縦衝撃を受ける弾/粘塑性角柱棒の動的挙動*

劉 凱 欣^{*1}, 横 山 隆^{*2}Dynamic Behavior of Elastic/Viscoplastic Bars of Square
Cross Section Subjected to Longitudinal Impact

Kaishin LIU and Takashi YOKOYAMA

Numerical solutions are presented for three-dimensional waves in an elastic/viscoplastic bar of square cross section, subjected to a uniform velocity impact. The governing hyperbolic partial differential equations are solved by the method of numerical integration along bicharacteristics. The numerical results for the bar of square cross section are compared with those for that of circular cross section in order to examine the effect of the difference in the shape of the cross section on the wave propagation in the bar. It is shown that the distributions of the longitudinal stress or strain across the transverse section in the vicinity of the impact end of the square elastic bar do not become virtually uniform.

Key Words: Numerical Analysis, Bicharacteristics, Prismatic Bar, Square Cross Section, Elastic/Viscoplastic Wave, Impact Loading

1. 結 言

半無限長丸棒の縦衝撃問題は、これまで多くの研究者によって、理論的および実験的に詳しく調べられてきた^{(1)~(3)}。一方、棒の断面形状が円以外の場合、その動的挙動がどのようなものであるかということは、興味深い問題である。Jones-Ellis⁽⁴⁾は幅広い長方形断面棒の縦衝撃問題を、平面応力近似を用いて解析している。Mindlin-Fox⁽⁵⁾、Recker⁽⁶⁾、田中・岩橋⁽⁷⁾はそれぞれ異なる方法で、長方形断面棒の三次元波動を解析した。しかし以上の長方形断面棒に関する解析は弾性域に限られており、弾/粘塑性域における三次元解析はまだ行われていないようである。

衝撃問題に用いられる数値解析法として、(陪)特性曲線に基づく数値積分法は、差分法、有限要素法および境界要素法と比べて、波動伝ば挙動を物理的に把握しやすいことや、比較的安定な解が得られる点に大きな利点があり、有力な解法となっている。しかし、二次元および三次元波動問題において陪特性曲線に沿う微分関係を求めるのは難しくなり、一次元波動問題⁽⁸⁾ほ

ど詳しくは研究されていない。二次元弾性および弾/粘塑性波動問題については、縦衝撃を受ける平板の平面応力問題⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾、縦衝撃を受ける円柱^{(3)(11)~(16)}および円管^{(17)~(19)}の軸対称問題は陪特性曲線法により解析された。三次元波動問題については、陪特性曲線法によって弾性波動は取扱われた⁽⁶⁾が、弾/粘塑性波動はまだ解析されていないようである。

本研究では、一定速度の縦衝撃を受ける正方形断面棒(以後は角柱と簡略する)の衝撃端近傍における三次元波動を取り扱っている。構成方程式として、高ひずみ速度を含む広いひずみ速度域に適用し得る弾/粘塑性体の構成式⁽²⁰⁾⁽²¹⁾を用い、解析には陪特性曲線に沿う数値積分法を用いた。同一衝撃条件下での角柱とそれに内接する円柱の衝撃端近傍の動的挙動を比較し、検討を行なった。

2. 理 論 解 析

2.1 基礎式 図1に示すように、半無限長角柱の一端が様な速度 $v(t)$ の衝撃を受けるときの三次元弾/粘塑性波の伝ば問題を考える。直角座標 (x, y, z) を用いると、このような三次元衝撃問題の運動方程式は次式で表される。

* 原稿受付 平成3年9月17日。

*¹ 正員、大連理工大学工程力学研究所(中国、大連市)。*² 正員、岡山理科大学工学部(〒700 岡山市理大町1-1)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 v_x, v_y, v_z は各粒子速度成分、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ は応力成分、 ρ は質量密度、 t は時間である。

本解析では、衝撃圧縮により生ずる角柱内のひずみは微小であるとし、温度変化も無視できると仮定する。広ひずみ速度域に適用し得る弾/粘塑性体の構成式⁽²⁰⁾⁽²¹⁾は、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{ij} &= \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \langle D \rangle S_{ij} \\ \dot{\epsilon}_{kk} &= \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3K_v} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 e_{ij}, S_{ij} はそれぞれ偏差ひずみテンソルおよび偏差応力テンソルの成分、 $\epsilon_{kk}, \sigma_{kk}$ はそれぞれひずみテンソルおよび応力テンソル成分である。 G は剛性率、 K_v は体積弾性係数、ドット ($\dot{}$) は時間に関する偏微分を表す。粘塑性ひずみ成分に対応した関数項 $\langle D \rangle$ は次式で表される。

$$\langle D \rangle = \frac{\zeta \phi(F)}{\sqrt{J_2}} = \begin{cases} \frac{\eta^*}{\sqrt{J_2}} \exp\left(\frac{-D'}{\sqrt{J_2} - \bar{\tau}^*}\right) & (F \leq 0) \\ 0 & (F > 0) \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\zeta, \eta^*, \bar{\tau}^*, D'$ および J_2 はそれぞれ粘性係数、振動数パラメータ、加工硬化に起因する“back stress”、ひずみ速度依存性を表すパラメータおよび偏差応力の第二次不変量である。関数 F は次式で表される。

