衝撃加熱を受ける不均質板の動的熱応力*

須 見 尚 文^{*1}Dynamic Thermal Stresses in a Nonhomogeneous Plate
Caused by Rapid Heating on Its Plane Boundary

Naobumi SUMI

This paper is concerned with the dynamic treatment of a transient thermoelastic problem for an infinite plate which is exposed to ramp-type heating on one of the plane boundaries. The material of the structure is continuously nonhomogeneous with mechanical properties varying linearly along the thickness of plate. The curvilinear characteristics in the space-time plane are transformed into straight lines of equal slope so that the numerical errors can be minimized. The problem is then solved using appropriate characteristic equations on boundaries while using more convenient explicit finite-difference approximations at all other points in the transformed space-time plane. The numerical results show clearly the propagation and reflections of discontinuities in stress due to a sudden heating on the boundary.

Key Words: Thermal Stress, Wave Propagation, Nonhomogeneous Material, Characteristic Equations, Finite-Difference Method, Thick Plate

1. 緒 言

最近, 工業材料の高性能化, 高機能化に伴い, 材料特性が空間座標の関数として連続的に変化する不均質材料が積極的に多方面で用いられ, これらの不均質材料が短時間の内に急速な加熱を受ける際に生じる動的熱応力の解析が重要問題となっている。このため, 不均質材料の非定常熱応力^{(1)~(4)}や均質材料の動的熱応力^{(5)~(8)}に関しては, 数多くの報告がなされている。しかしながら, 場の方程式が非線形となる不均質材料の動的熱応力に関しては, 解析の困難さのため, 報告例は皆無であるといえる。さて, 著者らは衝撃加熱を受ける平板, 円柱, 球などの均質材料の一次元動的熱応力問題に対して, 熱応力波の反射する弾性体の境界や異種材料の接合界面上の点には特性曲線方程式を特性曲線に沿って差分化して用い, その他の点では基礎式を直接差分化して用いる, 特性曲線/差分法による数値解析法⁽⁹⁾が有効な方法であることを示した。しかしながら, 力学的材料特性に不均質性を有する材料の特性曲線は, その傾きが空間座標の関数として変化する

曲線群となり, 不均質性が大きい材料に対する数値解ほどその精度が低下し, また, 格子点自身を未知数として逐次決定しなければならない。

そこで, 本論文では, 特性曲線の傾きが一定となるように空間座標の座標変換^{(9)~(10)}を行い, 座標変換された(空間-時間)平面内で数値計算を行うことにより, 解の精度向上および数値計算の簡素化をはかった。端面がランプ加熱され, 熱的および力学的材料特性, すなわち物性値が板厚方向に連続的に変化する不均質板の動的熱応力問題に対して数値計算を行い, 材料の不均質性が動的熱応力に及ぼす影響を検討した。

2. 基礎方程式

物性値が板厚方向に連続的に変化する厚さ h の不均質板の端面 $\bar{x}=0$ が, 時刻 $t=0$ の瞬間から一定時間 $t=t_0$ の間に一定温度 $\bar{T}=\bar{T}_0$ までランプ加熱され, 他の端面 $\bar{x}=h$ は初期温度 $\bar{T}=0$ のままに保たれる板の一次元動的熱応力問題を考える。材料の密度 $\bar{\rho}$, 比熱 $\bar{c}_v$, ボアソン比 ν は一定値とし, 縦弾性係数 $\bar{E}_x$, 線膨張係数 $\bar{\alpha}_x$, 熱伝導率 $\bar{\lambda}_x$ および温度伝導率 $\bar{\kappa}_x$ は, それぞれ次式のように座標 $\bar{x}$ の指数関数形で与えられる不均質性⁽¹¹⁾を有するものとする。

