動的回復の臨界状態を考慮した移動硬化則*
(第 2 報, 実験結果に基づく検討)大 野 信 忠^{*1}, 王 建 定^{*2}A Kinematic Hardening Rule With Critical State of Dynamic Recovery
(2nd Report, Evaluation Based on Experiments)

Nobutada OHNO and Jianding WANG

The kinematic hardening rule formulated in the first report of this work is applied to ratchetting experiments of Modified 9Cr-1Mo steel by Tanaka et al. and nonproportional tests along cruciform and circular strain paths. It is shown that this rule is capable of predicting much less accumulation of ratchetting strain under uniaxial and multiaxial loadings than the Armstrong and Frederick rule; however, if ratchetting strain is negligible, these two rules may give nearly the same predictions. Burlet and Cailletaud's modification of the Armstrong and Frederick rule is also discussed.

Key Words: Constitutive Equation, Plasticity, Inelasticity, Anisotropy, Kinematic Hardening, Dynamic Recovery, Ratchetting Behavior, Modified 9Cr-1Mo Steel

1. 緒 言

繰返し塑性および粘塑性変形の構成式は過去 20 年ほどの間に著しく進歩したが, 単軸および多軸ラチェット変形のシミュレーションは依然として精度が悪い⁽¹⁾。特に Armstrong-Frederick の非線形移動硬化則⁽²⁾は, よく知られたモデルであるが, ラチェットひずみの累積を過大評価することが報告されている(前報⁽³⁾参照)。なお, Armstrong-Frederick モデルは Mróz の曲面移動則⁽⁴⁾の形に書き直すことができるから⁽⁵⁾⁽⁶⁾, Mróz の曲面移動則に基づく多曲面モデルも, ラチェット変形のシミュレーションに関しては同様な問題を抱えている⁽³⁾。

このように移動硬化則は, ラチェット変形のシミュレーション精度に影響する。そこで前報⁽³⁾では, このシミュレーション精度をよくするために, 動的回復の臨界状態を考慮した移動硬化則を定式化するとともに, その特性を, Armstrong-Frederick モデルをはじめとする古典モデルとの比較により議論した。この結果, 前報で定式化した移動硬化則は, ラチェットひず

みの累積を Armstrong-Frederick モデルより大幅に小さく見積もり得ることがわかった。

本報では, 前報で定式化した移動硬化則の妥当性を検討するため, 改良 9Cr-1Mo 鋼のラチェット試験⁽⁷⁾のシミュレーションを行うとともに, 代表的な非比例ひずみ経路に対する応力応答の計算結果を示す。なお, Burlet と Cailletaud⁽⁸⁾は多軸ラチェット変形用に Armstrong-Frederick モデルを修正しており, 本報では彼らの修正についても議論する。

2. 移 動 硬 化 則

最初に, 本報で検討する移動硬化則について簡単に述べる。なお, 前報⁽³⁾と同じく, ひずみ ϵ は弾性成分 ϵ^e と非弾性(あるいは塑性)成分 ϵ^p の和であるとし, 弾性成分 ϵ^e に対しては Hooke の法則

$$\epsilon^e = [(1+\nu)/E]\sigma - (\nu/E)(\text{tr } \sigma)I \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

を仮定する。ここで, ν と E は弾性定数であり, σ と I はそれぞれ応力テンソルおよび 2 階の単位テンソルを表す。さらに tr は跡を示す。なお本報においても, 今後次のような記号を用いる。

($\dot{}$): 時間に関する微分

($\cdot$): 2 階のテンソル間の内積 [$a \cdot b = \text{tr}(ab)$]

$\langle \rangle$: Macauley の括弧 ($x \geq 0$ ならば $\langle x \rangle = x$, $x < 0$)

* 原稿受付 平成 3 年 8 月 5 日。

^{*1} 正員, 名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 正員, 名古屋大学大学院。

ならば $\langle x \rangle = 0$)