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{\bar{\tau}^*} - 1 \dots\dots\dots (4)$$

微小変形の場合に対する変位-粒子速度の関係式と変位-ひずみの関係式を式(2)に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\dot{S}_x}{2G} + \frac{\dot{\sigma}_m}{3K_v} + \langle D \rangle S_x \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\dot{S}_y}{2G} + \frac{\dot{\sigma}_m}{3K_v} + \langle D \rangle S_y \end{aligned}$$

図 1 角柱棒と座標系

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_z &= \frac{\dot{S}_z}{2G} + \frac{\dot{\sigma}_m}{3K_v} + \langle D \rangle S_z \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{\dot{\sigma}_{xy}}{2G} + \langle D \rangle \sigma_{xy} \\ \dot{\epsilon}_{xz} &= \frac{\dot{\sigma}_{xz}}{2G} + \langle D \rangle \sigma_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yz} &= \frac{\dot{\sigma}_{yz}}{2G} + \langle D \rangle \sigma_{yz} \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 σ_m は平均垂直応力である。次に、以下の無次元変数を導入する。

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{c_1}{b} t, \quad X = \frac{x}{b}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad Z = \frac{z}{b} \\ v_1 &= \frac{v_x}{c_1}, \quad v_2 = \frac{v_y}{c_1}, \quad v_3 = \frac{v_z}{c_1}, \quad P_4 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K_v c_1^2} \\ P_5 &= \frac{\gamma(\sigma_x - \sigma_y)}{2\rho c_1^2}, \quad P_6 = \frac{\gamma(\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z)}{2\sqrt{3}\rho c_1^2} \\ P_7 &= \frac{\gamma\sigma_{xy}}{\rho c_1^2}, \quad P_8 = \frac{\gamma\sigma_{xz}}{\rho c_1^2}, \quad P_9 = \frac{\gamma\sigma_{yz}}{\rho c_1^2} \\ D &= \frac{2\rho c_1 b}{\gamma^2} \langle D \rangle \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 c_1 と c_2 はそれぞれ膨張波およびせん断波の伝ば速度、 $\gamma = c_1/c_2$ 、 $K = [1 - 3/(4\gamma^2)]^{1/2}$ であり、 b は代表長さである。

式(1)と式(5)を、式(6)で導入した無次元数で整理し、行列表示すると次式のようにになる。

$$L[W] = A^T W_T + A^X W_X + A^Y W_Y + A^Z W_Z + B = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで、ベクトル W, B および行列 A^T, A^X, A^Y, A^Z はそれぞれ次に示すとおりである (W の下添字 τ, X, Y, Z はその量についての偏微分を意味する)。

$$W = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A^x &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -K & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 & 0 \\ -K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A^y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K & \gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & -K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A^z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & -K & 0 & 2\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ DP_5 \\ DP_6 \\ DP_7 \\ DP_8 \\ DP_9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで, $\gamma_1=1/\gamma$, $\gamma^2=\gamma_1/\sqrt{3}$ である。

2・2 陪特性曲線に沿う差分式 (7)は1階半線形の双曲形偏微分方程式系であり, その特性曲面を $\phi(\tau, X, Y, Z)=\text{const}$ で表し, 行列式

$$\det A = \det (A^T \phi_\tau + A^X \phi_X + A^Y \phi_Y + A^Z \phi_Z) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

を展開すると, 次の特性方程式が得られる。

$$[\phi_\tau^2 - (\phi_X^2 + \phi_Y^2 + \phi_Z^2)][\phi_\tau^2 - (\phi_X^2 + \phi_Y^2 + \phi_Z^2)/\gamma^2] \phi_\tau^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(9)の内の二つの大カッコの中の式は, それぞれ無

次元速度 $c=\pm 1, \pm \gamma_1$ の膨張波およびせん断波の伝播を示している。それらはそれぞれ c_1 および c_2 と対応する。式(9)の解は点 (τ_0, X_0, Y_0, Z_0) を通る特性超平面群であり, その方程式は次式で表される。

$$\phi = c(\tau - \tau_0) + a_X(X - X_0) + a_Y(Y - Y_0) + a_Z(Z - Z_0) = 0 \quad (c=\pm 1, \pm \gamma_1) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで, a_X, a_Y, a_Z はそれぞれ平面 ϕ の法線がそれぞれ X, Y, Z 軸となす角の余弦であり, それらの角度の変化範囲は $0 \sim 2\pi$ である。また $a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2 = 1$ が成り立つ。その平面群の包絡面をとると, 点 (τ_0, X_0, Y_0, Z_0) を頂点とする特性円すい(特性超曲面)になる。その方程式は次式で与えられる。

$$c^2(\tau - \tau_0)^2 = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 \quad (c=\pm 1, \pm \gamma_1) \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(11)に表した特性円すいは点 (τ_0, X_0, Y_0, Z_0) を頂点とする上向きと下向きの円すい面と下向きの円すい面を含んでいる。その下向きの分枝だけを考えると, その特性円すいの接線, すなわち陪特性曲線は次式で表される。

$$X - X_0 + c(\tau - \tau_0)a_X = 0 \quad (c=1, \gamma_1) \quad \dots\dots (12 \cdot a)$$

$$Y - Y_0 + c(\tau - \tau_0)a_Y = 0 \quad (c=1, \gamma_1) \quad \dots\dots (12 \cdot b)$$

$$Z - Z_0 + c(\tau - \tau_0)a_Z = 0 \quad (c=1, \gamma_1) \quad \dots\dots (12 \cdot c)$$