$$\bar{E}_x = \bar{E}_0 e^{2\varepsilon x/h} \dots\dots\dots (1)$$

* 平成3年11月1日 材料力学講演会において講演, 原稿受付 平成3年9月3日。

^{*1} 正員, 静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷 836)。

$$\overline{\alpha_x} = \overline{\alpha_0} e^{2\eta \bar{x}/h} \dots\dots\dots (2)$$

$$\overline{\lambda_x} = \overline{\lambda_0} e^{2\zeta \bar{x}/h}, \overline{x_x} = \overline{x_0} e^{2\zeta \bar{x}/h} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、本論文においては上線“—”の付いた量は有次元量を表すものとし、 $\overline{E_0}$, $\overline{\alpha_0}$, $\overline{\lambda_0}$, $\overline{x_0}$ はそれぞれ不均質板の端面 $\bar{x}=0$ での諸量であり、 ϵ , η , ζ は任意定数である。

さて、板厚方向に熱伝導率の不均質性を有する板の一次元非定常熱伝導方程式、初期条件、境界条件はそれぞれ次式のように無次元表示される。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial \lambda_x}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{x_x} \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (4)$$

$$T(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \dots\dots\dots (5)$$

$$T(0, t) = t/\tau_0 \quad (0 \leq t \leq \tau_0) \dots\dots\dots (6)$$

$$T(0, t) = 1 \quad (\tau_0 \leq t) \dots\dots\dots (7)$$

$$T(1, t) = 0 \quad (0 \leq t) \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 λ_x , x_x は空間座標 x の関数であり、 τ_0 は一定時間である。また、不均質板の一次元動的熱応力問題に対する基礎式、初期条件、境界条件は、それぞれ次式のように無次元化される⁽⁵⁾。

$$\rho^* \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = C_{11}^* \frac{\partial v}{\partial x} - \beta_1^* \frac{\partial T}{\partial t} \dots\dots\dots (10)$$

$$\sigma_x(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \dots\dots\dots (11)$$

$$\sigma_x(0, t) = 0 \quad (0 \leq t) \dots\dots\dots (12)$$

$$\sigma_x(1, t) = 0 \quad (0 \leq t) \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 u は変位、 $v = \partial u / \partial t$ は粒子速度を表す。解析において、密度 $\bar{\rho}$ 、ポアソン比 ν を一定と仮定したが、 $\bar{x}=0$ でのこれらの値をそれぞれ $\overline{\rho_0}$, ν_0 とすれば、 ρ^*

は

$$\rho^* = \rho \frac{\gamma_0^2 (1 - \nu_0)}{(1 - 2\nu_0)} \dots\dots\dots (14)$$

で与えられる一定値、 C_{11}^* および β_1^* は

$$C_{11}^* = E_x \frac{(1 + \nu_0)(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = C_{11} e^{2\epsilon x} \dots\dots\dots (15)$$

$$\beta_1^* = \alpha_x E_x \frac{(1 - \nu_0)}{(1 - 2\nu)} = \beta_1 e^{2(\epsilon + \eta)x} \dots\dots\dots (16)$$

で与えられる空間座標 x の関数である。以上の各式において、 $\bar{x}=0$ における諸量を基準として、次式の無次元量を導入している。

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}/h, t = \bar{t}/h^2, \tau_0 = \bar{\tau}_0/h^2 \\ E_x &= \overline{E_x}/\overline{E_0} = e^{2\epsilon x}, \alpha_x = \overline{\alpha_x}/\overline{\alpha_0} = e^{2\eta x} \\ \lambda_x &= \overline{\lambda_x}/\overline{\lambda_0} = e^{2\zeta x}, x_x = \overline{x_x}/\overline{x_0} = e^{2\zeta x} \\ \rho &= \overline{\rho}/\overline{\rho_0}, c = \overline{c}/\overline{c_0}, \gamma_0 = \overline{\gamma_0}/\overline{\gamma_0} \\ T &= \overline{T}/\overline{T_0}, \sigma_x = \overline{\sigma_x}(1 - \nu_0)/\overline{\alpha_0} \overline{E_0} \overline{T_0} \\ v &= \overline{v}(1 - \nu_0)h/(1 + \nu_0)\overline{\alpha_0} \overline{x_0} \overline{T_0} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