H : Heaviside のステップ関数 ($x \geq 0$ ならば

$H(x) = 1$, $x < 0$ ならば $H(x) = 0$)

2.1 動的回復の臨界状態を考慮したモデル (モデル I)

前報⁽³⁾では、硬化/動的回復の機構に基づいて移動硬化則を定式化した。この定式化では、まず移動硬化変数 α を次式のように M 個の成分に分解した⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

(a) モデル I

(b) モデル II

(c) A-F モデル

図 1 単軸引張応力ひずみ曲線 (実験結果は Tanaka ら⁽⁷⁾による)

$$\alpha = \sum_{i=1}^M \alpha_i \quad \dots\dots\dots (2)$$

次に、成分 α_i の動的回復は、 α_i の大きさ $\bar{\alpha}_i = [(3/2)\alpha_i : \alpha_i]^{1/2}$ が臨界値 r_i に達したときに生じると仮定した。この結果、 α_i の発展式は次式のように表された。

$$\dot{\alpha}_i = \zeta_i [(2/3)r_i \dot{\epsilon}^p - H(f_i) \langle \dot{\epsilon}^p : k_i \rangle \alpha_i] \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 ζ_i は材料定数であり、また $k_i (= \alpha_i / \bar{\alpha}_i)$ は α_i の方向を示す 2 階のテンソルである。さらに f_i は、動的回復の臨界状態を表す関数であり、

$$f_i = \bar{\alpha}_i^2 - r_i^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

と定義される。

2.2 モデル I の拡張 (モデル II) 前報⁽³⁾ではさらに、 α_i の動的回復は $\bar{\alpha}_i$ が臨界値 r_i に近づくにつれて非線形的に活発になると考え、式(3)を次のように拡張した。

$$\dot{\alpha}_i = \zeta_i [(2/3)r_i \dot{\epsilon}^p - (\bar{\alpha}_i / r_i)^{m_i} \langle \dot{\epsilon}^p : k_i \rangle \alpha_i] \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで m_i は、材料定数である。

2.3 Armstrong-Frederick モデル (A-F モデル)

Armstrong と Frederick のモデル⁽²⁾では、 α_i の動的回復は単純に α_i に比例すると仮定されるから、 α_i の発展式は次のように書ける⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

$$\dot{\alpha}_i = \zeta_i [(2/3)r_i \dot{\epsilon}^p - \alpha_i \dot{p}] \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 ζ_i および r_i は材料定数である。また p は、累積非弾性 (あるいは塑性) ひずみを示し、 $\dot{p} = [(2/3)\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p]^{1/2}$ と定義される。

2.4 Burlet-Cailletaud モデル (B-C モデル)

Burlet と Cailletaud⁽⁸⁾は、多軸ラチェット変形のシミュレーション精度をよくするために、式(6)の Armstrong-Frederick モデルを次式のように修正した。

$$\dot{\alpha}_i = \zeta_i [(2/3)r_i \dot{\epsilon}^p - \mu_i \alpha_i \dot{p} - (2/3)(1 - \mu_i)(\alpha_i : n) \dot{\epsilon}^p] \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $n (= \dot{\epsilon}^p / \dot{p})$ は $\dot{\epsilon}^p$ の方向を示す 2 階のテンソルである。また、 μ_i は定数であり、 $\mu_i = 1$ のとき上式は式(6)に帰着する。なお単軸変形では、 $(2/3)(\alpha_i : n) \dot{\epsilon}^p = \alpha_i \dot{p}$ が成り立つから、上式と式(6)は同じ形となる⁽¹¹⁾。