また, それらの陪特性曲線を含む特性円すいに垂直な方向は

$$\phi_\tau = c, \quad \phi_X = a_X, \quad \phi_Y = a_Y, \quad \phi_Z = a_Z \quad (c=1, \gamma_1) \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(7)の固有ベクトル l^K を次式

$$l^K(A^T \phi_\tau + A^X \phi_X + A^Y \phi_Y + A^Z \phi_Z) = 0 \quad \dots\dots (14)$$

によって求めると, 四つの固有ベクトルが得られる。

$$l^1 = [a_X, a_Y, a_Z, K, \gamma_1(a_X^2 - a_Y^2), \gamma_2(1 - 3a_Z^2), 2\gamma_1 a_X a_Y, 2\gamma_1 a_X a_Z, 2\gamma_1 a_Y a_Z] \quad (c=1) \quad (15 \cdot a)$$

$$l^2 = [a_Y, a_X, 0, 0, -2a_X a_Y, 0, a_X^2 - a_Y^2, 0, 0] \quad (c=\gamma_1) \quad \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

$$l^3 = [a_Z, 0, a_X, 0, -a_X a_Z, -\sqrt{3} a_X a_Z, 0, a_X^2 - a_Z^2, 0] \quad (c=\gamma_1) \quad \dots\dots\dots (15 \cdot c)$$

$$l^4 = [0, -a_Z, a_Y, 0, a_Y a_Z, -\sqrt{3} a_X a_Z, 0, a_X^2 - a_Y^2] \quad (c=\gamma_1) \quad \dots\dots\dots (15 \cdot d)$$

陪特性曲線に沿った微分方程式は次式によって求められる。

$$l^i L(W) = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots (16)$$

さらに, 陪特性曲線に沿う次の微分関係式

$$\frac{dW}{d\tau} = W_\tau + W_X \frac{dX}{d\tau} + W_Y \frac{dY}{d\tau} + W_Z \frac{dZ}{d\tau} \quad \dots\dots\dots (17)$$