また、 $\overline{c}$ および $\overline{c_0}$ は膨張波の伝ば速度であり、 $\bar{x}=0$ での伝ば速度 $\overline{c_0}$ は次式で与えられる。

$$\overline{c_0}^2 = \frac{\overline{E_0}}{\overline{\rho_0}} \frac{(1 - \nu_0)}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)} \dots\dots\dots (18)$$

3. 特性曲線および特性曲線方程式

基礎式(9)、(10)は双曲形偏微分方程式であり、波頭において応力と速度が不連続となる急激な熱負荷の作用する問題にも適用できる。一方、図1(a)に示すような $(x-t)$ 平面において、応力と速度は特性曲線の方角(I^+ , I^-)に沿って常微分関係式(特性曲線方程式)で表され、式(9)、(10)の系に対して特性曲線は次式となる。

$$\frac{dt}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\rho^*}{C_{11}^*}} = \pm \sqrt{\frac{\rho^*}{C_{11}}} e^{-\epsilon x} \dots\dots\dots (19)$$

材料の不均質性により、式(19)の特性曲線は図1(a)に示すように $(x-t)$ 平面では曲線格子網となり、この不等間隔曲線格子網内で特性曲線方程式を数値積分すれば、特に不均質性の大きい材料に対して計算精度が低下し、また格子点自身を未知数として逐次決定しなければならない。したがって、図1(b)に示すように特性曲線が直線網となるように、次式で定義される新しい空間座標 ξ を導入する。

$$dt/d\xi = \pm K \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 K は任意の定数である。式(19)、(20)を比較すれば、 ξ と x の関係は次式で与えられる。

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\rho^*}{C_{11}^*}} \quad (I^+, I^-) \dots\dots\dots (21)$$

式(21)に式(14)、(15)を代入し、 $x=0$ が $\xi=0$ に対応するように積分すれば、次式を得る。

図1 $(x-t)$ および $(\xi-t)$ 平面の特性曲線

$\varepsilon \neq 0$ のとき

$$\xi(x) = \frac{1}{K} \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\rho^*}{C_{11}}} (1 - e^{-\varepsilon x}) \quad (22)$$

$\varepsilon = 0$ のとき

$$\xi(x) = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\rho^*}{C_{11}}} x \quad (23)$$

このとき、 $(\xi-t)$ 平面の特性曲線方程式はそれぞれ次式で与えられる。

① I^+ に沿って ($dt = Kd\xi$)

$$d\sigma_x - \sqrt{\rho^* C_{11}} dv = -\beta_1^* \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (24)$$

② I^- に沿って ($dt = -Kd\xi$)

$$d\sigma_x + \sqrt{\rho^* C_{11}} dv = -\beta_1^* \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (25)$$

本報での特性曲線/差分法による数値解析法では、座標変換された $(\xi-t)$ 平面の微小格子間において関数値の線形変化を仮定し、熱応力波が反射する境界上の点に対しては特性曲線方程式 (24), (25) を差分化して用い、その他の点に対しては基礎式 (9), (10) を差分化して σ_x と v を求める。すなわち、図 1 (b) に示すように $(\xi-t)$ 平面の特性曲線はすべて一定の傾き $dt/d\xi = \pm K$ の直線網で構成されており、時間増分 Δt (あるいは $\Delta \xi = \Delta t/K$) を指定すればすべての格子点の位置はあらかじめ知ることができる。いま、左側境界 $\xi(0) = 0$ 上の点 d で σ_{xd} が与えられる場合、残りの v_d は式 (25) を I^- に沿って点 c から点 d まで積分することにより点 c での応力、速度および温度から求められ、同様に右側境界 $\xi(1) = \xi_h$ 上の点 k で σ_{xk} が与えられる場合、残りの v_k は式 (24) を I^+ に沿って点 f から点 k まで積分することにより求められる。その他領域内部の点、例えば点 D における応力と速度は、式 (9), (10) を点 B において中央差分化することにより隣接点 A, C, E の応力、速度および温度より求められる。このように、 $(\xi-t)$ 平面の微小格子間で関数値の線形変