今後、式(3)、(5)、(6)、(7)の移動硬化則を、単にモデル I、モデル II、A-F モデル、および B-C モデルと呼ぶことにする。

3. ラチェット変形試験

Tanaka ら⁽⁷⁾は、改良 9Cr-1Mo 鋼のラチェット変

形試験を 550°C で行った。前章で述べた移動硬化則の妥当性を、最初にこの実験結果に基づいて検討する。

3・1 材料定数の決定 図 1 に示す改良 9Cr-1Mo 鋼の単軸引張試験結果では、初期弾性変形後の過渡の状態を過ぎると、応力はほぼ一定となる。また、この材料の繰返し変形では繰返し軟化が見られるが、その軟化は、 $\Delta\epsilon=1.0\%$ の繰返し変形において応力範囲 $\Delta\sigma$ が繰返し数 $N=20$ で約 5% 減少する程度である⁽⁷⁾。そこで本論文では、簡単のため等方軟化は無視する。

このような仮定のもとに、各モデルの材料定数を単軸引張試験結果から以下のように定めた。ただし、 ϵ^p と σ の関係式は、どのモデルに対しても次式を仮定した。

$$\dot{\epsilon}^p = (3/2)A(\sigma_{\text{eff}})^{b-1}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (8)$$

$$\sigma_{\text{eff}} = [(3/2)(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})]^{1/2} \quad (9)$$

ここで、 A と b は定数であり、 $\mathbf{s}$ は偏差応力を示す。

式(8)は単軸引張変形では

$$\dot{\epsilon}^p = A(\sigma - \bar{\alpha})^b \quad (10)$$

となる。式(10)と前章の移動硬化則を用いるとき、一定ひずみ速度下の単軸引張応力は近似的に

$$\sigma = (\dot{\epsilon}/A)^{1/b} + \bar{\alpha}(\epsilon^p) \quad (11)$$

と表される。ここで $\bar{\alpha}(\epsilon^p)$ は、単軸引張変形における移動硬化変数の変化を示す。 $\bar{\alpha}(\epsilon^p)$ は、モデル I の場合には折れ線で表され、その折れ点は次式によって与えられる(前報⁽³⁾参照)。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{(k)}^p &= 1/\zeta_k \\ \bar{\alpha}_{(k)} &= \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^M (\zeta_i/\zeta_k) r_i \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

また、モデル II による $\bar{\alpha}(\epsilon^p)$ は、 m_i がある程度大きければ、モデル I の $\bar{\alpha}(\epsilon^p)$ とほぼ一致する(前報⁽³⁾参照)。一方、A-F モデルおよび B-C モデルの場合には、 $\bar{\alpha}(\epsilon^p)$ は

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^M r_i [1 - \exp(-\zeta_i \epsilon^p)] \quad (13)$$

と表される。式(11)~(13)を単軸引張試験結果(図 1)に適用したところ、材料定数は表 1 のように決定された。なお、モデル I とモデル II に対しては、 $\boldsymbol{\alpha}$ の成分数

表 1 材料定数

Model I, II		A-F model	B-C model
M=4	M=8	M=2	M=2
$r_1 = 115.0$ $\zeta_1 = 1111$ $r_2 = 57.4$ $\zeta_2 = 370$ $r_3 = 24.3$ $\zeta_3 = 200$ $r_4 = 13.3$ $\zeta_4 = 125$ $m_1 = 7$ (Model II)	$r_1 = 40.0$ $\zeta_1 = 2500$ $r_2 = 50.0$ $\zeta_2 = 1111$ $r_3 = 44.0$ $\zeta_3 = 556$ $r_4 = 27.0$ $\zeta_4 = 370$ $r_5 = 19.0$ $\zeta_5 = 263$ $r_6 = 13.5$ $\zeta_6 = 199$ $r_7 = 7.0$ $\zeta_7 = 159$ $r_8 = 9.4$ $\zeta_8 = 125$ $m_1 = 7$ (Model II)	$r_1 = 100.0$ $\zeta_1 = 1800$ $r_2 = 110.0$ $\zeta_2 = 600$	$r_1 = 100.0$ $\zeta_1 = 1800$ $r_2 = 110.0$ $\zeta_2 = 600$ $\mu_1 = 0.06$

$$E = 1.65 \times 10^5, \nu = 0.33, A = 5.43 \times 10^{-25}, b = 8.8$$

stress (MPa), strain (mm/mm), time (s)

