } \theta < 0 \text{ or } \theta \geq 0 \quad (30.b)$$

式(29), (30) から明らかなように、 $\theta = 0, \pm\pi$ で、それぞれ内外 ($i = 2, 1$) のコースティック像は不連続となる。

Theocaris⁽⁵⁾ は、ある一方の光路程変化によって得

られる初期曲線およびコースティック像は、き裂軸上に対し、上下非対称であると述べている。しかし、純粋モード I 型荷重下では、主応力方向の光路程変化によって得られる初期曲線、およびコースティック像がき裂軸に対し、非対称となるのは誤りと考えられる。

図2に、アラルダイト B を想定し、 $\xi = 0.288$ とした場合の初期曲線、およびコースティック像を示す。図2からわかるように、得られる初期曲線、およびコースティック像は、Theocaris らのものと同様であるが、それぞれの光路程変化によって得られる初期曲線、およびコースティック像はき裂軸に対称な形状である。さらに、 $\theta = 0$ で、内外 ($i = 2, 1$) のコースティック像は不連続となっているが、コースティック像全体としては連続となっている様子がわかる。一方、 $\theta = 0$ での S_2 の不連続性は、式(15)に $\theta = 0, \alpha = 0$ を代入してわかるように、効果を生じない。したがって初期曲線は、内外ともに連続である。

式(21)において、絶対値を考慮しない場合、記述に若干の違いがあるものの Theocaris らによって導かれた解析解と一致する。しかし、式(21)は、解析解を導く際に、 $\angle S_d$ の偏微分によって生じたものであり、絶対値を考慮しなければ、 $\sigma_1 > \sigma_2$ の仮定に矛盾する。また混合モード荷重下では、 Λ_0 が零とならない。したがって、式(21)では絶対値を考慮する必要がある。

図3に、 $\xi = 0.288, 0.5, 0.8$ の場合の初期曲線、およびコースティック像を示す。明らかに ξ が大きくなるにつれて、初期曲線、およびコースティック像の内外の形状差が大きくなっている。また、コースティック像に現れている不連続部が ξ が大きくなるにつれて顕著に現れているにもかかわらず、全体としては連続なコースティック像となる様子がわかる。

次に、混合モード荷重下の初期曲線、およびコースティック像について考える。混合モード荷重下では、常に $\Lambda_0 \neq 0$ であるので、式(12~19)の一連の解析解が

図2 純粋モード I 型初期曲線およびコースティック像

ら容易に初期曲線、およびコースティック像を可視化することができる。アラルダイトB ($\xi=0.288$)を想定し、混合モード比 $\alpha=0.1, 0.2, 0.4$ と変化した場合の初期曲線、およびコースティック像を図4に示す。

図4より α が微小なとき、初期曲線に楕状の突起が見られ、 α の増加とともに、楕状突起が小さくなっている様子がわかる。また、き裂表面の上側で、内外の初期曲線が交差している。これらは、Theocaris⁽⁵⁾らの導いた初期曲線には見られなかった特徴である。

Theocaris⁽⁵⁾らは、光学的異方性材における混合モードコースティックス理論のなかで、初期曲線、およびコースティック像の形状が、純粋モードI下でのそれぞれの形状を、以下に示す角度 2ω だけ回転させ、特に初期曲線はモードIの形状を $(1+\alpha^2)^{1/2}$ 倍したものと等しいことを述べている。

$$\omega = \cos^{-1} \frac{1}{(1+\alpha^2)^{1/2}} = \sin^{-1} \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}} \quad (31)$$

さらに彼らは、上記の方法を用い、形状を角度 2ω だけ

図3. a モードI初期曲線($\xi=0.288, 0.5, 0.8$)

図3. b モードIコースティック像
($\xi=0.288, 0.5, 0.8$)

回転させることによって、混合モード下での初期曲線およびコースティック像の形状を表している。

しかし、この方法は、光学的等方性材には成立するが、光学的異方性材には成立しない。これは、光学的等方性材($\xi=0$)では、式(3)に示すように、光路程変化 ΔSi に、主応力差が含まれないためである。明らかに、主応力差は上記の回転に無関係であるが、主応力差は方向性があるため、 ΔSi に主応力差が含まれる光学的異方性材では、この方法は成立しない。

図4に見られる楕状突起の原因は主応力差にあると考えることができる。そこで、き裂先端付近近傍の主応力差の立体図、および、光路程変化 ΔSi の等高線図を $\alpha=0.0, 0.2$ についてそれぞれ図5に示す。図5. aでは、主応力差の微係数が不連続となっており ΔSi はこの影響を受け、図3. bに見られるように内外のコースティック像の不連続性が生じる。また、図5. bでは、主応力差の微係数が連続ではあるが急変している。これによって図4に見られる突起が生じる。