を利用して, τ に関する偏微分の項を消去すると, その微分方程式系が次の一次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
& a_x dV_1 + a_y dV_2 + a_z dV_3 + K dP_4 + \gamma_1 (a_x^2 - a_y^2) dP_5 + \gamma_1 \sqrt{3} (1 - a_z^2) dP_6 + \gamma_1 a_x a_y dP_7 \\
& + \gamma_1 a_x a_z dP_8 + \gamma_1 a_y a_z dP_9 = -S_1(a_x, a_y, a_z) d\tau \cdots \cdots \cdots (18\cdot a) \\
& -a_y dV_1 + a_x dV_2 - 2a_x a_y dP_5 + (a_x^2 - a_y^2) dP_7 = -S_2(a_x, a_y) d\tau \cdots \cdots \cdots (18\cdot b) \\
& -a_z dV_1 + a_x dV_3 - a_x a_z dP_5 - 3a_x a_z dP_6 + (a_x^2 - a_z^2) dP_8 = -S_3(a_x, a_z) d\tau \cdots \cdots \cdots (18\cdot c) \\
& -a_z dV_2 + a_y dV_3 + a_y a_z dP_6 - a_y a_z dP_5 + (a_y^2 - a_z^2) dP_9 = -S_4(a_y, a_z) d\tau \cdots \cdots \cdots (18\cdot d)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
S_1(a_x, a_y, a_z) = & [\{\gamma_3(v_{2x} + v_{1y}) + 2\gamma_1(P_{9x} + P_{8y} + P_{7z})a_z + 2\gamma_1 DP_7\}a_y + \{\gamma_3(v_{3x} + v_{1z}) + 2\gamma_1 DP_8\}a_z \\
& + \gamma_1(a_z^2 - 2)P_{5x} + \gamma_1(1 + 2a_y^2)P_{7y} + \gamma_1(1 - 2a_z^2)P_{8z}]a_x + [\{\gamma_3(v_{3y} + v_{2z}) + 2\gamma_1 DP_9\}a_z + (2a_z^2 - 1)\gamma_1 P_{9z} \\
& + \gamma_1(2a_z^2 - a_y^2 - 1)P_{7x} + \gamma_1(1 + a_x^2)P_{5y}]a_y - \{\gamma_1(\sqrt{3}a_z^2 - 1/\sqrt{3})DP_6 + \gamma_1(a_x P_{6x} + a_y P_{6y})a_z^2 \\
& + \gamma_1(a_z^2 - 1)a_z P_{6z} - \gamma_3((1 - a_x^2)v_{1x} + (1 - a_y^2)v_{2y} + (1 - a_z^2)v_{3z}) + \gamma_1(a_x^2 - a_y^2)DP_5 \\
& + \gamma_1 a_z((a_x^2 - a_y^2)P_{5z} + (2a_z^2 - 1)P_{8x} + (2a_y^2 - 1)P_{9y})\} \cdots \cdots \cdots (19\cdot a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2(a_x, a_y) = & -[\{\gamma_5(v_{1x} - v_{2y}) - 2DP_5\}a_y + (a_y^2 + \gamma_1)P_{7x} + (2a_y^2 - \gamma_1)P_{5y} + \gamma_1 P_{9z}]a_x - a_y((2a_x^2 - \gamma_1)P_{5x} \\
& - (a_x^2 + \gamma_1)P_{7y}) + (a_x^2 - a_y^2)DP_7 + (\gamma_4 a_x^2 + \gamma_1 a_y^2)v_{2x} - (\gamma_1 a_x^2 + \gamma_4 a_y^2)v_{1y} + \gamma_1 a_y P_{8z} + a_x^3 P_{7x} - a_y^3 P_{7y} \\
& - K(a_x P_{4y} - a_y P_{4x}) - \gamma_1(a_x P_{6y} - a_y P_{6x})/\sqrt{3} \cdots \cdots \cdots (19\cdot b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3(a_x, a_z) = & -[\{\gamma_5(v_{1x} - v_{3z}) + DP_5\}a_z + (a_z^2 + \gamma_1)P_{8x} + a_z^2 P_{5z} + \gamma_1 P_{9y}]a_x - a_z(a_x^2 - \gamma_1)(P_{5x} - P_{8z}) \\
& + (a_x^2 - a_z^2)DP_8 + (\gamma_4 a_x^2 + \gamma_1 a_z^2)v_{3x} - (\gamma_1 a_x^2 + \gamma_4 a_z^2)v_{1z} + a_z P_{7y} + a_x^3 P_{8x} - a_z^3 P_{8z} \\
& - 3(a_z DP_6 + a_z^2 P_{6z} - 2P_{6z}/3)a_x - K(a_x P_{4z} - a_z P_{4x}) - a_z(\sqrt{3}a_x^2 - 1/\sqrt{3})P_{6x} \cdots \cdots \cdots (19\cdot c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4(a_y, a_z) = & -[\{\gamma_5(v_{2y} - v_{3z}) - DP_5\}a_z + (a_z^2 + \gamma_1)P_{9y} - a_z P_{5z} + \gamma_1 P_{8x}]a_y + a_z(a_y^2 - \gamma_1)P_{5y} \\
& + a_z(a_y^2 + \gamma_1 + a_z^2)P_{9z} + (a_y^2 - a_z^2)DP_9 + (\gamma_4 a_y^2 + \gamma_1 a_z^2)v_{3y} - (\gamma_1 a_y^2 + \gamma_4 a_z^2)v_{2z} + \gamma_1 P_{7x} + a_y^3 P_{9y} \\
& - 3(a_z DP_6 + a_z^2 P_{6z} - 2\gamma_1 P_{6z}/3)a_y - K(a_y P_{4z} - a_z P_{4y}) + a_z(\sqrt{3}a_y^2 - 1/\sqrt{3})P_{5y} \cdots \cdots \cdots (19\cdot d)
\end{aligned}$$

ただし $\gamma_3 = (\gamma_2 - 2)/\gamma^2$, $\gamma_4 = (\gamma - 1)/\gamma$, $\gamma_5 = (\gamma - 2)/\gamma$ である.

式(18)中で, 式(18・a)は $c=1$ の陪特性曲線に沿う微分方程式で, 式(18・b)～(18・d)は $c=\gamma_1$ の陪特性曲線に沿う微分方程式系である. 式(18)を対応する陪特性曲線に沿って積分し, k^2 の精度の差分式で表すと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
& a_x \delta v_1 + a_y \delta v_2 + a_z \delta v_3 + K \delta P_4 + \gamma_1 \{(a_x^2 - a_y^2) \delta P_5 + \sqrt{3} (1 - a_z^2) \delta P_6 + a_x a_y \delta P_7 + a_x a_z \delta P_8 + a_y \delta P_9\} \\
& = -k[S_1(a_i)^0 + S_1(a_i)_i]/2 - W_1(a_i) + O(k^3) \cdots \cdots \cdots (20\cdot a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_y \delta v_1 + a_x \delta v_2 - 2a_x a_y \delta P_5 + (a_x^2 - a_y^2) \delta P_7 = -k[S_2(a_i)^0 + S_2(a_i)_i]/2 - W_2(a_i) + O(k^3) \cdots \cdots \cdots (20\cdot b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_z \delta v_1 + a_x \delta v_3 - a_x a_z \delta P_5 - 3a_x a_z \delta P_6 + (a_x^2 - a_z^2) \delta P_8 = -k[S_3(a_i)^0 + S_3(a_i)_i]/2 - W_3(a_i) + O(k^3) \cdots \cdots \cdots (20\cdot c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_z \delta v_2 + a_y \delta v_3 + a_y a_z \delta P_6 - a_y a_z \delta P_5 + (a_y^2 - a_z^2) \delta P_9 = -k[S_4(a_i)^0 + S_4(a_i)_i]/2 - W_4(a_i) + O(k^3) \cdots \cdots \cdots (20\cdot d)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
W_1(a_i) = & [a_x v_1 + a_y v_2 + a_z v_3 + K P_4 + \gamma_1 \{(a_x^2 + a_y^2) P_5 + \sqrt{3} (1 - a_z^2) P_6 + a_x a_y P_7 + a_x a_z P_8 + a_y a_z P_9\}]_0 \\
& + [a_x v_1 + a_y v_2 + a_z v_3 + K P_4 + \gamma_1 \{(a_x^2 + a_y^2) P_5 + \sqrt{3} (1 - a_z^2) P_6 + a_x a_y P_7 + a_x a_z P_8 + a_y a_z P_9\}]_i
\end{aligned}$$