(a) モデル I

(b) モデル II

(c) A-F モデル

図 2 応力ひずみヒステリシスループの実験結果⁽⁷⁾と計算結果

M を $M=4$ と $M=8$ の2通り考えた。また、モデルIIの m_i および B-C モデルの μ_i は、単軸引張試験だけでは決定できない。表1に示されている m_i と μ_i の値は、後述するように、モデルIIおよび B-C モデルが多軸ラチェット試験結果を最も精度よく表すように決めた値である。

モデルI、モデルIIおよび A-F モデルによる単軸引張変形の計算結果を図1(a)~(c)に示す。図2(a)~(c)は、これらの式による応力ひずみヒステリシスループの計算例を対応する実験結果 ($N=1$) と比較した図である。図1および図2を見ると、計算結果

は実験結果とよく一致していることがわかる。なお、B-C モデルによる計算結果は、すでに述べたように単軸変形の場合には A-F モデルの結果に一致する。

3.2 多軸ラチェット変形 図3(a)~(f)は、一定引張応力に繰返しねじり変形を重ねた多軸ラチェット変形の実験結果および計算結果を示しており、これらの図の縦軸には累積ラチェットひずみ、すなわち引張ひずみが取られている。なお、この多軸ラチェット変形における引張応力 σ 、ねじりひずみ範囲 $\Delta\gamma$ およびねじりひずみ速度 $\dot{\gamma}$ の値は、図中に示したとおりである。

(a) 実験結果

(d) モデルII ($M=4$) (b) モデルI ($M=8$)

(e) A-F モデル

(c) モデルII ($M=8$)

(f) B-C モデル

図3 多軸ラチェット変形の実験結果⁽⁷⁾および計算結果

まず、A-Fモデルの計算結果 [図3(e)] を実験結果 [図3(a)] と比べると、すでに緒言で述べたように、このモデルはラチェットひずみの累積を過大評価することがわかる。

これに対して、動的回復の臨界状態を考慮したモデル

(a) 実験結果⁽⁷⁾

(b) モデルII

(c) A-Fモデル

図4 多軸ラチェット変形における引張ひずみとねじりひずみの関係 ($\sigma=100$ MPa, $\Delta\gamma/\sqrt{3}=0.8\%$, $\dot{\gamma}/\sqrt{3}=5 \times 10^{-2}\%$ /s)

ルIは、実験結果にかなり一致する結果を与える [図3(b)]。したがって、動的回復の臨界状態の考慮は、ラチェット変形のシミュレーション精度改善に有効である。しかし、モデルIによるラチェットひずみの累積は、実験結果に比べてやや小さい。そこで、モデルIIの材料定数 m_i の値を変えることにより動的回復項の効果を調節したところ、モデルIIは実験結果にほぼ一致する結果を与えた [図3(c)]。

図3(b)および(c)は、 α の成分数を $M=8$ としたときの計算結果である。成分数 M の影響を調べるため、モデルIIにより $M=4$ の場合の計算を行ったところ、図3(d)に示す計算結果が得られた。この図を図3(c)と比べると、成分数 M の影響はほとんどないことがわかる。

図3(f)は、B-Cモデルによる計算結果である。この計算では、B-Cモデルの定数 μ_i を、 $\sigma=50$ MPa, $\Delta\gamma/\sqrt{3}=0.8\%$ の計算結果が実験結果に合うように $\mu_i=0.06$ と選んだ。図3(f)を図3(a)の実験結果と比較すると、特に $\sigma=100$ MPa, $\Delta\gamma/\sqrt{3}=0.8\%$ の結果が