また、式から楕状突起の原因を説明することもできる。式(13)において、角度 θ 、および混合モード比 α が微小値であるとする、式(13)の平方根内の第2項、

図4. a アラルダイトBの混合モード初期曲線

図4. b アラルダイトBの混合モードコースティック像

$\alpha \sin \theta$ は極微小な値となる。したがって第1項のみを零として θ について解くと次式となる。

$$\theta = \tan^{-1}(-2\alpha) \quad (32)$$

つまり、第1項は上式で表される角度 θ で零となる。実際に A_0 は第2項が含まれているため零とならないが、第2項が微小値であるので、 A_0 自身が、上式で表される角度で微小値をとると考えてよい。しかし、この角度は α の増大と共に第2項の存在が大きくなるため、 A_0 が微小値をとらなくなると考えることができる。このことにより、 α が小さい場合、式(32)に示す角度 θ で楕状突起が現れ、 α の増大と共に楕状突起が小さくなると考えてよい。このことは、図4. a に示された初期曲線の傾向と一致している。

以上により、初期曲線、コースティック像に見られた楕状突起の原因を明らかにした。

本研究では、さらに α 、 ξ を変化し、初期曲線、お

図5. a き裂先端近傍の主応力差および光路差変化

図5. b き裂先端近傍の主応力差および光路差変化

よびコースティック像について可視化を行った。これらは、現在までに見られなかったコースティック像、および初期曲線を示している。 $\xi=0.288, 0.5, 0.8$ のそれぞれについて、 $\alpha=0.0, 0.1, 10.0$ の場合の初期曲線、およびコースティック像を、図6 に示す。

図6 からわかるように、 ξ 、 α がそれぞれ大きくなるにつれて、初期曲線が円形からはずれてくることがわかる。また、その影響がコースティック像にも顕著に現れている。これらの特徴は、明らかに式(15)に存在する $H_1^{(1)}$ の性質によるものである。さらに、上記理論解による初期曲線およびコースティック像の妥当性を検証するため次の数値シミュレーションを行った。すなわち、試験片上のき裂先端近傍の透過点 $P(r, \theta)$ を等間隔に系統的に与え、式(16)を用いて、スクリー

図6. a コースティック像および初期曲線に及ぼす光学異方性パラメータ ξ と混合モード比 α の影響 ($\xi=0.288$)

図6. b ($\xi=0.5$)

図6. c ($\xi=0.8$)

ン上の到達点P'を計算し、点P'をドットで表現することで、スクリーン上の光点分布像を得た。代表例として、 $\xi=0.288$ 、 $\alpha=0.0$ の場合のコースティック像を図7に、 $\xi=0.8$ 、 $\alpha=10.0$ の場合のコースティック像を図8に示す。図7、8とも、光の到達する様子が表現され、スクリーン上に到達する光が、どのようにコースティック像を形成するかを示している。図7では、内外のコースティック像に対応する光点分布に関し、き裂軸上に不連続性が見られ、これは図2で示したコースティック像の傾向と明らかに一致している。また図8では、到達点の密集する部分と希薄な部分が、よく表され、コースティック像が、図6cで示したものと一致していることがわかる。これらから、 α 、 ξ が共に大きい場合、つまり光学的異方性が強く、且つ K_{II} が K_I に比べて大きい場合には、従来よく見られたコースティック像の形状とは、異なった像が得られることになる。

5. 応力拡大係数決定法

観測されたコースティック像から応力拡大係数を決定するためには、像の形状を正確に測定しなければならない。しかしながら、観測された像が不明瞭なために、像の形状を正確に測定することが困難な場合がある。特に光学的異方性材は像が二重となり、また、槍状突起が弱光となって、コースティック像を不明瞭と

図7 スクリーン上光点分布シミュレーション
($\alpha=0.0$ $\xi=0.288$)

図8 スクリーン上光点分布シミュレーション
($\alpha=10.0$ $\xi=0.8$)

する可能性がある。このため内外のコースティック像よりそれぞれ独立に応力拡大係数、あるいは混合モード比を決定する方法を提案する。

式(17)に式(14)を代入し、整理すると次式になる。

$$W_{x1} = \lambda^{3/5} \left[\frac{3}{2} NK_I \right]^{2/5} (H_1^{*1\alpha})^{2/5} \cos \theta \\ - \frac{2}{3} (H_1^{*1\alpha})^{-3/5} \left(-\cos \frac{3}{2} \theta + \alpha \sin \frac{3}{2} \theta \pm \xi M_x \right) \\ = \lambda^{3/5} \left[\frac{3}{2} NK_I \right]^{2/5} \delta_{x1} \quad (i=1,2) \quad (33.a)$$

$$W_{y1} = \lambda^{3/5} \left[\frac{3}{2} NK_I \right]^{2/5} (H_1^{*1\alpha})^{2/5} \sin \theta \\ - \frac{2}{3} (H_1^{*1\alpha})^{-3/5} \left(-\sin \frac{3}{2} \theta - \alpha \cos \frac{3}{2} \theta \pm \xi M_y \right) \\ = \lambda^{3/5} \left[\frac{3}{2} NK_I \right]^{2/5} \delta_{y1} \quad (i=1,2) \quad (33.b)$$