$$W_2(a_i) = [-a_y v_1 + a_x v_2 - 2a_x a_y P_5 + (a_x^2 - a_y^2) P_7]_0 - [-a_y v_1 + a_x v_2 - 2a_x a_y P_5 + (a_x^2 - a_y^2) P_7]_i$$

$$W_3(a_i) = [-a_z v_1 + a_x v_3 - 3a_x a_y P_6 + (a_x^2 - a_z^2) P_8]_0 - [-a_z v_1 + a_x v_3 - 3a_x a_y P_6 + (a_x^2 - a_z^2) P_8]_i$$

$$W_4(a_i) = [-a_z v_2 + a_y v_3 + a_y a_z P_5 - a_y a_z P_6 + (a_y^2 - a_z^2) P_9]_0 - [-a_z v_2 + a_y v_3 + a_y a_z P_5 - a_y a_z P_6 + (a_y^2 - a_z^2) P_9]_i$$

式(20)の中で, $\delta \mathbf{W} = \mathbf{W}^0(\tau_0, X_0, Y_0, Z_0) - \mathbf{W}_0(\tau_0 - k,$

$X_0, Y_0, Z_0)$, 上指標“0”と下指標“0”はそれぞれ点 $(\tau_0,$

$X_0, Y_0, Z_0)$ と点 $(\tau_0 - k, X_0, Y_0, Z_0)$ での各変数の値で

ある. 下指標“i”は $(\tau_0, X_0 + k a_x, Y_0 + k a_y, Z_0 + k a_z),$

$a_i = (a_x, a_y, a_z) = \cos [(i-1)\pi]; (i=1 \text{ or } 2)$ の点で

の各変数値, 下指標“i'”は $(\tau_0, X_0 + \gamma_1 k a_x, Y_0 + \gamma_1 k a_y,$

$Z_0 + \gamma_1 k a_z), a_i = (a_x, a_y \text{ or } a_z) = \cos [(i'-1)\pi]; (i'$

$=1 \text{ or } 2)$ の点での各変数の値を示す. 例えば, 式(20・

a)はそれぞれ $a_x = \pm 1, a_y = \pm 1, a_z = \pm 1 (c=1)$ の陪

特性曲線 [式(12)を参照] に沿って積分される. その

結果, $(a_x = \pm 1, a_y = a_z = 0), (a_y = \pm 1, a_x = a_z = 0),$

と, 6個の差分式が得られる. 簡単にするため, それら

$$\begin{aligned}
& a_1 = (1, 0, 0) = 0, \quad a_2 = (-1, 0, 0) = 0 \\
& a_3 = (0, 1, 0) = 0, \quad a_4 = (0, -1, 0) = 0 \\
& a_5 = (0, 0, 1) = 0, \quad a_6 = (0, 0, -1) = 0
\end{aligned}$$

…………… (20・a)'

と表す. 同様に, 式(20・b)～(20・d)をそれぞれ $a_x =$

$\pm 1, a_y = \pm 1, a_z = \pm 1 (c=\gamma_1)$ の陪特性曲線に沿って

積分して, 4×3 個の差分式が得られる. それらをそれ

ぞれ

$$\left. \begin{aligned} b_1(1, 0, 0) &= 0, \quad b_2(-1, 0, 0) = 0 \\ b_3(0, 1, 0) &= 0, \quad b_4(0, -1, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot b)'$$

$$\left. \begin{aligned} c_1(1, 0, 0) &= 0, \quad c_2(-1, 0, 0) = 0 \\ c_3(0, 0, 1) &= 0, \quad c_4(0, 0, -1) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot c)'$$

$$\left. \begin{aligned} d_1(0, 1, 0) &= 0, \quad d_2(0, -1, 0) = 0 \\ d_3(0, 0, 1) &= 0, \quad d_4(0, 0, -1) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot d)'$$