(a) $\sigma_{\max}=400$ MPa, $\sigma_{\min}=-200$ MPa, $\dot{\sigma}=50$ MPa/s

(b) $\sigma_{\max}=400$ MPa, $\sigma_{\min}=-100$ MPa, $\dot{\sigma}=50$ MPa/s

図5 単軸ラチェット変形の実験結果⁽⁷⁾および計算結果

一致していないことがわかる。

上で述べた多軸ラチェット変形における引張りひずみ ϵ とねじりひずみ $\gamma/\sqrt{3}$ の関係を、実験結果ならびにモデルIIとA-Fモデルの計算結果について示すと図4(a)~(c)のようになり、ひずみ軌跡に関してもモデルIIの計算結果は実験結果とほぼ一致することがわかる。

図6 十字形ひずみ経路 (相当ひずみ速度 $=5 \times 10^{-2}\%$ /s)

3.3 単軸ラチェット変形 図5(a)と(b)は、単軸ラチェット変形における引張りピークひずみの繰返し数に伴う変化、すなわちラチェットひずみの累積を示す。なお、図5(a)と(b)では、最大応力 $\sigma_{\max}$ は同じであるが、最小応力 $\sigma_{\min}$ が異なる。

これらの図を見ると、動的回復の臨界状態の考慮は、単軸ラチェット変形の場合にも有効であることがわかる。すなわち、A-Fモデルによるとラチェットひずみの累積が過大評価されるのに対して、モデルIあるいはモデルIIを用いると、ラチェットひずみの累積は大幅に小さくなり、計算結果は実験結果とかなり一致する。

なお、図5(a)および(b)には、モデルIとモデルIIによる計算結果が、 $M=4$ および $M=8$ の2通り示されている。しかし、これら2通りの計算結果はほとんど一致しており、したがって単軸ラチェット変形の場合にも α の成分数 M の影響は小さい。

4. 非比例変形試験

前章では、動的回復の臨界状態を考慮することによ

図7 図6の十字形ひずみ経路に対する応力応答

り、多軸および単軸ラチェット変形のシミュレーション精度が改善されることを示した。しかし、モデルの検証のためには、他の変形状態での応力ひずみ応答を検討しておく必要がある。特に非比例変形では、予期しない計算結果が得られる可能性がある。そこで本章では、3・1節で決定した材料定数を用いて十字形ならびに円形のひずみ経路に沿う応力応答を計算し、非比例変形におけるモデルの特性について議論する。なお、

図8 円形ひずみ経路 (相当ひずみ速度 $=5 \times 10^{-2}\%$ /s)

これらのひずみ経路は、非比例繰返し硬化特性を調べるための代表的な経路である⁽¹⁾。

4・1 十字形ひずみ経路 図6の十字形ひずみ経路に対する応力応答を、表1の材料定数を用いて計算したところ、図7(a)～(d)に示す結果が得られた。これらの計算結果を見ると、B-Cモデルの結果[図7(d)]だけは大きく異なるが、モデルIおよびモデルIIによる結果はA-Fモデルの結果とだいたい同じである。つまり、モデルIあるいはモデルIIのように動的回復の臨界状態を考慮しても、その影響は図6のような非比例変形では目立たない。

なお Inoue⁽¹²⁾らは、2・1/4 Cr-1 Mo 鋼の十字形ひずみ経路試験を温度 600°Cで行った。彼らの実験と本計算では、材料、温度などが異なるから定量的比較はできないが、実験結果と図7(a)～(c)の計算結果は応力応答の経路の形状に関してはほぼ同じである。

4・2 円形ひずみ経路 円形ひずみ経路(図8)に沿う繰返し変形の応力応答を図9(a)～(d)に示す。この繰返し変形では、引張変形が先行しており(図8)、図9(a)～(d)における小さい黒丸は先行引張変形に

(a) モデル I

(c) A-Fモデル

(b) モデル II

(d) B-Cモデル

図9 図8の円形ひずみ経路に対する応力応答