化を仮定することは、 $(x-t)$ 平面の微小格子間で関数値の非線形変化を仮定することに相当し、 $(\xi-t)$ 平面で関数値の線形変化を仮定して積分する方が、 $(x-t)$ 平面のそれよりも、より正確な値が得られる。

4. 数値計算および考察

数値計算は、密度 $\rho = 1$ 、ポアソン比 $\nu = \nu_0 = 1/3$ と仮定し、慣性パラメータ γ_0 は慣性項の効果を顕著に表すために $1/2^{(5)(8)}$ とおいて、ランプ加熱を受ける種々の不均質板の動的熱応力について実行した。式 (20) において $K = \gamma_0$ と取り、特性曲線の格子間隔は格子間隔の増減と解の収束性を吟味することにより、 $\Delta t = K\Delta \xi = 2.5 \times 10^{-3}$ を標準とした。本論文において、 $\varepsilon = \eta = \zeta = 0$ と取れば端面をランプ加熱される均質板⁽⁷⁾⁽⁸⁾の解に対応し、さらに板厚 $h \rightarrow \infty$ とすれば均質半無限体⁽⁶⁾の解が得られる。この場合、本報の数値解と Sternberg ら⁽⁶⁾による解析解とは誤差 1% 以内の精度で一致する解が得られている。なお、 $\varepsilon > 0$ の増加とともに縦弾性係数の不均質性が大きく変化する材料については、不均質性の度合に応じてより小さい格子間隔を取ることで安定した解が得られた。本論文での温度分布は、解析解の利用が困難な問題に対する応用を考えて、式 (4) を式 (21) を使って座標変換し、 $(\xi-t)$ 平面内でリープフロッグ法により差分化することにより求めた。

図 2 は $\tau_0 = 0$ および 0.5 の場合の板の各位置における温度の時間的変動を示し、図 3 はランプ加熱を受ける均質板の内点 $x = 0.5$ における σ_x の時間的変動を示す。 $\tau_0 = 0$ のステップ加熱の場合、 σ_x は波頭において不連続となり、 $\tau_0 \neq 0$ の場合、 σ_x は連続であるがその導関数は波頭において不連続となる。また、波頭にお

図 2 $\tau_0 = 0, 0.5$ の場合の温度の時間的変動 ($x = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$)

図 3 ランプ加熱を受ける均質板の σ_x の時間的変動 ($x = 0.5; \varepsilon = \eta = \xi = 0$)

ける σ_x のピーク値は τ_0 の増加とともに減少する。図 4 は $\tau_0=0$ の場合の均質板の各位置における σ_x の時間的変動を示す。いずれの場合も、内外面境界からの熱応力波の反射の様子をよく示している。

本論文では、縦弾性係数、線膨張係数、熱伝導率を式(1)~(3)のように x の指数関数で与えたが、各指数の変化によるこれらの値の変化を図 5 に示す。図 6 は式(21)で与えられる新しい空間座標 ξ と座標 x の関係を示す。座標の増加とともに縦弾性係数が大きくなる $\epsilon=0.5$ の場合、 ξ のわずかな変化に比べ x の変化は大きくなり、 $(\xi-t)$ 平面内の微小格子間で関数値の線形変化を仮定して積分する方が有益であることがわかる。不均質材料に対する以下の数値例は $\tau_0=0$ のステップ加熱を受ける場合についてのみ示す。図 7 は縦弾性係数の不均質性が $x=0.5$ における σ_x の時間的変動に及ぼす影響を示す。 $\epsilon=0.5$ の場合、熱応力波の