と表す。

一方、基礎式(7)を時間軸に沿って $\tau = \tau_0 - k$ から $\tau = \tau_0$ まで k^2 の精度で積分すると、次の9個の差分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta v_1 - \frac{k}{2} \{ [KP_{4x} + \gamma_2 P_{5x} + \gamma_1 (P_{5x} + P_{7y} + P_{8z})]^0 \\ + [KP_{4x} + \gamma_2 P_{5x} + \gamma_1 (P_{5x} + P_{7y} + P_{8z})]_0 \} &= 0 \\ \dots\dots\dots (21 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta v_2 - \frac{k}{2} \{ [KP_{4y} + \gamma_2 P_{6y} + \gamma_1 (P_{7x} - P_{5y} + P_{9z})]^0 \\ + [KP_{4y} + \gamma_2 P_{6y} + \gamma_1 (P_{7x} - P_{5y} + P_{9z})]_0 \} &= 0 \\ \dots\dots\dots (21 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta v_3 - \frac{k}{2} \{ [KP_{4z} - 2\gamma_2 P_{6z} + \gamma_1 (P_{8x} + P_{9y})]^0 \\ + [KP_{4z} - 2\gamma_2 P_{6z} + \gamma_1 (P_{8x} + P_{9y})]_0 \} &= 0 \\ \dots\dots\dots (21 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_4 - \frac{k}{2} \{ [K(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z})]^0 \\ + [K(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z})]_0 \} &= 0 \quad \dots\dots\dots (21 \cdot d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_5 - \frac{k}{2} \{ [\gamma_1 (v_{1x} - v_{2y}) - DP_5]^0 \\ + [\gamma_1 (v_{1x} - v_{2y}) - DP_5]_0 \} &= 0 \quad \dots\dots\dots (21 \cdot e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_6 - \frac{k}{2} \{ [\gamma_2 (v_{1x} + v_{2y} - 2v_{3z}) - DP_6]^0 \\ + [\gamma_2 (v_{1x} + v_{2y} - 2v_{3z}) - DP_6]_0 \} &= 0 \quad \dots\dots\dots (21 \cdot f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_7 - \frac{k}{2} \{ [\gamma_1 (v_{2x} + v_{1y}) - DP_7]^0 \\ + [\gamma_1 (v_{2x} + v_{1y}) - DP_7]_0 \} &= 0 \quad \dots\dots\dots (21 \cdot g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_8 - \frac{k}{2} \{ [\gamma_1 (v_{3x} + v_{1z}) - DP_8]^0 \\ + [\gamma_1 (v_{3x} + v_{1z}) - DP_8]_0 \} &= 0 \quad \dots\dots\dots (21 \cdot h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_9 - \frac{k}{2} \{ [\gamma_1 (v_{3y} + v_{2z}) - DP_9]^0 \\ + [\gamma_1 (v_{3y} + v_{2z}) - DP_9]_0 \} &= 0 \quad \dots\dots\dots (21 \cdot i) \end{aligned}$$

式系(20)'と式系(21)の計27個の差分式を連立して、点 (τ_0, X_0, Y_0, Z_0) における W^0 の偏微分を消去し、9個の増分 $\delta v_1, \delta v_2, \delta v_3, \delta P_4, \delta P_5, \delta P_6, \delta P_7, \delta P_8, \delta P_9$ が下に示した式の組合せによって既知の W_0 の項で表すことができ、それぞれ求められる。

$$a_1 - a_2 - c_3 + c_4 - b_3 + b_4 - 4(21 \cdot a)|2\delta v_1 \quad \dots\dots\dots (22 \cdot a)$$

$$a_3 - a_4 - d_3 + d_4 + b_1 - b_2 - 4(21 \cdot b)|2\delta v_2 \quad \dots\dots\dots (22 \cdot b)$$

$$a_5 - a_6 + d_1 + d_2 + c_1 - c_2 - 4(21 \cdot c)|2\delta v_3 \quad \dots\dots\dots (22 \cdot c)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 4\gamma_3(21 \cdot d)/K|2\delta P_4/K \quad \dots\dots\dots (22 \cdot d)$$

$$a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - 2\gamma\gamma_3(21 \cdot e)|2\gamma\delta P_5 \quad \dots\dots\dots (22 \cdot e)$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/2 - a_5 - a_6 - \sqrt{3}\gamma\gamma_3(21 \cdot f)|\sqrt{3}\gamma\delta P_6 \quad \dots\dots\dots (22 \cdot f)$$

$$b_1 + b_2 - b_3 - b_4 - 2(21 \cdot g)|2\delta P_7 \quad \dots\dots\dots (22 \cdot g)$$

$$c_1 + c_2 - c_3 - c_4 - 2(21 \cdot h)|2\delta P_8 \quad \dots\dots\dots (22 \cdot h)$$

$$d_1 + d_2 - d_3 - d_4 - 2(21 \cdot i)|2\delta P_9 \quad \dots\dots\dots (22 \cdot i)$$

ここで、線 | の左辺は式の組合せの操作を表し、線 | の右辺は求められる未知変数の増分を表している。また、式(22)系の中にある変数 D^0 も未知変数であるが、それは W^0 の関数で、逐次近似法により解ける。なお、式系(22)の中の各変数に関する偏導関数を、次のように差分近似した。

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{1}{2h} [W(X_0 + h, Y_0, Z_0) - W(X_0 - h, Y_0, Z_0)] \\ W_{xx} &= \frac{1}{h^2} [W(X_0 + h, Y_0, Z_0) + W(X_0 - h, Y_0, Z_0) - 2W(X_0, Y_0, Z_0)] \\ W_{xy} &= \frac{1}{4h^2} [W(X_0 + h, Y_0 + h, Z_0) + W(X_0 - h, Y_0 - h, Z_0) - W(X_0 + h, Y_0 - h, Z_0) - W(X_0 - h, Y_0 + h, Z_0)] \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここで、 h は空間きざみである。