ここで、 δ_{x1} 、 δ_{y1} は、関数部をまとめたものである。本研究では、観測された像を測定するための代表的な寸法として図9に示す6つの径を用いる。これらは、 δ_{x1} 、 δ_{y1} と数値的に関係付けることができる。

y方向最大径 D^{out} 、 D^{in} は次式で表される。

$$D^{out} = \lambda^{3/5} \left[\frac{3}{2} NK_I \right]^{2/5} [\delta_{y1max} - \delta_{y1min}] \\ = \lambda^{3/5} \left[\frac{3}{2} NK_I \right]^{2/5} d^{out} \quad (34.a)$$

$$D^{in} = \lambda^{3/5} \left[\frac{3}{2} NK_I \right]^{2/5} [\delta_{y2max} - \delta_{y2min}] \\ = \lambda^{3/5} \left[\frac{3}{2} NK_I \right]^{2/5} d^{in} \quad (34.b)$$

ξ は既知とすると、次のように α は径の比から求めることができる。例えば D_{max}^{out} と D_{min}^{out} との比、あるいは D_{max}^{in} と D_{min}^{in} との比は次式となり、これらの比と α の関係を数値的に求めることができる。

$$D_{min}^{out}/D_{max}^{out} = (\delta_{x1max} - \delta_{x1min}) \mid \theta > 0 / \\ (\delta_{x1max} - \delta_{x1min}) \mid \theta < 0 \quad (35.a)$$

$$D_{min}^{in}/D_{max}^{in} = (\delta_{x2max} - \delta_{x2min}) \mid \theta > 0 / \\ (\delta_{x2max} - \delta_{x2min}) \mid \theta < 0 \quad (35.b)$$

ξ をパラメータとして、これらの関係を図10に示す。応力拡大係数は(34.a,b)より

$$K_I = \frac{2}{3N} \lambda^{-3/2} [D^{out}/d^{out}]^{5/2} \quad (36.a)$$

$$K_I = \frac{2}{3N} \lambda^{-3/2} [D^{in}/d^{in}]^{5/2} \quad (36.b)$$

$$K_{II} = \alpha K_I \quad (37)$$

と表すことができる。 ξ をパラメータとして、 d^{out} と α および d^{in} と α の関係を図11に示す。すでに求めている α より d^{out} 、 d^{in} を決定できる。したがって測定値 D^{out} 、 D^{in} を式(36.a)または式(36.b)に代入することによって応力拡大係数を決定できる。内外のコースティ

図9 コースティック像測定径（外側、内側）

図10. a コースティック像形状と α の関係（外側）

図10. b コースティック像形状と α の関係（内側）

ック像の情報よりそれぞれ独立して、より確からしいと思われる測定径より、応力拡大係数を決定するために、不明瞭な像からも比較的、信頼性のある応力拡大係数を決定することができる。

6. 結言

光学的異方性材における静止き裂に対する混合モードコースティックス法理論を確立した。具体的には、純粋モードⅠ型荷重を含む混合モード荷重下での、初期曲線、およびコースティック像の完全な解析解を導いた。これにより、Theocarisらの導いた理論の誤りを指摘し、新しく、初期曲線、およびコースティック像

図11. a d^{out} と α の関係

図11. b d^{in} と α の関係

形状の可視化を行いこれらに対する光学的異方性パラメータと混合モード比 α の影響を明らかにした。さらに内外のコースティック像形状より、それぞれ独立に混合モード応力拡大係数を決定する方法を開発した。

文献

- (1) Beinert, J. and Kalthoff, J.F. (Sih, G.C. 編) in Experimental Evaluation of Stress Concentration and Intensity Factors, (1981), 281, Martius Nijhoff
- (2) Theocaris, P.S., J. Strain Analysis, 7-2 (1972-4), 75.
- (3) 清水・島田・佐々木、機論、46-411, A(1980-11), 1196
- (4) Phillips, J.W. and Sanford, R.J., ASTM STP 743, (1981), 387
- (5) Theocaris, P.S. and Paradopoulos, G.A., Materialpruf., 22-6 (1980), 246.
- (6) 西岡・橘高、機論、54-501, A(1988-5), 1081.
- (7) 橘高・西岡、機論、55-551, A(1989-3), 568.
- (8) 西岡・村上・松尾、機論、第65期関西定時総会 (1990-3)
- (9) 岡村、線形破壊力学入門、培風館(1976), 176.