伝ば速度は座標の増加とともに速くなり、内外面境界から反射する熱応力波の到達時間は均質材に比べて速くなる。また、不連続波頭における熱応力の絶対値は、均質材のそれよりも大きい。逆に、座標の増加とともに縦弾性係数が小さくなる $\epsilon=-0.5$ の場合、熱応力の絶対値は均質材のそれに比べて常に小さく、このことより指数 ϵ を負の大きな値に取ることが熱応力の軽減に効果的であることを暗示している。図 8 は線膨張係数の不均質性が $x=0.5$ の位置における σ_x の時間的変動に及ぼす影響を示す。座標とともに線膨張係数が大きくなる $\eta=0.5$ の場合、熱応力波が到達するごとに均質材に比べてより大きい圧縮、引張応力を交互に繰返す。図 9 は熱伝導率の不均質性が $x=0.5$ の位置における σ_x の時間的変動に及ぼす影響を示す。座標の増加とともに熱伝導率が大きくなる $\zeta=0.5$ の場合、均質材に比べて内部温度は高くなり、結果として不連

図 4 ステップ加熱を受ける均質板の σ_x の時間的変動 ($x=0.25, 0.5, 0.75$; $\epsilon=\eta=\zeta=0$)

図 5 不均質材料特性

図 6 ξ と x の関係 ($K=\gamma_0=1/2$)

図 7 縦弾性係数の不均質性が σ_x に及ぼす影響 ($x=0.5$; $\tau_0=0$, $\eta=\zeta=0$)

図 8 線膨張係数の不均質性が σ_x に及ぼす影響
($x=0.5$; $\tau_0=0$, $\varepsilon=\zeta=0$)

図 9 熱伝導率の不均質性が σ_x に及ぼす影響
($x=0.5$; $\tau_0=0$, $\varepsilon=\eta=0$)

続波頭における圧縮および引張りの熱応力は小さくなる。しかしながら、熱伝導率の不均質性が熱応力に及ぼす影響は少ない。図 8, 9 に示すように線膨張係数および熱伝導率の不均質性は熱応力波の伝ば速度に影響せず、均質材と同じ時間に熱応力波が到達する。

5. 結 言

本論文では、物性値が連続的に変化する不均質板の動的熱応力問題の解析方法として、特性曲線/差分法による数値解法を示し、数値計算例として表面がランブ加熱される不均質板の動的熱応力問題を解析した。力学的材料特性に不均質性を有する材料の場合、特性曲線は、その傾きが位置の関数として変化する曲線となるので、特性曲線の傾きが一定となるように空間座標の座標変換を行い、座標変換された平面内で数値計算を行うことにより、解の精度向上および数値計算の

簡素化をはかった。また波頭における応力および速度の不連続性を示す数値解が得られることが示された。

文 献

- (1) Sugano, Y., *Ing. - Arch.*, 57-2(1987), 147.
- (2) 菅野・明石, 機論, 55-509, A(1989), 89.
- (3) 大多尾・谷川, 機論, 56-531, A(1990), 2275.
- (4) 大多尾・ほか 2 名, 機論, 57-539, A(1991), 1581.
- (5) Sternberg, E. and Chakravorty, J. G., *Q. Appl. Math.*, 17-2(1959), 205.
- (6) Sternberg, E. and Chakravorty, J. G., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24-4(1959), 503.
- (7) Puri, P., *Arch. Mech. Stos.*, 1-16(1964), 93.
- (8) 須見・畑, 機論, 56-532, A(1990), 2514.
- (9) Chou, S.-C., Greif, R. and Johnson, D. E., *AIAA J.*, 7-9(1969), 1710.
- (10) Greif, R. and Chou, S. -C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 38-1(1971), 51.
- (11) Kaae, J. L. and Gulden, T. D., *J. Am. Ceram. Soc.*, 54(1971), 605.