2.3 境界条件 衝撃端に作用する速度関数 $V(\tau)$ は次のように仮定した。

$$V(\tau) = \begin{cases} \alpha V_0 \frac{\tau}{\tau_r} & (\tau \leq \tau_r) \\ \alpha V_0 & (\tau_r \leq \tau) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $V_0 = \bar{\tau}^*/(\rho c^2)$ は式(3)の“back stress”を選定するための基準値で、 α はその倍率、 τ_r は無次元立上り時間である。

計算量の節約のため、問題の対称性から、図1に示した座標系における角柱の正の部分(第一象限の角柱の1/4)だけを取り出して計算した。その部分の衝撃端、側面および対称面の境界条件は次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= V(\tau), \quad P_7 = P_8 = P_9 = 0 & (Z=0) \\ \gamma KP_4 + P_5 + P_6/\sqrt{3} &= 0, \quad P_7 = P_8 = P_9 = 0 & (X=1) \\ \gamma KP_4 - P_5 + P_6/\sqrt{3} &= 0, \quad P_7 = P_8 = P_9 = 0 & (Y=1) \\ V_1 &= 0, \quad P_7 = P_8 = P_9 = 0 & (X=0) \\ V_2 &= 0, \quad P_7 = P_8 = P_9 = 0 & (Y=0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

式系(22)は角柱内部の点での計算に適用できるが、境界上で使えない陪特性曲線があり、そのまま適用できない。例えば、自由端面($X=1$)上の一般点では、式(12・a)中の $a_x=1$ の陪特性曲線が使えないため、それに沿う微分方程式 $a_1(1, 0, 0)$, $b_1(1, 0, 0)$ および $c_1(1, 0, 0)$ が使えない。その未知の増分は次のように境界条件と連立して求められる。

$$\gamma K \delta P_4 + \delta P_5 + \delta P_6 / \sqrt{3} = 0$$

$$\delta P_7 = \delta P_8 = \delta P_9 = 0$$

$$2a_3 - 2a_4 + a_5 + a_6 + 4\gamma_3(21 \cdot d)/K$$

$$+ 2\gamma_3(21 \cdot e)|2\delta P_4/K - 2\gamma\delta P_5$$

$$- 3a_5 - 3a_6 + 2\gamma_3(21 \cdot e)$$

$$- 2\sqrt{3}\gamma_3(21 \cdot f)|2\sqrt{3}\gamma\delta P_6 - 2\gamma\delta P_5$$

$$- 2a_2 + a_3 + a_4 - c_3 - c_4 - b_3 - b_4$$

$$- 4(21 \cdot a) + 2\gamma_3(21 \cdot e)|2\delta v_1 - 2\gamma\delta P_5$$

$$a_3 - a_4 - 2b_2 + b_3 + b_4 - d_3 + d_4$$

$$- 4(21 \cdot b) + 2(21 \cdot g)|2\delta v_2$$

$$a_5 - a_6 - 2c_2 + c_3 + c_4 + d_1 - d_2$$

$$- 4(21 \cdot c) + 2(21 \cdot c)|2\delta v_3$$

上に示すように、境界上では有効な陪特性曲線の数が減少して差分方程式の数が減るが、その分だけ境界条件で補足されることになり、各境界ごとに必要な数の差分の組合せが求められる。なお、境界上の差分式の中の各変数に関する偏導関数を、式(23)に示したような中央差分近似式のほか、境界条件に応じて k^2 の精度の前進差分および後進差分近似式を使った。初期条件としては、 $\tau=0$ で応力成分と粒子速度成分のすべてが零であるとした。

3. 計算例および考察

数値計算では軟鋼の角柱($b=0.01$ m)を想定して、

図2 衝撃端における応力変動(弾性域)

次の材料定数⁽²¹⁾を使用した。 $\rho=7.86 \times 10^3$ kg/m³, $\bar{\tau}^*=2.758 \times 10^2$ MPa, $\eta^*=1.437$ s⁻¹, $D'=2.482 \times 10^2$ MPa, $c_1=5.61 \times 10^3$ m/s, $c_2=3.24 \times 10^3$ m/s。メッシュ比(時間刻み幅と空間刻み幅との比 k/h)は0.5とした。数値解の安定性に関しては、衝撃端からの入力エネルギー E_{inp} と角柱のもつエネルギー E_{int} (運動エネルギー+ひずみエネルギー)から、エネルギー誤差 $|E_{inp}-E_{int}|/E_{inp}$ を調べるエネルギー法で検討した。以下の計算例での最大誤差は0.2%程度であった。

図2と図3には角柱の衝撃端がそれぞれ倍率 $\alpha=1$, 5の衝撃速度を受けるときの、衝撃端面上($Y=Z=0$)における応力変動を示す。ここで、 σ_z と σ_r は式(6)より求めた。 $\alpha=1$ (図2)の場合、角柱は弾性域にとどまるのに対し $\alpha=5$ (図3)の場合、角柱には弾/塑性変形が生じる。そして角柱の衝撃端では丸棒と類似な降伏現象を生じることがわかる。比較のため、同一の衝撃条件を受ける角柱の内接円柱棒の計算結果⁽³⁾をそれぞれ図2と図3に加えた。角柱の衝撃端における応力変動は内接円柱棒の場合とほぼ同じであるが、弾性変形の場合は、断面の違いにより、 σ_z の正弦波状の変動周期がやや異なることがわかる。一方、図2に示した σ_r の変動が周期的に生じるのに対して、図3に示した σ_r の変動が時間とともに大きく減衰する傾向は、角柱の横慣性に対する粘塑性の緩和効果を示している。

図4と図5には、それぞれ図2および図3の計算結果と対応する角柱および円柱のひずみ変動を示す。弾性域において角柱と円柱のひずみ変動の傾向はほぼ同じであるが、弾/粘塑性域においては角柱のひずみ ε_z は時間とともに円柱のひずみ ε_z よりも大きくなることが特徴である。

次に、衝撃端から $Z=3$ と $Z=7$ の距離における角

図3 衝撃端における応力変動(弾/粘塑性域)

図 4 衝撃端におけるひずみ変動 (弾性域)

図 7 各断面における応力変動 (弾/粘塑性域)

図 5 衝撃端におけるひずみ変動 (弾/粘塑性域)

図 8 各断面におけるひずみ変動 (弾性域)

図 6 各断面における応力変動 (弾性域)

図 9 各断面におけるひずみ変動 (弾/粘塑性域)

柱断面内の応力変動とひずみ変動を図 6 から図 9 に示す。円柱の結果⁽³⁾と比べれば、衝撃端から離れるにつれて弾性角柱の縦方向の応力とひずみが減衰せずに伝ばしていくこと(図 6, 図 8), 弾/粘塑性角柱における縦方向の応力とひずみが減衰しながら伝ばしていくこと(図 7, 図 9)は、円柱の場合と同じである。しかし

弾性角柱の場合では、弾性円柱の場合と異なり、 $Z=7$ でも横断面上の中心点($X=0$)と外周の点($X=1$)での応力変動とひずみの変動は一致しない、また弾/粘塑性角柱では $Z=7$ で横断面上のひずみ分布は時間とともにほぼ均一になることがわかった。

4. 結 言

縦衝撃を受ける正方形断面を有する角柱内の弾/塑性波動の伝ばについて、陪特性曲線に沿う数値積分法を用いて三次元波動解析を行い、角柱の衝撃端近傍における動的挙動を調べて、内接円柱の計算結果と比較、検討した。その結果、角柱の衝撃端面に一樣な縦衝撃(速度衝撃)を受けるときの衝撃端近傍における応力およびひずみの変動は円柱の場合より複雑になることがわかった。すなわち、弾性角柱の場合は弾性円柱と異なり、 $Z=7$ (衝撃端からの距離)でも横断面上の応力およびひずみ分布は均一にならないこと、また弾/粘塑性角柱の場合では、 $Z=7$ で時間が経つにつれて横断面内のひずみ分布はほぼ均一になることを示した。

本研究を実施するに際し、中国国家自然科学基金委員会(北京)および井上科学振興財団(東京)の支援を受けた。ここに記して感謝の意を表す。

文 献

- (1) 例えば, Skalak, R., *J. Appl. Mech.*, **24**(1957), 59.

- (2) 内藤・台丸谷・劉, 機論, **51**-463, A(1985), 935.
 (3) 劉・ほか3名, 材料, **36**-411(1987), 1909.
 (4) Jones, O. E. and Ellis, A. T., *J. Appl. Mech.*, **30**(1963), 51.
 (5) Mindlin, R. D. and Fox, E. A., *J. Appl. Mech.*, **27**(1960), 152.
 (6) Recker, W. W., *J. Appl. Mech.*, **37**(1970), 116.
 (7) 田中・岩橋・機論, **43**-374, A(1977), 744.
 (8) 例えば, Cristescu, N., *Dynamic Plasticity*, North Holland, (1967).
 (9) Clifton, R. J., *Q. Appl. Math.*, **25**-1(1967), 97.
 (10) Bejda, J., *Proc. 12th Int. Congr. Appl. Mech.*, (1969), 121.
 (11) Murakami, S. and Bejda, J., *Arc. Mech.*, **23**-2(1971), 199.
 (12) Fukuoka, H. and Toda, H., *IUTAM symp.*, (1978), 397.
 (13) 深津・ほか2名, 機論, **50**-453, A(1984), 869.
 (14) 深津・ほか2名, 文献(13)の1546ページ.
 (15) 谷村・井垣・劉, 機論, **52**-484, A(1986), 2680.
 (16) 劉・谷村・台丸谷, 機論, **53**-491, A(1987), 1239.
 (17) Recker, W. W., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**(1971), 361.
 (18) 劉・ほか3名, 機論, **54**-502, A(1988), 1284.
 (19) 劉・ほか3名, 機論, **55**-515, A(1989), 1572.
 (20) Tanimura, S., *Int. J. Eng. Sci.*, **17**(1979), 997.
 (21) 谷村・井垣, 材料, **29**(1980), 137.